Chaos z „ničoho“

Michal „Mišof“ Forišek

Department of Theoretical Computer Science
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University
Bratislava, Slovakia

21. september 2017

Collatzova postupnosť

Veľmi jednoduchá matematická hračka: po čísle n nasleduje

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{ak } n \text{ je párne} \\ 3n+1 & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

Príklad: $5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

Collatz (1937): Ak začnem ľubovoľným prirodzeným číslom, dostanem vždy časom číslo 1?

Collatzova postupnosť

Trochu zložitejší príklad:

$\mathbf{27} \to 82 \to 41 \to 124 \to 62 \to 31 \to 94 \to 47 \to 142 \to 71 \to 214 \to 107 \to 322 \to 161 \to 484 \to 242 \to 121 \to 364 \to 182 \to 91 \to 274 \to 137 \to 412 \to 206 \to 103 \to 310 \to 155 \to 466 \to 233 \to 700 \to 350 \to 175 \to 526 \to 263 \to 790 \to 395 \to 1186 \to 593 \to 1780 \to 890 \to 445 \to 1336 \to 668 \to 334 \to 167 \to 502 \to 251 \to 754 \to 377 \to 1132 \to 566 \to 283 \to 850 \to 425 \to 1276 \to 638 \to 319 \to 958 \to 479 \to 1438 \to 719 \to 2158 \to 1079 \to 3238 \to 1619 \to 4858 \to 2429 \to 7288 \to 3644 \to 1822 \to 911 \to 2734 \to 1367 \to 4102 \to 2051 \to 6154 \to 3077 \to \mathbf{9232} \to 4616 \to 2308 \to 1154 \to 577 \to 1732 \to 866 \to 433 \to 1300 \to 650 \to 325 \to 976 \to 488 \to 244 \to 122 \to 61 \to 184 \to 92 \to 46 \to 23 \to 70 \to 35 \to 106 \to 53 \to 160 \to 80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to \mathbf{1}$

Ešte jeden príklad:

Keď začneme z čísla 5 656 191...

... po 170 krokoch už máme číslo 2 412 493 616 608...

... ale po ďalších 230 krokoch sa dostaneme k číslu 1.

Collatzova postupnosť

Ešte jeden príklad:

Keď začneme z čísla 5 656 191. . .

. . . po 170 krokoch už máme číslo 2 412 493 616 608. . .

. . . ale po ďalších 230 krokoch sa dostaneme k číslu 1.

Ešte jeden príklad:

Keď začneme z čísla 5 656 191...

... po 170 krokoch už máme číslo 2 412 493 616 608...

... ale po ďalších 230 krokoch sa dostaneme k číslu 1.

Collatzova postupnosť

Čo o nej vieme?

- Za pomoci počítača sme prezreli čísla po cca 5.48×10^{18}.
- Vieme, že ak existuje cyklus, má dĺžku aspoň 275 000.
- V podstate netušíme, ako popísať správanie tejto postupnosti.
- Paul Erdős: „Matematika na takéto problémy ešte nie je pripravená.“

Postov 2-tag systém

Mechanický prepisovací systém: „Zahoď prvé dve písmená, podľa prvého pripíš na koniec: $a \to bc$, $b \to a$, $c \to aaa$“.

```
retazec = 'a' * int( input() )
pravidla = { 'a' : 'bc', 'b' : 'a', 'c' : 'aaa' }
while len(retazec) >= 2: retazec = retazec[2:] + pravidla[retazec[0]]
```

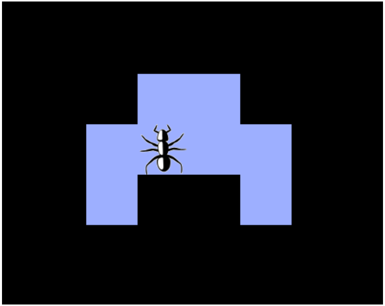
Postov 2-tag systém

```
aaa
abc
cbc
caaa
aaaaa
aaabc
abcbc
cbcbc
cbcaaa
caaaaaa
aaaaaaaa
aaaaaabc
aaaabcbc
aabcbcbc
bcbcbcbc
bcbcbca
bcbcaa
bcaaa
aaaa
aabc
bcbc
bca
aa
bc
a
```

Langtonov mravec

Mravec na nekonečnej štvorcovej sieti.
Každé políčko má jednu z n farieb.
„Program“ pre mravca má len n bitov:
pre každú farbu buď L alebo R

Mravec do nekonečna opakuje: pohni sa, podľa farby sa otoč, zmeň farbu pod sebou na nasledujúcu.



Čo majú tie veci spoločné?

Fundamentálna „pravda o svete“: existuje veľmi veľa situácií v ktorých veľmi stručný popis mechanického procesu vedie ku zložitému, chaotickému, ťažko popísateľnému správaniu.

Aj malé, veľmi jednoducho vyzerajúce programy, môžu mať natoľko zložité správanie, že ho nevieme (lebo sme neschopní) rozumne popísať.

Vieme **matematicky dokázať**, že tieto veci sa vo všeobecnosti **nedá algoritmicky robiť** (teda to vôbec nejde, nie je to len naša neschopnosť).
Príklad: zastane program?

Čo majú tie veci spoločné?

Fundamentálna „pravda o svete“: existuje veľmi veľa situácií v ktorých veľmi stručný popis mechanického procesu vedie ku zložitému, chaotickému, ťažko popísateľnému správaniu.

Aj malé, veľmi jednoducho vyzerajúce programy, môžu mať natoľko zložité správanie, že ho nevieme (lebo sme neschopní) rozumne popísať.

Vieme **matematicky dokázať**, že tieto veci sa vo všeobecnosti **nedá algoritmicky robiť** (teda to vôbec nejde, nie je to len naša neschopnosť).
Príklad: zastane program?

Dlho hľadať nestačí

Jeden príklad za všetky (Skewes' number):
Vieme, že $\pi(n)$, čiže n-té prvočíslo, má veľkosť rádovo $n \ln n$.
Jedno presnejšie pozorovanie: Nech $li(x) = \int_0^x dt/(\ln t)$. Potom vyzerá, že $\pi(n) < li(n)$.

Platí všade, pokiaľ sme sa dopočítali (aspoň po 10^{19})

Vie sa, že existuje kontrapríklad niekde v okolí 10^{316}.

Dlho hľadať nestačí

Jeden príklad za všetky (Skewes' number):
Vieme, že $\pi(n)$, čiže n-té prvočíslo, má veľkosť rádovo $n \ln n$.
Jedno presnejšie pozorovanie: Nech $li(x) = \int_0^x dt/(\ln t)$. Potom vyzerá, že $\pi(n) < li(n)$.

Platí všade, pokiaľ sme sa dopočítali (aspoň po 10^{19})

Vie sa, že existuje kontrapríklad niekde v okolí 10^{316}.

Dlho hľadať nestačí

Jeden príklad za všetky (Skewes' number):
Vieme, že $\pi(n)$, čiže n-té prvočíslo, má veľkosť rádovo $n \ln n$.
Jedno presnejšie pozorovanie: Nech $li(x) = \int_0^x dt/(\ln t)$. Potom vyzerá, že $\pi(n) < li(n)$.

Platí všade, pokiaľ sme sa dopočítali (aspoň po 10^{19})

Vie sa, že existuje kontrapríklad niekde v okolí 10^{316}.

Ďakujem za pozornosť!