Zbierka úloh

z VÝROKOVEJ LOGIKY

Martin Šrámek

OBSAH

ÚVOD

Logika je filozofická disciplína, ktorá popisuje zákonitosti správneho uvažovania a usudzovania. Je potrebná všade tam, kde sa potrebujeme jednoznačne vyjadriť, odvodiť (dedukovať) nové poznatky z už existujúcich a zdôvodňovať (resp. dokazovať) svoje závery. Preto sa stala podkladom pre teoretické exaktné vedy, ako sú matematika a informatika. Keďže matematické teórie odvodzujú svoje vety z axióm pomocou logických postupov a využívajú formálny jazyk, ktorého základy definuje logika, mohli by sme povedať, že logika je náuka na rozhraní filozofie a matematiky, či skôr akýmsi filozofickým základom matematiky. To je dôvod, prečo je logika už viac vnímaná ako súčasť matematiky, než filozofie. Aj na stredných školách sa jej základy, tvorené výrokovou logikou, vyučujú v rámci tohto predmetu. Myslíme si však, že logika by nemala byť študentami chápaná ako obyčajný systém matematických pučiek, vzorcov, či metód riešenia úloh. Je to náuka popisujúca naše myslenie, preto mnohé jej zákony náš rozum už pozná – používame ich pri každodennom uvažovaní. Logika len formalizuje to, čo by sme mali chápať podvedome, intuitívne. Jej štúdium nám však pomôže zjasniť a sprecízniť myšlienkové postupy a vhodne argumentovať.

Cieľom tejto zbierky je naučiť čitateľa – prevažne stredoškolského študenta – základy klasickej dvojhodnotovej (booleovskej) výrokovej logiky. Ide o zbierku úloh, nie o učebnicu, pretože sa domnievame, že študent skutočne pochopí význam toho, čo si prečítal, až vtedy, keď si to vyskúša v praxi a získa dostatočné skúsenosti s riešením úloh z danej oblasti. V každej kapitole je len toľko teoretického textu, aby boli vysvetlené základné poznatky potrebné pre riešenie úloh. Zvyšné vedomosti by mal čitateľ získať samotným vyriešením týchto úloh, prípadne preštudovaním vzorových riešení na konci zbierky. Úlohy teda nahrádzajú výkladový text akýmsi sokratovským dialógom, navádzajú čitateľa na to, aby sám objavil významné poznatky, o ktorých by sa v učebnici len dočítal. Niektoré úlohy na seba nadväzujú, preto ich odporúčame riešiť v takom poradí, v akom sú uvedené. Sú koncipované tak, aby vyčerpali problematiku danej kapitoly do detailov. Preto sme presvedčení, že po vyriešení všetkých úloh v kapitole čitateľ získa prehľad a intuitívne pochopenie tejto problematiky.

V tejto zbierke predpokladáme znalosť určitých matematických pojmov. Ak by sa čitateľ stretol s neznámym pojmom, ktorý nie je vysvetlený v žiadnom teoretickom texte v tejto zbierke, odporúčame si pozrieť „Dodatok – vlastnosti operácií a relácií“ nachádzajúci sa za vzorovými riešeniami, kde sú vysvetlené základne pojmy súvisiace s operátormi a reláciami, ktoré sa v úlohách často používajú.

Na konci tejto zbierky je uvedený zoznam literatúry, z ktorej zbierka vychádza po stránke názvoslovia a symboliky. Úlohy v zbierke sú však originálne, neprebraté z iných publikácií.

Na koniec tohto úvodného textu by sa autor chcel poďakovať svojmu učiteľovi matematiky, RNDr. Mariánovi Mackovi, ktorý na tvorbu tejto zbierky úloh dohliadal a pripomienkoval a korigoval jej nedostatky.

VÝROK

Výrazom nazývame každú postupnosť symbolov, ktorá nadobúda určitú hodnotu. V matematike sú teda výrazy tvorené číslami, premennými a operátormi, v lingvistike písmenami. Výrazmi sú napr. „x + 2“ (nadobúda rôzne hodnoty z množiny reálnych čísel, podľa dosadenia hodnoty za x), „Európa“ (nadobúda konštantnú hodnotu z množiny kontinentov).

Výrokom v logike nazývame každý výraz, ktorý popisuje stav vecí, pričom vieme vždy jednoznačne určiť, či je stav vecí taký, ako tvrdí, alebo nie.

Ak výrok vyjadruje skutočný stav vecí, hovoríme, že **platí**, resp. že je **pravdivý**.
V opačnom prípade hovoríme, že výrok **neplatí**, t.j. je **nepravdivý**.

Pojmy **pravda** a **nepravda** nazývame **pravdivostné hodnoty**. Každý výrok nadobúda práve jednu z týchto dvoch hodnôt.

Pravdivostné hodnoty pravda a nepravda budeme označovať číslami **1** a **0**, v tomto poradí.

Úlohy:

1. O každom z nasledujúcich výrazov rozhodnite, či je výrokom. Ak áno, určte aj jeho pravdivostnú hodnotu. Ak nie, vysvetlite, prečo.

   a) Koľko je hodín?
   b) Najvyššie pohorie tejto planéty sa volá Himaláje.
   c) Nechoď ďaleko a vráť sa včas!
   d) $42 + 47 = 89$
   e) $3x^2 + 5x + 2 = 0$
   f) Ak nebude pršať, pôjdem na prechádzku.
   g) Zajtra nebudem nič čítať, ale prečítam si knihu.
   h) mesto, kde bývam

VÝROKOVÁ PREMENNÁ

Obsah (význam) výroku nazývame **propozíciou**. V logike však väčšinou od propozícií výrokov abstrahujeme a skúmame len ich formu a vzťahy. Aby sme mohli o výrokoch hovoriť všeobecne, používame **výrokové premenné**. Pod pojmom **premenná** rozumieme výraz, ktorý môže nadobúdať ľubovoľné hodnoty z určitého vopred stanoveného oboru. Výroková premenná teda môže reprezentovať ľubovoľný výrok.

Výrokové premenné budeme označovať veľkými tlačenými písmenami: **A**, **B**, **C**, ...

LOGICKÉ SPOJKY

Logickou spojkou nazývame každý operátor, ktorý spája výroky do komplexnejších, tzv. **zložených výrokov**. Výrok, ktorý neobsahuje logické spojky, a teda nepozostáva z iných výrokov, nazývame **jednoduchý výrok**.

Pravdivostná hodnota zloženého výroku je funkciou pravdivostných hodnôt jeho zložiek; predpis tejto funkcie závisí od konkrétnej logickej spojky. V ďalších kapitolách tejto zbierky sa budeme venovať základným logickým spojkám.

FORMULA VÝROKOVEJ LOGIKY

Výrazy, ktoré vzniknú spojením výrokových premenných logickými operátormi, pokiaľ sú správne utvorené (unárne operátory majú jeden argument, binárne operátory, čiže logické spojky, majú dva argumenty a tam, kde nie je jednoznačné poradie vyhodnocovania operácií, sú tieto operácie oddelené zátvorkami) nazývame **formulami výrokovej logiky**.

Formula sama o sebe ešte nenadobúda žiadnu pravdivostnú hodnotu. Nadobudne hodnotu až po dosadení konkrétnych výrokov do výrokových premenných. Keďže v logike neskúmame propozície výrokov, jednoducho hovoríme, že do výrokových premenných dosadzujeme pravdivostné hodnoty.

Formuly budeme označovať malými písmenami gréckej abecedy: $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$...

LOGICKÁ EKVIVALENCIA

Ak dva výroky **A**, **B** tvrdia to isté, a teda majú v každej situácii rovnakú pravdivostnú hodnotu, hovoríme, že sú **logicky ekvivalentné** a píšeme $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Ak dve formuly $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ pri každom dosadení pravdivostných hodnôt za výrokové premenné nadobúdajú rovnakú pravdivostnú hodnotu, hovoríme, že sú **logicky ekvivalentné** a píšeme $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\psi}$.

TABUĽKOVÁ METÓDA RIEŠENIA ÚLOH

V tejto zbierke sa nachádza mnoho úloh, ktorých cieľom je dokázať logickú ekvivalenciu dvoch formúl. Jedna z metód, ktorú odporúčame používať, ak neexistuje jednoduchšie riešenie, je zostavenie tabuľky pravdivostných hodnôt. Ak dané formuly obsahujú spolu **n** rôznych premenných, tabuľka bude mať $\mathbf{2^n}$ riadkov, pretože toľko existuje rôznych dosadení pravdivostných hodnôt do týchto premenných. V prvých **n** stĺpcoch sa vypíšu pravdivostné hodnoty, ktoré jednotlivé premenné nadobúdajú pri daných dosadeniach. Pri zložitejších formulách môžeme ďalšie stĺpce využiť na ‚medzivýsledky' – budú obsahovať pravdivostné hodnoty, ktoré pri daných dosadeniach nadobudnú čiastkové formuly. V posledných dvoch stĺpcoch budú uvedené pravdivostné hodnoty, ktoré nadobudnú dané dve formuly, ktorých ekvivalenciu máme dokázať. Ak tieto dve formuly skutočne sú ekvivalentné, posledné dva stĺpce sa musia zhodovať.

NEGÁCIA

Negáciou výroku **A** nazývame výrok, ktorý tvrdí, že stav vecí nie je taký, ako ho popisuje výrok **A**. Negácia výroku teda tvrdí presný opak toho, čo pôvodný výrok. Ak je výrok pravdivý, jeho negácia je nepravdivá a naopak. Negáciu výroku **A** označujeme $\neg\mathbf{A}$. Operátor $\neg$ nazývame **negátor**.

Keďže negácia mení pravdivostnú hodnotu výroku na opačnú, dvojitá negácia je ekvivalentná s pôvodným výrokom: $\neg\neg\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$. Tento fakt je v logike známy ako **zákon dvojitej negácie**.

Výroky **A**, $\neg\mathbf{A}$ majú vždy opačné pravdivostné hodnoty. Nemôžu byť naraz pravdivé, ani naraz nepravdivé. Navzájom si protirečia, preto hovoríme, že sú **kontradiktorické**.
(po latinsky: contradictio - protirečenie)

Úlohy:

1. Vieme, že platí $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}$. Platí potom aj $\neg\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$? Svoju odpoveď zdôvodnite.

2. Pre každú z nasledujúcich dvojíc výrokov rozhodnite, či tieto výroky sú kontradiktorické (t.j. či je jeden negáciou druhého).

   a) Mám modré oči.
      Mám zelené oči.
   b) Zajtra zájdem k lekárovi.
      Zajtra nepôjdem nikam.
   c) Stredozemné more sa nachádza medzi Európou a Afrikou.
      Stredozemné more sa nenachádza medzi Európou a Afrikou.
   d) Každý človek žije na Zemi.
      Žiaden človek nežije na Zemi.
   e) Niekto je naším prezidentom.
      Nikto nie je naším prezidentom.
   f) Najviac jedno prvočíslo je párne.
      Aspoň dve prvočísla sú párne.
   g) $3 > 5$
      $3 < 5$

3. Utvorte negácie nasledujúcich výrokov. Nepoužívajte triviálne formulácie ako napr. „Nie je pravda, že **A**“, ale pokúste sa o stručnejšie vyjadrenie preformulovaním samotného výroku.

   a) Táto budova je najvyššou stavbou v meste.
   b) Vlk nepatrí medzi bylinožravce.
   c) Nikde v týchto novinách nevidím ten článok, čo som hľadal.
   d) Aspoň jedno slovenské mesto má viac ako 100 000 obyvateľov.
   e) Každý vodič si musí zapnúť bezpečnostný pás.
   f) $3 \cdot 7 = 21$
   g) $5 \leq 20$

KONJUNKCIA

Konjunkciou dvoch výrokov **A, B** nazývame výrok „**A** a **B**“. Konjunkcia je pravdivá, ak sú obe jej zložky pravdivé. Inak je nepravdivá. Symbolicky ju zapisujeme $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. Operátor $\wedge$ nazývame **konjunktor**.

Tabuľka závislosti pravdivostnej hodnoty konjunkcie od pravdivostných hodnôt jej dvoch zložiek teda vyzerá takto:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

tab. 1 – konjunkcia

Pre konjunkciu platí asociatívny zákon $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \equiv \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$. To znamená, že konjunkciu viacerých výrokov $...((((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}) \wedge \mathbf{D}) \wedge \mathbf{E}) \wedge ...$ môžeme zátvorkovať ľubovoľne, ba dokonca ju nemusíme zátvorkovať vôbec. Konjunkcia viacerých výrokov je pravdivá, ak sú všetky tieto výroky pravdivé, inak je nepravdivá.

Úlohy:

1. O nasledujúcich výrokoch rozhodnite, či sú konjunkciami.

   a) Jano je z Bratislavy a Fero je z Košíc.
   b) Jano a Fero študujú v Banskej Bystrici.
   c) Jano a Fero sa včera stretli.

2. Nech platí konjunkcia $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$. Aké sú pravdivostné hodnoty jej členov **P**, **Q** ?

3. Majme konjunkciu $\mathbf{R} \wedge \mathbf{S}$. Pravdivostnú hodnotu výroku **R** nepoznáme. Čo môžeme povedať o pravdivostnej hodnote celej konjunkcie, ak...

   a) ...vieme, že výrok **S** je pravdivý?
   b) ...vieme, že výrok **S** je nepravdivý?

4. Ak viackrát zopakujeme ten istý výrok, zmení sa pravdivostná hodnota toho, čo sme povedali, oproti prípadu, keď by sme ho vyslovili len raz? Svoju odpoveď zdôvodnite.

5. Vyslovili sme dva výroky. Zmení sa pravdivostná hodnota našej výpovede, ak ich povieme v opačnom poradí?

6. Zostavením tabuľky pravdivostných hodnôt dokážte platnosť asociatívneho zákona pre trojčlennú konjunkciu, t.j. ekvivalenciu $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \equiv \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$.

DISJUNKCIA

Disjunkciou dvoch výrokov **A, B** nazývame výrok „**A** alebo **B**“. Disjunkcia je pravdivá, ak je aspoň jeden z výrokov, ktoré ju tvoria, pravdivý. V opačnom prípade je nepravdivá. Disjunkciu dvoch výrokov **A, B** zapisujeme **A** $\vee$ **B**. Operátor $\vee$ nazývame **disjunktor**.

Tabuľka pravdivostných hodnôt disjunkcie dvoch výrokov vyzerá takto:

A	B	A $\vee$ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

tab. 2 – disjunkcia

Podobne ako pre konjunkciu, aj pre disjunkciu platí asociatívny zákon, takže viacčlennú disjunkciu môžeme zátvorkovať ľubovoľným spôsobom, alebo môžeme zátvorky celkom vynechať. Viacčlenná disjunkcia je pravdivá, ak je aspoň jeden z jej členov pravdivý a nepravdivá len vtedy, keď sú nepravdivé všetky.

Úlohy:

1. Predstavte si, že cestujete ako čierny pasažier a prichytí vás revízor. Povie vám: „Buď zaplatíte pokutu, alebo pôjdete na súd!“. Jeho výrok zjavne je disjunkciou, ale, podobne ako mnoho iných výrokov v bežnej reči, je myslený inak, než chápeme disjunkciu v logike. V čom je rozdiel?

2. Majme disjunkciu dvoch výrokov **P** $\vee$ **Q**, pričom pravdivostnú hodnotu výroku **P** nepoznáme. Čo vieme povedať o pravdivostnej hodnote celej disjunkcie, ak...

   a) ...vieme, že výrok **Q** je pravdivý?
   b) ...vieme, že výrok **Q** je nepravdivý?

3. O disjunkcii **R** $\vee$ **S** vieme, že je pravdivá. Čo môžeme povedať o pravdivostnej hodnote výroku **R**, ak

   a) ...vieme, že výrok **S** je pravdivý?
   b) ...vieme, že výrok **S** je nepravdivý?

4. Tabuľkovou metódou dokážte, že pre disjunkciu platí asociatívny zákon, t.j. tvrdenie **(A** $\vee$ **B)** $\vee$ **C** $\equiv$ **A** $\vee$ **(B** $\vee$ **C)**.

5. Rozhodnite, či...

   a) ...je disjunkcia komutatívna (**A** $\vee$ **B** $\equiv$ **B** $\vee$ **A**).
   b) ...je disjunkcia idempotentná (**A** $\vee$ **A** $\equiv$ **A**).

VZŤAHY MEDZI KONJUNKCIOU A DISJUNKCIOU

Ako sme uviedli v predchádzajúcich kapitolách, pri viacčlennej konjunkcii, ani disjunkcii nemusíme používať zátvorky, pretože pre ne platí asociatívny zákon. Avšak v zložených výrokoch, ktoré obsahujú konjunkciu aj disjunkciu, je nutné tieto dve operácie dôsledne oddeľovať zátvorkami, pretože ekvivalencia $\mathbf{A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee C}$ **<u>neplatí</u>**.

Pre konjunkciu a disjunkciu platí **distributívny zákon**, a to dvojako – konjunkcia je distributívna vzhľadom na disjunkciu, aj disjunkcia je distributívna vzhľadom na konjunkciu.

$$\mathbf{A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$
$$\mathbf{A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

Zákon absorpcie vyjadruje, že pravdivostné hodnoty niektorých špecifických konjunkcií a disjunkcií nezávisia od pravdivostných hodnôt všetkých výrokov, z ktorých sa skladajú. Jeden z výrokov, ktoré tvoria takú konjunkciu (resp. disjunkciu) sa na jej pravdivostnej hodnote vôbec nepodieľa, je ‚absorbovaný'. Konkrétne:

$$\mathbf{A \wedge (A \vee B) \equiv A \vee (A \wedge B) \equiv A}$$

De Morganove zákony, pomenované podľa britského logika, ktorý ich sformuloval, dávajú konjunkciu a disjunkciu do vzťahu cez negáciu. Uvedieme ich tvar pre dvojčlennú konjunkciu a disjunkciu, ale keďže tieto operácie sú komutatívne a asociatívne, De Morganove zákony platia aj pre viac členov.

$$\mathbf{\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B}$$
$$\mathbf{\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B}$$

<u>Úlohy:</u>

1. Tabuľkovou metódou dokážte platnosť distributívneho zákona.

   a) Dokážte distributívnosť konjunkcie vzhľadom na disjunkciu.
   b) Dokážte distributívnosť disjunkcie vzhľadom na konjunkciu.

2. Dokážte platnosť zákona absorbcie.

   a) Dokážte tabuľkovou metódou ekvivalenciu $\mathbf{A \wedge (A \vee B) \equiv A}$.
   b) Pomocou distributívneho zákona dokážte ekvivalenciu $\mathbf{A \wedge (A \vee B) \equiv A \vee (A \wedge B)}$.

3. Dokážte platnosť De Morganových zákonov.

   a) Dokážte platnosť zákona pre negáciu konjunkcie.
   b) Dokážte platnosť zákona pre negáciu disjunkcie.

4. Vyjadrite...

   a) ...konjunkciu dvoch výrokov pomocou disjunkcie a negácie.
   b) ...disjunkciu dvoch výrokov pomocou konjunkcie a negácie.

IMPLIKÁCIA

Implikáciou nazývame každý výrok v tvare „ak **A**, potom **B**.“ Výrok **A** potom nazývame **antecedentom** a výrok **B** **konzekventom** tejto implikácie. Implikácia hovorí, že ak platí antecedent, tak platí aj konzekvent. Preto ak je antecedent aj konzekvent pravdivý, aj celá implikácia je pravdivá. Ak je antecedent pravdivý a konzekvent nepravdivý, implikácia je nepravdivá. Implikácia nič nehovorí o situácii, keď je antecedent nepravdivý – v takom prípade ju teda považujeme za pravdivú bez ohľadu na pravdivostnú hodnotu konzekventa. Implikáciu, ktorej antecedentom je **A** a konzekventom je **B**, zapisujeme $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$. Operátor $\Rightarrow$ nazývame **implikátor**.

Tabuľka pravdivostných hodnôt implikácie vyzerá takto:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

tab. 3 – implikácia

Výmenu antecedenta a konzekventa nazývame **obrátením** implikácie, t.j. $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$ je **obrátená** implikácia k $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$. Výmenu členov implikácie a ich negovanie nazývame **obmenením** implikácie, t.j. $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ je **obmenená** implikácia k $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$. Kým medzi pôvodnou a obrátenou implikáciou nie je žiaden významný vzťah (tzn. že implikácia nie je komutatívna), obmenená implikácia je s pôvodnou ekvivalentná: $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A})$.

<u>Úlohy:</u>

1. Len s použitím konjunkcie, disjunkcie a negácie vyjadrite:

   a) Implikáciu.
   b) Negáciu implikácie.

2. Dokážte, že obmenená implikácia je ekvivalentná s pôvodnou.

3. Nech platí implikácia $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$. Čo môžeme povedať o pravdivostnej hodnote...

   a) ...výroku **Q**, ak platí **P**?
   b) ...výroku **Q**, ak neplatí **P**?
   c) ...výroku **P**, ak platí **Q**?
   d) ...výroku **P**, ak neplatí **Q**?

4. Aká je pravdivostná hodnota výroku **A**, ak platia nasledujúce implikácie?

   a) $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}$
   b) $\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$
   c) $\neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}$

5. Čo môžeme povedať o pravdivostnej hodnote implikácie $\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S}$, ak vieme, že...

   a) ...platí **R**?
   b) ...neplatí **R**?
   c) ...platí **S**?
   d) ...neplatí **S**?

6. Rozhodnite, či je implikácia...

   a) ...asociatívna ($\mathbf{(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}$).
   b) ...distributívna vzhľadom na seba ($\mathbf{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}$).

7. Dokážte, že implikácia je distributívna vzhľadom na...

   a) ...konjunkciu ($\mathbf{A \Rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)}$)
   b) ...disjunkciu ($\mathbf{A \Rightarrow (B \vee C) \equiv (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)}$)

8. Rozhodnite, či je...

   a) ...konjunkcia distributívna vzhľadom na implikáciu.
   b) ...disjunkcia distributívna vzhľadom na implikáciu.

9. Majme výrok v tvare „Ak **A**, tak ak **B**, tak **C**." Zmení sa jeho význam, ak zameníme poradie podmienok **A** a **B**?

10. Preformulujte výrok z predchádzajúcej úlohy na výrok s ním ekvivalentný tak, aby obsahoval len jednu implikáciu.

11. Dokážte nasledujúce ekvivalencie:

    a) $\mathbf{(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)}$
    b) $\mathbf{(A \vee B) \Rightarrow C \equiv (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)}$

12. Preformulujte konjunkciu $\mathbf{(A \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow D) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)}$ na implikáciu tak, aby sa nezmenil význam výroku.

MATERIÁLNA EKVIVALENCIA

Materiálnou ekvivalenciou dvoch výrokov **A**, **B** nazývame výrok v tvare „**A** práve vtedy, keď **B**." Na rozdiel od logickej ekvivalencie, ktorá vyjadruje, že dva výroky majú vždy, za každého stavu vecí rovnakú pravdivostnú hodnotu, lebo tvrdia to isté, materiálna ekvivalencia vyjadruje, že dva výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu za daného stavu vecí. Materiálna ekvivalencia nesleduje štruktúru týchto výrokov, len ich pravdivostnú hodnotu. Materiálna ekvivalencia dvoch výrokov je teda pravdivá, ak sú oba tieto výroky pravdivé, alebo sú oba nepravdivé. V opačnom prípade je nepravdivá. Ak sú dva výroky logicky ekvivalentné, sú aj materiálne ekvivalentné. Nemusí to však platiť naopak. Materiálnu ekvivalenciu dvoch výrokov **A**, **B** zapisujeme **A** $\Leftrightarrow$ **B**. Operátor $\Leftrightarrow$ nazývame **ekvivalentor**. Pokiaľ bude z kontextu zrejmé, že sa nehovorí o logickej ekvivalencii, ďalej už budeme namiesto „materiálna ekvivalencia" písať len „ekvivalencia."

Tabuľka pravdivostných hodnôt ekvivalencie vyzerá takto:

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

tab. 4 – ekvivalencia

Ako napovedá aj symbol pre ekvivalentor, ekvivalencia je v logike chápaná ako obojsmerná implikácia, pretože platí $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A})$.

Úlohy:

1. Dokážte, že platí $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A})$.

2. Rozhodnite, či je ekvivalencia komutatívna.

3. Rozhodnite, či je ekvivalencia reflexívna.

4. Vyjadrite ekvivalenciu ako...

   a) ...konjunkciu disjunkcií
   b) ...disjunkciu konjunkcií
   c) ...implikáciu

5. Vyjadrite negáciu ekvivalencie ako...

   a) ...konjunkciu disjunkcií
   b) ...disjunkciu konjunkcií
   c) ...implikáciu

6. Rozhodnite, či je ekvivalencia distributívna vzhľadom na...

   a) ...konjunkciu.
   b) ...disjunkciu.
   c) ...implikáciu.
   d) ...seba.

7. Rozhodnite, či...

   a) ...je konjunkcia distributívna vzhľadom na ekvivalenciu.
   b) ...je disjunkcia distributívna vzhľadom na ekvivalenciu.
   c) ...je implikácia distributívna vzhľadom na ekvivalenciu.

8. Aký je vzťah medzi pravdivostnými hodnotami výroku **A** a ekvivalencie **A** $\Leftrightarrow$ **B**, ak...

   a) ...je výrok **B** pravdivý?
   b) ...je výrok **B** nepravdivý?

9. Dokážte, že ekvivalencia je asociatívna.

10. Zistite, ako závisí pravdivostná hodnota viacčlennej ekvivalencie od pravdivostných hodnôt jej členov.

11. Majme viacčlennú ekvivalenciu (s ľubovoľným počtom členov). Ako bude vyzerať jej tabuľka pravdivostných hodnôt?

12. Majme formulu $\neg$**(A** $\Leftrightarrow$ **B)**, čiže negáciu ekvivalencie **A** $\Leftrightarrow$ **B**. Ako sa zmení význam tejto formuly, ak v jej zápise odoberieme zátvorky?

TAUTOLÓGIA

Tautológiou nazývame každú formulu, ktorá je pravdivá pri ľubovoľnom dosadení pravdivostných hodnôt za premenné. Všimnime si, že všetky logické ekvivalencie, ktoré sme doposiaľ dokazovali, sa stanú tautológiami, ak v nich logickú ekvivalenciu vymeníme za materiálnu. Preto sa pojmy logická ekvivalencia a materiálna ekvivalencia väčšinou nerozlišujú, respektíve sa ľubovoľne zamieňajú a hovorí sa jednoducho „ekvivalencia“. Ak logické zákony, ktoré majú formu logickej ekvivalencie upravíme na formuly výmenou logickej ekvivalencie za materiálnu, môžeme povedať, že všetky logické zákony sú tautológiami. Azda najjednoduchšou tautológiou je **zákon vylúčenia tretieho**, nazývaný tiež „**tretie nie je dané**“ (z latinského pomenovania „**tertium non datur**“), symbolicky zapísaný $\mathbf{A \vee \neg A}$. Tento zákon vyjadruje základný princíp klasickej logiky – každý výrok je buď pravdivý, alebo je pravdivá jeho negácia, a žiaden iný prípad nemôže nastať.

V ďalších úlohách budeme vo formulách popri premenných používať aj konštantu **1** (pravda), ktorá reprezentuje konštantne pravdivú formulu, čiže ľubovoľnú tautológiu.

<u>Úlohy:</u>

1. O nasledujúcich formulách rozhodnite, či sú tautológiami.

   a) $\mathbf{A \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg (A \vee B)}$
   b) $\mathbf{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}$
   c) $\mathbf{Q \Rightarrow Q}$
   d) $\mathbf{X \vee (Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Z)}$
   e) $\mathbf{\neg A \Leftrightarrow \neg A}$
   f) $\mathbf{\neg (A \Leftrightarrow \neg A)}$
   g) $\mathbf{J \vee (\neg J \wedge (K \vee L)) \vee \neg (K \Rightarrow L)}$
   h) $\mathbf{(C \Rightarrow D) \vee (D \Rightarrow C)}$
   i) $\mathbf{X \vee (X \Leftrightarrow Y)}$
   j) $\mathbf{A \vee B \vee (A \Leftrightarrow B)}$

KONTRADIKCIA A SPLNITEĽNOSŤ

Kontradikciou (protirečením) nazývame každú výrokovú formulu, ktorá je <u>ne</u>pravdivá pri ľubovoľnom dosadení pravdivostných hodnôt za premenné. Bez ohľadu na to, aké výroky dosadíme za výrokové premenné do takejto formuly, propozícia vzniknutého výroku nebude môcť byť splnená – preto tiež hovoríme, že takáto formula je **nesplniteľná**. Naopak, o formule, ktorá je pravdivá pri aspoň jednom dosadení pravdivostných hodnôt za premenné, hovoríme, že je **splniteľná**. Každá tautológia je teda tiež splniteľnou formulou.

Asi najjednoduchšou kontradikciou je formula $\mathbf{A \wedge \neg A}$. To, že táto formula je pri každom dosadení nepravdivá vyjadruje aj **zákon sporu**, ktorý má tvar $\mathbf{\neg (A \wedge \neg A)}$. Zákon sporu vyjadruje jeden zo základných princípov klasickej logiky, a to, že nemôže naraz platiť výrok aj jeho negácia.

V ďalších úlohách budeme používať aj konštantu **0** (nepravda), ktorá reprezentuje konštantne nepravdivú formulu, čiže ľubovoľnú kontradikciu.

Úlohy:

1. Vysvetlite, prečo...

   a) ...negáciou každej tautológie je kontradikcia.
   b) ...negáciou každej netautologickej splniteľnej formuly je tiež netautologická splniteľná formula.

2. O každej z týchto formúl rozhodnite, či je splniteľná:

   a) $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$
   b) $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B})$
   c) $(\neg \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \wedge (\neg \mathbf{R} \vee \neg \mathbf{P}) \wedge \mathbf{P}$
   d) $(\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{Y}) \Leftrightarrow (\mathbf{X} \Leftrightarrow \neg \mathbf{Y})$
   e) $(\mathbf{A} \Rightarrow \neg \mathbf{A})$
   f) $(\mathbf{A} \Rightarrow \neg \mathbf{A}) \wedge (\neg \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A})$
   g) $(\mathbf{A} \Rightarrow \neg \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$

NORMÁLNE TVARY

Aplikovaním rôznych pravidiel, ako sú napr. De Morganove zákony, či distributívny zákon, sa dá každá formula upravovať na iné, s pôvodnou ekvivalentné formuly. Preto aj dve ekvivalentné formuly môžu mať celkom iný zápis. Je teda užitočné zaviesť určité tzv. **normálne tvary**, na ktoré sa dá každá formula upraviť. Úprava dvoch formúl na ten istý normálny tvar nám napríklad často umožní už zo zápisu vyčítať, či sú ekvivalentné, alebo nie.

Hovoríme, že formula je v **konjunktívnom normálnom tvare** práve vtedy, ak je konjunkciou, ktorej každým členom je disjunkcia a členmi každej z týchto disjunkcií sú len výrokové premenné a ich negácie. Všimnite si, že každú premennú môžeme považovať aj za jednočlennú konjunkciu, resp. disjunkciu, preto aj formuly $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ sú v konjunktívnom normálnom tvare.

Hovoríme, že formula je v **disjunktívnom normálnom tvare** práve vtedy, ak je disjunkciou, ktorej každým členom je konjunkcia pozostávajúca len z výrokových premenných a ich negácií.

Hovoríme, že formula je v **negačnom normálnom tvare** práve vtedy, keď neobsahuje iné operátory ako konjunktor, disjunktor a negátor a operandom každého negátora je len výroková premenná, a nie iná operácia.

Každá formula je ekvivalentná s nejakými formulami v konjunktívnom, disjunktívnom a negačnom normálnom tvare (teda sa na ne dá ekvivalentnými úpravami previesť). Formula môže byť naraz vo viacerých normálnych tvaroch, a tiež nemusí byť v žiadnom z nich.

Úlohy:

1. O každej z nasledujúcich formúl určte, v akých je normálnych tvaroch.

   a) $\mathbf{A}$
   b) $\neg\mathbf{A} \lor \neg\mathbf{B}$
   c) $\mathbf{A} \land (\mathbf{B} \lor (\mathbf{C} \land \mathbf{D}))$
   d) $(\mathbf{A} \land \mathbf{B}) \lor \neg(\mathbf{C} \land \mathbf{D})$
   e) $\neg\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{C})$

2. Ak je formula $\boldsymbol{\varphi}$ v konjunktívnom, alebo disjunktívnom normálnom tvare, tak je aj v negačnom normálnom tvare. Vysvetlite, prečo.

3. Upravte nasledujúce formuly na konjunktívny normálny tvar.

   a) $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \land (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$
   b) $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \lor \mathbf{C})$
   c) $\neg(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$
   d) $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$
   e) $\neg(\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B})$
   f) $\mathbf{P} \lor (\mathbf{Q} \land \mathbf{R})$
   g) $(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}) \lor (\mathbf{R} \land \mathbf{S})$
   h) $(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{R} \land \mathbf{S})$
   i) $\neg(\mathbf{X} \land \neg\mathbf{Y} \land \mathbf{Z})$
   j) $\neg((\mathbf{X} \lor \neg\mathbf{Y}) \land \mathbf{Z})$

4. Upravte nasledujúce formuly na disjunktívny normálny tvar.

   a) $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$
   b) $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D})$
   c) $\neg\ (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$
   d) $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$
   e) $\neg(\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B})$
   f) $\mathbf{P} \land (\mathbf{Q} \lor \mathbf{R})$
   g) $(\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \land (\mathbf{R} \lor \mathbf{S})$
   h) $(\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{R} \lor \mathbf{S})$
   i) $\neg(\mathbf{X} \lor \mathbf{Y} \lor \neg\mathbf{Z})$
   j) $\neg((\mathbf{X} \land \mathbf{Y}) \lor \neg\mathbf{Z})$

5. Upravte nasledujúce formuly na negačný normálny tvar.

   a) $\neg(\mathbf{A} \land \mathbf{B})$
   b) $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$
   c) $\neg(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$
   d) $\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}$
   e) $\neg(\neg\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q})$
   f) $\neg\neg(\neg\mathbf{X} \land \mathbf{Y})$

VYPLÝVANIE A ÚSUDOK

Hovoríme, že formula ψ **vyplýva** z formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ práve vtedy, keď pri každom dosadení pravdivostných hodnôt, pri ktorom sa z formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ stanú pravdivé výroky, sa aj z ψ stane pravdivý výrok. Inak povedané, formula ψ vyplýva z formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ práve vtedy, keď formula $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ je tautológia.

To, že formula ψ vyplýva z formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, zapisujeme v tvare $\varphi_1; \varphi_2; \ldots; \varphi_n \vdash \psi$.

Úsudkovou formou nazývame každú funkciu z nejakej množiny formúl $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ na nejakú formulu ψ. Formuly $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ potom nazývame jej **premisami** a formulu ψ **záverom**. Inštancie úsudkovej formy, ktoré vzniknú dosadením konkrétnych výrokov do výrokových premenných, nazývame **úsudkami**.

Úsudkové formy a úsudky budeme zapisovať ako postupnosti premís a záveru pod seba, kde záver bude oddelený vodorovnou čiarou.

O úsudkovej forme hovoríme, že je **pravidlom správneho usudzovania** práve vtedy, ak jej záver vyplýva z premís.

Úlohy:

1. O nasledujúcich úsudkových formách rozhodnite, či sú pravidlami správneho usudzovania.

   a) $$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \\ \hline A \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{l} A \\ \hline A \wedge B \end{array}$$

   d) $$\begin{array}{l} A \\ \hline A \vee B \end{array}$$

2. O každom z nasledujúcich úsudkov zistite, podľa akej úsudkovej formy bol utvorený a rozhodnite, či táto úsudková forma je pravidlom správneho usudzovania.

   a) Ak sa mi bude táto skladba páčiť, kúpim si aj album.
   Ak si kúpim album, celý si ho vypočujem.
   Ak sa mi bude táto skladba páčiť, vypočujem si celý album.

b) Ak je sedem racionálne číslo, tak je aj reálne číslo.
Sedem nie je reálne číslo.
Sedem nie je racionálne číslo.

c) Na raňajky zjem chlieb, alebo ovocie.
Zjem chlieb.
Nezjem ovocie.

d) Na raňajky zjem chlieb, alebo ovocie.
Nezjem chlieb.
Zjem ovocie.

e) Ak si kúpim letenku, budem môcť letieť do zahraničia.
Ak dostanem víza, budem môcť letieť do zahraničia.
Kúpim si letenku.
Dostanem víza.

f) Pôjdem peši.
Pôjdem peši, alebo pôjdem peši a potom autobusom.

g) Nebo je modré.
Nebo nie je modré.
Ruže sú červené.

h) Pôjdem do divadla.
Pôjdem do kina, alebo nepôjdem do kina.

RIEŠENIA ÚLOH

VÝROK

1. a) Opytovacia veta sa na stav vecí pýta, nepopisuje ho. Teda nie je výrokom.
   b) Táto veta je výrokom. Je pravdivá pre človeka, ktorý sa nachádza na Zemi, nepravdivá pre človeka, ktorý ju vyslovuje na inej planéte.
   c) Podobne ako opytovacie, ani rozkazovacie vety nepopisujú stav vecí a nie sú výrokmi.
   d) Nielen gramatické vety môžu byť výrokmi. Uvedená rovnosť vyjadruje z matematiky známu skutočnosť, teda je to pravdivý výrok.
   e) Rovnica by mohla byť pravdivým aj nepravdivým výrokom, podľa toho, aké číslo by sme dosadili za premennú x. Avšak bez dosadenia hodnoty za premennú nevieme určiť platnosť, či neplatnosť rovnosti. Teda nejde o výrok.
   f) Toto súvetie nevyjadruje stav vecí priamo, ale v závislosti od nejakej podmienky. Stále však vieme určiť jeho pravdivostnú hodnotu podľa pravdivostných hodnôt jeho dvoch zložiek, preto aj tu ide o výrok.
   g) Hoci si samo protirečí, aj toto súvetie je výrokom. Protirečenie však spôsobuje, že nikdy nenastane taký stav vecí, aký výrok popisuje, a teda ide o výrok vždy nepravdivý.
   h) Tento výraz nadobúda rôznu hodnotu podľa toho, kto ho vysloví. Jeho hodnotou je však vždy nejaké mesto, nie pravdivostná hodnota, preto to nie je výrok.

NEGÁCIA

1. Ak je výrok **A** negáciou výroku **B**, znamená to, že výroky **A** a **B** tvrdia presný opak. To však znamená aj to, že výrok **B** je negáciou výroku **A**, teda uvedené tvrdenie platí. Precíznejšie zdôvodnenie by mohlo vyzerať takto: Ak **A** je ekvivalentné s $\neg \mathbf{B}$, potom musia byť ekvivalentné aj ich negácie, teda $\neg \mathbf{A} \equiv \neg\neg \mathbf{B}$. Zo zákona dvojitej negácie však vieme, že platí $\neg\neg \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}$, takže $\neg \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

2. a) Tieto dva výroky síce nemôžu byť naraz pravdivé, ale môžu byť naraz nepravdivé, a to napríklad vtedy, keď mám hnedé oči. Preto nie sú kontradiktorické. O takejto dvojici výrokov hovoríme, že sú **kontrárne**.
   b) Podobne ako v predchádzajúcom prípade, aj tu ide len o kontrárne výroky, pretože žiaden z nich nezahŕňa možnosť, že by som išiel niekam inam, ako k lekárovi.
   c) Uvedené výroky tvrdia presný opak, a teda sú kontradiktorické.
   d) V tomto prípade nie je nikde zahrnutý prípad, že by niektorí ľudia žili na Zemi a niektorí nie. Opäť teda ide len o kontrárne výroky.
   e) Táto dvojica výrokov je kontradiktorická.
   f) Keďže medzi číslami 1 a 2 nie sú iné prirodzené čísla, tieto dva výroky sa úplne vylučujú, a teda sú kontradiktorické.
   g) Dané dve nerovnosti nie sú kontradiktorické. Opačný operátor k $>$ je totiž $\leq$, opačný operátor k $<$ je $\geq$.

3. a) Pridáme k slovesu časticu ‚nie'. *Táto budova nie je najvyššou stavbou v meste.*
   b) Odstránime zo slovesa predponu záporu ‚ne'. *Vlk patrí medzi bylinožravce.*
   c) Tu musíme okrem odstránenia predpony ‚ne' navyše vymeniť zámeno ‚nikde' za ‚niekde'. *Niekde v týchto novinách vidím ten článok, čo som hľadal.*

d) K ‚aspoň jedno‘ môžeme urobiť negáciu v tvare ‚najviac nula‘, čo vieme vyjadriť elegantnejšie zámenom ‚žiadne‘. *Žiadne slovenské mesto nemá viac ako 100 000 obyvateľov.*
e) Ak nie je pravda, že niečo platí pre každého, znamená to, že to pre niekoho neplatí. Preto vymeníme spojenie ‚každý vodič‘ za ‚niektorí vodiči‘ a nahradíme sloveso jeho antonymom. *Niektorí vodiči si nemusia zapnúť bezpečnostný pás.*
f) Negáciou rovnosti je nerovnosť. $3 \cdot 7 \neq 21.$
g) Ak 5 nie je menšie, ani rovné 20, potom musí byť väčšie. $5 > 20.$

KONJUNKCIA

1. a) Tento výrok sa skladá z dvoch výrokov spojených spojkou ‚a‘, teda je konjunkciou.
   b) Aj keď na prvý pohľad tu spojka ‚a‘ nespája dva výroky, ide len o stručnejšie, v bežnej reči používanejšie vyjadrenie konjunkcie „Jano študuje v Banskej Bystrici a Fero študuje v Banskej Bystrici.“
   c) Hoci sa tento výrok podobá na výrok b), nedávalo by zmysel, keby sme ho preformulovali na „Jano sa včera stretol a Fero sa včera stretol.“ Preto tento výrok nie je konjunkciou.

2. Aby bola konjunkcia pravdivá, musia byť pravdivé oba jej členy. Preto výroky **P**, **Q** sú určite pravdivé.

3. a) Ak je **R** pravdivý, potom sú pravdivé oba výroky a teda aj celá konjunkcia. Ak je **R** nepravdivý, potom konjunkcia nemôže byť pravdivá, a teda je nepravdivá. Preto pravdivostná hodnota celej konjunkcie je rovná pravdivostnej hodnote výroku **R**.
   b) Keďže **S** je nepravdivý, už nemôžu byť obe zložky konjunkcie pravdivé, a preto je celá konjunkcia nepravdivá.

4. Pravdivostná hodnota výroku $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \dots$, t.j. výpovede, kde výrok **A** zopakujeme niekoľkokrát, je rovnaká, ako pravdivostná hodnota výroku **A**. Zdôvodnenie: Ak **A** je pravdivý, celá konjunkcia sa skladá z pravdivých výrokov a je pravdivá. Naopak, ak **A** je nepravdivý, konjunkcia sa skladá zo samých nepravdivých výrokov a je teda tiež nepravdivá. Keďže platí $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ hovoríme, že konjunkcia je **idempotentná**.

5. Nezmení, pretože pre konjunkciu platí komutatívny zákon, t.j. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$. Ľahko sa to dá zdôvodniť pohľadom na tabuľku a zistením, že v druhom a treťom riadku, t.j. v tých riadkoch, kde sú pravdivostné hodnoty **A, B** navzájom vymenené, má konjunkcia rovnakú pravdivostnú hodnotu.

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

6.

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

DISJUNKCIA

1. Disjunkcia dvoch výrokov je pravdivá aj v prípade, keď sú oba pravdivé. Avšak revízor chce povedať, že buď zaplatíte pokutu, alebo pôjdete na súd, ale určite nie oboje.

2. a) Aby bola disjunkcia pravdivá, musí byť aspoň jeden výrok pravdivý. Ak je teda **Q** pravdivý, celá disjunkcia bude pravdivá bez ohľadu na výrok **P**.
   b) Ak je výrok **P** pravdivý, bude aj celá disjunkcia pravdivá. Ak je **P** nepravdivý, potom sú nepravdivé obe zložky disjunkcie a teda aj samotná disjunkcia je nepravdivá. Pravdivostná hodnota disjunkcie je preto v tomto prípade rovná pravdivostnej hodnote výroku **P**.

3. a) Pravdivosť disjunkcie $\mathbf{R} \vee \mathbf{S}$ je zabezpečená pravdivosťou výroku **S**. O pravdivostnej hodnote výroku **R** teda nevieme vôbec nič; môže byť rovnako dobre pravdivý ako nepravdivý.
   b) Aby bola disjunkcia pravdivá, musí byť pravdivá aspoň jedna z jej zložiek. Ak je výrok **S** nepravdivý, výrok **R** musí byť pravdivý.

4.

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

5. a) Disjunkcia je komutatívna. Z druhého a tretieho riadka jej tabuľky pravdivostných hodnôt vidíme, že ak vymeníme pravdivostné hodnoty jej zložiek, hodnota celej disjunkcie zostane rovnaká.
   b) Disjunkcia je idempotentná. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, stačí sa nám pozrieť do tabuľky. V prvom riadku, kde sú oba jej operandy pravdivé, je aj celá

disjunkcia pravdivá. V poslednom riadku, kde sú oba jej operandy nepravdivé, je celá disjunkcia nepravdivá. Disjunkcia zložená z dvoch rovnakých výrokov má teda vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu ako tieto výroky.

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

VZŤAHY MEDZI KONJUNKCIOU A DISJUNKCIOU

1. a)

A	B	C	B ∨ C	A ∧ B	A ∧ C	A ∧ (B ∨ C)	(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

b)

A	B	C	B ∧ C	A ∨ B	A ∨ C	A ∨ (B ∧ C)	(A ∨ B) ∧ (A ∨ C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

2. a)

A	B	A ∨ B	A ∧ (A ∨ B)	A
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	0	0

b) Vďaka distributívnemu zákonu vieme, že $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$. Ďalej využijeme z predchádzajúcich úloh známu vlastnosť konjunkcie, idempotenciu. Tak môžeme eliminovať prvú konjunkciu: $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$. Spojením týchto dvoch ekvivalencií dostávame $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, čo sme chceli dokázať.

3. a)

A	B	¬A	¬B	A ∧ B	¬(A ∧ B)	¬A ∨ ¬B
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

b)

A	B	¬A	¬B	A ∨ B	¬(A ∨ B)	¬A ∧ ¬B
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

4. a) Podľa De Morganových zákonov platí $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$. Ak za **A** dosadíme $\neg\mathbf{A}$ a za **B** dosadíme $\neg\mathbf{B}$, dostaneme $\neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}) \equiv \neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\neg\mathbf{B}$. Túto ekvivalenciu odstránením dvojitých negácií upravíme na $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \equiv \neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$.
   b) Podobným postupom ako v a) získame $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \equiv \neg(\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$.

IMPLIKÁCIA

1. a) Podľa tabuľky je implikácia nepravdivá len vtedy, ak platí antecedent a neplatí konzekvent. Môžeme ju teda vyjadriť ako „nie je pravda, že platí antecedent a neplatí konzekvent", symbolicky zapísané $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$. Použitím De Morganových zákonov dostávame disjunkciu $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.
   b) Z predchádzajúcej úlohy vieme, že implikáciu $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ možno vyjadriť v tvare $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$. Negáciu implikácie teda získame aplikáciou zákona dvojitej negácie: $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$.

2. $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A} \equiv \neg\neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A} \equiv \neg(\neg\mathbf{B}) \vee \neg\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$. Využili sme vyjadrenie implikácie z úlohy 1 a), komutatívnosť disjunkcie a zákon dvojitej negácie.

3. a) Ak platí **P** aj $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$, musí platiť aj **Q** (vidíme to v prvom riadku tabuľky). Preto ak platí $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$, hovoríme tiež, že **P** je postačujúcou podmienkou pre **Q**.
   b) Antecedent neplatí, preto konzekvent môže mať ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu.
   c) Konzekvent platí, teda antecedent môže mať ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu.

d) Ak platí implikácia, ale neplatí konzekvent, nemôže platiť ani antecedent (podľa štvrtého riadku tabuľky). Ak platí **P** $\Rightarrow$ **Q**, potom **P** môže platiť len vtedy, keď platí aj **Q**. V tomto prípade hovoríme, že **Q** je nutnou podmienkou pre **P**.

4. a) Ak je antecedent ekvivalentný s konzekventom, a teda majú aj rovnaké pravdivostné hodnoty, implikácia je určite pravdivá (prvý a štvrtý riadok tabuľky).
   b) Túto implikáciu môžeme prečítať „Ak by aj platilo **A**, aj tak platí $\neg$**A**." Tak či tak musí platiť $\neg$**A**, t.j. výrok **A** musí byť nepravdivý. Dokonca tu platí ekvivalencia $\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{A}$.
   c) Analogicky ako v predchádzajúcej úlohe, platí $\neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$. Výrok **A** je teda pravdivý.

5. a) Ak platí **R** a platí **S**, platí aj **R** $\Rightarrow$ **S**. Ak platí **R** a neplatí **S**, neplatí ani **R** $\Rightarrow$ **S**. Preto v tomto prípade je pravdivostná hodnota celej implikácie rovnaká ako pravdivostná hodnota výroku **S**.
   b) Keďže neplatí antecedent, implikácia je určite pravdivá.
   c) Platí konzekvent, preto implikácia je pravdivá.
   d) Ak neplatí **S** a platí **R**, neplatí **R** $\Rightarrow$ **S**. Ak neplatí **S** a neplatí **R**, platí **R** $\Rightarrow$ **S**. V tomto prípade je teda pravdivostná hodnota celej implikácie opačná ako pravdivostná hodnota výroku **R**.

6. a) Implikácia nie je asociatívna, t.j. formuly $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C}$ a $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$ nie sú ekvivalentné. Rovnakú pravdivostnú hodnotu nenadobúdajú napríklad vtedy, keď sú všetky tri výroky **A**, **B**, **C** nepravdivé. V tomto prípade je totiž prvý výrok nepravdivý a druhý pravdivý.

A	B	C	A ⇒ B	B ⇒ C	(A ⇒ B) ⇒ C	A ⇒ (B ⇒ C)
0	0	0	1	1	0	1

   b) Zostavíme tabuľku pravdivostných hodnôt:

A	B	C	A ⇒ B	A ⇒ C	B ⇒ C	A ⇒ (B ⇒ C)	(A ⇒ B) ⇒ (A ⇒ C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

7. a) Využijeme vyjadrenie implikácie pomocou disjunkcie a distributívnosť disjunkcie vzhľadom na konjunkciu: $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \equiv \neg\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \equiv (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge$ $\wedge (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$.
   b) V dôkaze využijeme vyjadrenie implikácie pomocou disjunkcie a komutatívnosť, asociatívnosť a idempotenciu disjunkcie. $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \equiv \neg\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \equiv \neg\mathbf{A} \vee$ $\vee \mathbf{B} \vee (\mathbf{C} \vee \mathbf{C}) \equiv (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$

8. a) Konjunkcia nie je distributívna vzhľadom na implikáciu, teda neplatí ekvivalencia medzi formulami $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$ a $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$. Ak totiž neplatí výrok **A**, neplatí konjunkcia $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$, lebo **A** je jedným z jej členov. Avšak platí implikácia $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$, lebo jej antecedent je nepravdivý, keďže aj ten tvorí konjunkcia, ktorej jedným členom je **A**.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge (B \Rightarrow C)$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge C)$
0	0	1	1	0	0	0	1

b) Disjunkcia je distributívna vzhľadom na implikáciu. Na dôkaz použijeme tabuľku:

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee (B \Rightarrow C)$	$(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

9. Nezmení, t.j. platí $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}) \equiv \mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$. V dôkaze využijeme vyjadrenie implikácie pomocou disjunkcie a komutatívnosť a asociatívnosť disjunkcie.
$\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}) \equiv \mathbf{A} \Rightarrow (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \equiv \neg \mathbf{A} \vee (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \equiv \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \equiv$
$\equiv \neg \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{C} \equiv \neg \mathbf{B} \vee (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \equiv \neg \mathbf{B} \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}) \equiv \mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$

10. Výrok „Ak **A**, tak ak **B**, tak **C**.“ môžeme preformulovať tak, že podmienky **A** a **B** dáme do konjunkcie: „Ak **A** a **B**, tak **C**.“ Tieto dva výroky skutočne sú ekvivalentné. Dôkaz: $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}) \equiv \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \equiv \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \equiv (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C}$. Využili sme časť dôkazu z predchádzajúcej úlohy a De Morganov zákon pre negáciu konjunkcie.

11. a) V dôkaze využijeme vyjadrenie implikácie pomocou disjunkcie, De Morganov zákon pre negáciu konjunkcie, komutatívnosť, asociatívnosť a idempotenciu disjunkcie. $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C} \equiv \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \equiv \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \equiv \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B} \vee (\mathbf{C} \vee \mathbf{C}) \equiv$
$\equiv (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \vee (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$.

b) V tomto dôkaze využijeme vyjadrenie implikácie pomocou disjunkcie, De Morganov zákon pre negáciu disjunkcie a distributívnosť disjunkcie vzhľadom na konjunkciu. $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C} \equiv \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \equiv (\neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \equiv (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \equiv$
$(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$.

12. Spojením poznatkov z úloh 7 a 11 dostávame $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{D}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}) \wedge$
$\wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{D}) \equiv (\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})) \equiv (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$.

MATERIÁLNA EKVIVALENCIA

1.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

2. Ekvivalencia je komutatívna, pretože v druhom a treťom riadku jej tabuľky, teda v tých riadkoch, kde sú hodnoty jej členov navzájom vymenené, má rovnakú pravdivostnú hodnotu.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

3. Ekvivalencia je reflexívna, pretože v prvom a druhom riadku tabuľky, teda v tých riadkoch, kde sú hodnoty jej dvoch členov rovnaké, nadobúda pravdivostnú hodnotu **1**.

4. a) Do vyjadrenia ekvivalencie pomocou konjunkcie implikácií dosadíme vyjadrenie implikácie pomocou disjunkcie: $\mathbf{A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge}$ $\mathbf{\wedge (\neg B \vee A)}$.
   b) Ekvivalencia je pravdivá, ak sú oba jej členy pravdivé, alebo oba nepravdivé. Inak je nepravdivá. Preto $\mathbf{A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)}$.
   c) Využijeme predchádzajúcu úlohu, kde sme vyjadrili ekvivalenciu ako disjunkciu. Disjunkciu jednoducho upravíme na implikáciu. $\mathbf{A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)}$ $\mathbf{\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \wedge B) \equiv (A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)}$

5. a) Ekvivalencia je nepravdivá, ak je jeden z jej členov a pravdivý a druhý nepravdivý. Preto jej negáciu môžeme vyjadriť ako konjunkciu „Aspoň jeden z členov ekvivalencie je pravdivý a aspoň jeden je nepravdivý.“ $\mathbf{\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \vee B) \wedge}$ $\mathbf{\wedge (\neg A \vee \neg B)}$
   b) Riešenie je podobné ako v úlohe a), teraz však sformulujeme disjunkciu: „Prvý z členov ekvivalencie je pravdivý a druhý nepravdivý, alebo je prvý nepravdivý a druhý pravdivý.“ $\mathbf{\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)}$
   c) Implikáciu utvoríme z disjunkcie z predchádzajúcej úlohy.
   $\mathbf{\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \wedge B) \equiv}$ $\mathbf{\equiv (\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)}$.

6. a) Logická ekvivalencia $\mathbf{A \Leftrightarrow (B \wedge C) \equiv (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C)}$ neplatí. Ak napríklad neplatí **A**, neplatí **B**, ale platí **C**, prvý z výrokov je pravdivý, ale druhý je nepravdivý.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow C$	$A \Leftrightarrow (B \wedge C)$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C)$
0	0	1	0	1	0	1	0

b) Ekvivalencia nie je distributívna ani vzhľadom na disjunkciu. Ak neplatia výroky **A**, **B,** ale platí výrok **C**, tak neplatí **A** $\Leftrightarrow$ **(B** $\vee$ **C)**, ale platí **(A** $\Leftrightarrow$ **B)** $\vee$ **(A** $\Leftrightarrow$ **C)**.

A	B	C	B $\vee$ C	A $\Leftrightarrow$ B	A $\Leftrightarrow$ C	A $\Leftrightarrow$ (B $\vee$ C)	(A $\Leftrightarrow$ B) $\vee$ (A $\Leftrightarrow$ C)
0	0	1	1	1	0	0	1

c) Ekvivalencia nie je distributívna vzhľadom na implikáciu. Ak napríklad neplatí ani jeden z výrokov **A**, **B**, **C**, tak je výrok **A** $\Leftrightarrow$ **(B** $\Rightarrow$ **C)** nepravdivý, avšak výrok **(A** $\Leftrightarrow$ **B)** $\Rightarrow$ **(A** $\Leftrightarrow$ **C)** je pravdivý.

A	B	C	A $\Leftrightarrow$ B	A $\Leftrightarrow$ C	B $\wedge$ C	A $\Leftrightarrow$ (B $\wedge$ C)	(A $\Leftrightarrow$ B) $\wedge$ (A $\Leftrightarrow$ C)
0	0	1	1	0	0	1	0

d) Ekvivalencia nie je distributívna ani vzhľadom na seba. Ak sú napríklad všetky tri výroky **A**, **B**, **C** nepravdivé, tak je výrok **A** $\Leftrightarrow$ **(B** $\Leftrightarrow$ **C)** nepravdivý, ale výrok **(A** $\Leftrightarrow$ **B)** $\Leftrightarrow$ **(A** $\Leftrightarrow$ **C)** je pravdivý.

A	B	C	A $\Leftrightarrow$ B	B $\Leftrightarrow$ C	A $\Leftrightarrow$ C	A $\Leftrightarrow$ (B $\Leftrightarrow$ C)	(A $\Leftrightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ (A $\Leftrightarrow$ C)
0	0	0	1	1	1	0	1

7. a) Konjunkcia nie je distributívna vzhľadom na ekvivalenciu. Ak sú napríklad výroky **A**, **B**, **C** nepravdivé, tak neplatí **A** $\wedge$ **(B** $\Leftrightarrow$ **C)**, ale platí **(A** $\wedge$ **B)** $\Leftrightarrow$ **(A** $\wedge$ **C)**.

A	B	C	B $\Leftrightarrow$ C	A $\wedge$ B	A $\wedge$ C	A $\wedge$ (B $\Leftrightarrow$ C)	(A $\wedge$ B) $\Leftrightarrow$ (A $\wedge$ C)
0	0	0	1	0	0	0	1

b) Disjunkcia je distributívna vzhľadom na ekvivalenciu.

A	B	C	B $\Leftrightarrow$ C	A $\vee$ B	A $\vee$ C	A $\vee$ (B $\Leftrightarrow$ C)	(A $\vee$ B) $\Leftrightarrow$ (A $\vee$ C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1

c) Implikácia je distributívna vzhľadom na ekvivalenciu.

A	B	C	$B \Leftrightarrow C$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

8. a) Ak je výrok **B** pravdivý, potom je ekvivalencia $A \Leftrightarrow B$ pravdivá vtedy a len vtedy, keď je pravdivý výrok **A**. Ekvivalencia výroku **A** s pravdivým výrokom má teda rovnakú pravdivostnú hodnotu ako výrok **A**.
   b) Riešenie je podobné ako v predchádzajúcej podúlohe. Ekvivalencia výroku **A** s nepravdivým výrokom má opačnú pravdivostnú hodnotu ako výrok **A**.

9.

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow C$	$B \Leftrightarrow C$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

10. Majme viacčlennú ekvivalenciu $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow \ldots$. Predpokladajme, že je prvý výrok pravdivý. Ak je aj druhý výrok pravdivý, ich ekvivalencia je stále pravdivá. Ak je aj tretí výrok pravdivý, ekvivalencia je stále pravdivá. Ak však narazíme na nepravdivý výrok, budeme mať ekvivalenciu medzi pravdou a nepravdou, čiže nepravdu. Ak bude ďalší výrok pravdivý, znova budeme mať ekvivalenciu medzi pravdou a nepravdou. Až keď narazíme na ďalší nepravdivý výrok, dostaneme ekvivalenciu medzi nepravdou a nepravdou, čiže pravdu. Analogická úvaha platí, ak je prvý výrok nepravdivý. Vidíme teda, že každý nepravdivý člen ekvivalencie zmení jej pravdivostnú hodnotu na opačnú. Preto je viacčlenná ekvivalencia pravdivá, ak je párny počet jej členov nepravdivých. Viacčlenná ekvivalencia je nepravdivá, ak je nepárny počet jej členov nepravdivých.

11. Úvahu začneme s dvojčlennou ekvivalenciou. Obsahuje štyri prípady, v ktorých ekvivalencia nadobúda hodnoty **1**, **0**, **0**, **1**. Teraz na začiatok tabuľky pridajme tretiu premennú. Počet prípadov sa zdvojnásobí. V prvých štyroch prípadoch bude tretia premenná pravdivá, v posledných štyroch nepravdivá. Podľa úlohy 7. ekvivalencia výroku s pravdou zachová pravdivostnú hodnotu tohto výroku, preto v prvých štyroch prípadoch ekvivalencia opäť nadobudne hodnoty **1**, **0**, **0**, **1**. Ekvivalencia s nepravdou však zmení pravdivostnú hodnotu výroku na opačnú, preto v posledných štyroch riadkoch tabuľky bude mať ekvivalencia hodnoty **0**, **1**, **1**, **0**. Pridaním každej ďalšej premennej sa bude diať

to isté – v tabuľke sa zdvojnásobí počet riadkov, prvá polovica si zachová svoje pravdivostné hodnoty a druhá polovica bude obsahovať postupne negácie hodnôt z prvej polovice. Ekvivalencia teda bude nadobúdať hodnoty: **1**, **0**, **0**, **1**, **0**, **1**, **1**, **0**, **0**, **1**, **1**, **0**, **1**, **0**, **0**, **1**, **0**, **1**...

12. Namiesto tvrdenia „Nie je pravda, že **A** má rovnakú pravdivostnú hodnotu ako **B**“, čiže „**A** má opačnú pravdivostnú hodnotu ako **B**“ dostaneme tvrdenie „**A** má rovnakú pravdivostnú hodnotu ako negácia **B**“, čo je to isté. Platí $\neg(\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}) \equiv \neg\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$, a teda odobratím zátvoriek v zápise takejto formuly sa jej význam nezmení.

TAUTOLÓGIA

1. a) Keď upravíme posledný člen disjunkcie De Morganovými zákonmi, dostaneme formulu $\mathbf{A} \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$. Distributívnym zákonom ‚vyberieme pred zátvorku‘ $\neg\mathbf{A}$ a dostaneme $\mathbf{A} \vee (\neg\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B}))$. Vieme, že $\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B}$ je tautológia a že pravdivostná hodnota konjunkcie, ktorej jeden člen je určite pravdivý, je rovná pravdivostnej hodnote druhého člena. Preto môžeme $\neg\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B})$ upraviť na $\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{1}$, čiže $\neg\mathbf{A}$. Dostaneme $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$, čo je tautológia, a teda aj pôvodná formula bola tautológia.
   b) Z druhých dvoch členov disjunkcie vidíme, že ak neplatí **P**, celý výrok bude pravdivý bez ohľadu na to, či platí **Q**. No podľa prvého člena ak platí **P**, tak musí platiť aj **Q**, aby bol výrok pravdivý. Ak teda dosadíme za premennú **P** pravdivý výrok a za **Q** nepravdivý výrok, celý výrok vzniknutý z tejto formuly bude nepravdivý, a preto táto formula nie je tautológia.
   c) Stačí nahradiť implikáciu jej vyjadrením pomocou disjunkcie a dostaneme $\neg\mathbf{Q} \vee \mathbf{Q}$, takže táto formula je tautológia.
   d) Z druhého a tretieho člena disjunkcie distributívnym zákonom vyberieme pred zátvorku **Z**. Dostaneme $\mathbf{X} \vee (\mathbf{Z} \wedge (\mathbf{Y} \vee \neg\mathbf{Y})) \vee (\neg\mathbf{X} \wedge \neg\mathbf{Z})$. Keďže $\mathbf{Y} \vee \neg\mathbf{Y}$ je tautológia, môžeme celý výraz $\mathbf{Z} \wedge (\mathbf{Y} \vee \neg\mathbf{Y})$ nahradiť formulou $\mathbf{Z} \wedge \mathbf{1}$, a to premennou **Z**. Tým upravíme formulu na tvar $\mathbf{X} \vee \mathbf{Z} \vee (\neg\mathbf{X} \wedge \neg\mathbf{Z})$. Využitím De Morganových zákonov upravíme tretí člen disjunkcie a vďaka asociatívnemu zákonu ozátvorkujeme prvé dva: $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \vee \neg(\mathbf{X} \vee \mathbf{Z})$. To je tautológia, preto aj pôvodná formula musela byť tautológiou.
   e) Každá formula je ekvivalentná sama so sebou, preto aj toto je tautológia.
   f) Tento zápis môžeme prečítať „Nie je pravda, že formula je ekvivalentná so svojou negáciou“, čo samozrejme platí. Teda aj tu ide o tautológiu.
   g) Na prvé dva členy disjunkcie aplikujeme distributívny zákon, čím získame formulu $((\mathbf{J} \vee \neg\mathbf{J}) \wedge (\mathbf{J} \vee (\mathbf{K} \vee \mathbf{L}))) \vee \neg(\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{L})$. Vieme, že $\mathbf{J} \vee \neg\mathbf{J}$ je tautológia, takže pravdivostná hodnota celej konjunkcie je rovná hodnote jej druhého člena. Máme teda $((\mathbf{J} \vee (\mathbf{K} \vee \mathbf{L}))) \vee \neg(\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{L})$, po odstránení nadbytočných zátvoriek a úprave negácie implikácie na konjunkciu dostávame $\mathbf{J} \vee \mathbf{K} \vee \mathbf{L} \vee (\mathbf{K} \wedge \neg\mathbf{L})$. Použijeme znova distributívny zákon na členy **L** a $(\mathbf{K} \wedge \neg\mathbf{L})$, čím získame formulu $\mathbf{J} \vee \mathbf{K} \vee ((\mathbf{L} \vee \mathbf{K}) \wedge (\mathbf{L} \vee \neg\mathbf{L}))$. Tautológiu $\mathbf{L} \vee \neg\mathbf{L}$ môžeme znova z konjunkcie vylúčiť. Tým upravíme formulu na tvar $\mathbf{J} \vee \mathbf{K} \vee ((\mathbf{L} \vee \mathbf{K}))$. Odstránime zátvorky a keďže disjunkcia je idempotentná, môžeme odstrániť aj jednu premennú **K**, ktorá sa v tejto disjunkcii vyskytuje dvakrát. Dostaneme disjunkciu $\mathbf{J} \vee \mathbf{K} \vee \mathbf{L}$, ktorá nie je tautológiou, lebo ak za všetky tri premenné **J**, **K**, **L** dosadíme nepravdivý výrok, aj z celej formuly vznikne nepravdivý výrok. Teda ani pôvodná formula nie je tautológia.

h) Nahradíme implikácie ich vyjadreniami pomocou disjunkcie, čím dostaneme formulu $(\neg \mathbf{C} \vee \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{D} \vee \mathbf{C})$. S využitím komutatívneho a asociatívneho zákona ju môžeme upraviť na tvar $(\mathbf{C} \vee \neg \mathbf{C}) \vee (\mathbf{D} \vee \neg \mathbf{D})$, čo je disjunkcia dvoch tautológií, ktorá je teda tiež tautológiou.

i) Nahradíme ekvivalenciu jej vyjadrením pomocou disjunkcie konjunkcií. Dostaneme formulu $\mathbf{X} \vee ((\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y}))$, po odstránení nadbytočných zátvoriek asociatívnym zákonom $\mathbf{X} \vee (\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y})$. Disjunkcia $\mathbf{X} \vee (\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y})$ je podľa zákona absorpcie ekvivalentná s **X**, čím dostaneme $\mathbf{X} \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y})$. Distributívnym zákonom to upravíme na konjunkciu $(\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{X}) \wedge (\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{Y})$, a odstránením tautológie $\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{X}$ dostaneme disjunkciu $\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{Y}$, ktorá zjavne nie je tautológiou, lebo dosadením nepravdy za **X** a pravdy za **Y** vznikne nepravdivý výrok. Preto ani pôvodná formula nebola tautológiou.

j) Disjunkcia prvých dvoch členov je nepravdivá len v prípade, že neplatí ani **A**, ani **B**. V tomto prípade je však pravdivá ekvivalencia, ktorá je tretím členom tejto disjunkcie. Preto formula je pravdivá pri ľubovoľnom dosadení pravdivostných hodnôt za premenné, a teda je tautológiou.

KONTRADIKCIA A SPLNITEĽNOSŤ

1. a) Tautológia je formula, ktorá má v tabuľke pravdivostných hodnôt v každom riadku hodnotu **1**. Jej negácia má v každom riadku tabuľky opačnú hodnotu, teda hodnotu **0**. To však znamená, že je nepravdivá pri ľubovoľnom dosadení pravdivostných hodnôt za premenné, a teda ide o kontradikciu.

   b) Splniteľná formula, ktorá nie je tautológiou, má v niektorých riadkoch tabuľky pravdivostných hodnôt hodnotu **0** a v niektorých **1**. Negovaním tejto formuly sa hodnoty vymenia – tam, kde bola **0**, bude **1** a naopak. Potom však zase bude v niektorých riadkoch **0** a v niektorých **1**, teda znova pôjde o netautologickú splniteľnú formulu.

2. a) Stačí, aby bol výrok **B** pravdivý, a obe disjunkcie budú pravdivé, a teda bude platiť aj celá konjunkcia. Preto táto formula je splniteľná.

   b) Použitím De Morganových zákonov dostaneme $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \neg (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, čo je zjavne kontradikcia.

   c) Z prvého a druhého člena konjunkcie $(\neg \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \wedge (\neg \mathbf{R} \vee \neg \mathbf{P}) \wedge \mathbf{P}$ vyberieme pred zátvorku $\neg \mathbf{P}$ a dostaneme $(\neg \mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R})) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \wedge \mathbf{P}$. Znova použijeme distributívny zákon na prvý a tretí člen konjunkcie, čím dostaneme formulu $((\mathbf{P} \wedge \neg \mathbf{P}) \vee (\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R}))) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ a keďže $\mathbf{P} \wedge \neg \mathbf{P}$ je kontradikcia, vieme to upraviť na $(\mathbf{0} \vee (\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R}))) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$. Využijeme to, že disjunkcia nejakého výroku s nepravdou je ekvivalentná s týmto výrokom a odstránime nadbytočné zátvorky, čím prvý člen upravíme na $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R})$. Celú formulu teda upravíme na $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R}) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$. Preskupením zátvoriek vďaka asociatívnemu zákonu dostaneme $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R}) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$. Použitím De Morganových zákonov na tretí člen tejto disjunkcie dostaneme $\neg(\mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R})$, teda celá formula bude mať tvar $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R}) \wedge \neg(\mathbf{Q} \wedge \neg \mathbf{R})$. Druhý a tretí člen tejto konjunkcie si protirečia, máme teda $\mathbf{P} \wedge \mathbf{0}$, čiže konjunkciu s kontradikciou, a to je tiež kontradikcia. Pôvodná formula teda nie je splniteľná.

   d) Výrok **X** je buď ekvivalentný s **Y**, alebo s $\neg \mathbf{Y}$, ale nie naraz. Preto tvrdenie, že $\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{Y}$ práve vtedy, keď $\mathbf{X} \Leftrightarrow \neg \mathbf{Y}$ je určite nepravdivé, a teda daná formula je nesplniteľná.

e) Keď nahradíme implikáciu jej vyjadrením pomocou disjunkcie, dostaneme $\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$, z toho vďaka idempotencii $\neg\mathbf{A}$, čo je zjavne splniteľná formula, lebo platí, keď je výrok **A** nepravdivý. Preto aj pôvodná formula je splniteľná.

f) Táto konjunkcia implikácií je vlastne vyjadrením ekvivalencie $\mathbf{A} \Leftrightarrow \neg\mathbf{A}$, ktorá je nesplniteľná, keďže žiaden výrok nie je ekvivalentný so svojou negáciou.

g) Ak druhú implikáciu obmeníme na $(\neg\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A})$, dostaneme formulu $(\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B}) \wedge \wedge (\neg\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A})$, čo je vyjadrenie ekvivalencie $\mathbf{A} \Leftrightarrow \neg\mathbf{B}$ pomocou konjunkcie implikácií, ktorá je splnená vtedy, ak výroky **A**, **B** majú opačnú pravdivostnú hodnotu. Teda aj pôvodná formula je splniteľná.

NORMÁLNE TVARY

1. a) Túto formulu môžeme považovať za jednočlennú konjunkciu jednočlennej disjunkcie s premennou **A**, alebo tiež za jednočlennú disjunkciu jednočlennej konjunkcie s premennou **A**. Preto je v konjunktívnom, aj disjunktívnom normálnom tvare. Keďže neobsahuje žiadne negátory, tým skôr neobsahuje žiadne negátory pred inými operáciami a je aj v negačnom normálnom tvare.

   b) Podobne ako v predchádzajúcom prípade, aj táto formula je vo všetkých troch normálnych tvaroch. Môžeme ju chápať ako jednočlennú konjunkciu dvojčlennej disjunkcie, alebo ako dvojčlennú disjunkciu jednočlenných konjunkcií. Negátory má len priamo pred premennými.

   c) Uvedená formula nemôže byť v konjunktívnom normálnom tvare, lebo členy takej konjunkcie by museli byť disjunkcie pozostávajúce len z premenných a ich negácií, ale tu disjunkcia obsahuje ako svoj člen ďalšiu konjunkciu $\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$. Nie je ani v disjunktívnom normálnom tvare, lebo aj keby sme ju vnímali ako jednočlennú disjunkciu, tak jej členom by musela byť konjunkcia pozostávajúca len z premenných a ich negácií, avšak druhým členom konjunkcie je disjunkcia $\mathbf{B} \vee (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$. Je však v negačnom normálnom tvare, keďže ani neobsahuje žiadne negátory.

   d) Formula $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \neg(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ nie je v žiadnom z troch spomínaných normálnych normálnych tvaroch. Nemôže byť v konjunktívnom normálnom tvare, lebo ak by sme ju chápali ako jednočlennú konjunkciu dvojčlennej disjunkcie, tak členmi tejto disjunkcie by mohli byť len premenné a ich negácie a v tomto prípade sú jej členmi konjunkcia $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ a negácia konjunkcie $\neg(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$. Nie je ani v disjunktívnom normálnom tvare, pretože by muselo ísť o disjunkciu ktorej členmi sú len konjunkcie, avšak tu je jedným z členov negácia konjunkcie. Nakoniec, nie je v negačnom normálnom tvare, pretože obsahuje negáciu konjunkcie, pričom formuly v negačnom normálnom tvare môžu obsahovať len negácie jednotlivých premenných.

   e) Daná formula nie je v konjunktívnom, disjunktívnom, ani negačnom normálnom tvare, pretože formuly ani v jednom z nich nesmú obsahovať implikáciu, ani ekvivalenciu.

2. Ak je formula v konjunktívnom, alebo disjunktívnom normálnom tvare, je to vlastne konjunkcia disjunkcií (resp. disjunkcia konjunkcií), kde každým členom vnútornej operácie (či už je to konjunkcia, alebo disjunkcia) sú len premenné a ich negácie. Teda formuly v konjunktívnom a disjunktívnom majú negátory len pred premennými a neobsahujú iné operátory než konjunktor, disjunktor a negátor, čo sú práve požiadavky na negačný normálny tvar.

3. a) Stačí nahradiť implikácie ich vyjadrením pomocou disjunkcie: $(\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge$ $\wedge (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{C})$. Táto formula je konjunkciou disjunkcií, ktorých členmi sú len premenné a ich negácie, teda je v konjunktívnom normálnom tvare.
   b) Aj v tomto prípade stačí nahradiť implikáciu disjunkciou: $\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$. Táto formula síce neobsahuje konjunktor, ale môžeme ju chápať ako jednočlennú konjunkciu, ktorej jediným členom je disjunkcia pozostávajúca len z premenných a ich negácií.
   c) Formula v konjunktívnom normálnom tvare nesmie obsahovať implikáciu. Najjednoduchší spôsob, ako ju odstrániť, je využiť negátor pred ňou, pretože negácia implikácie je konjunkcia antecedenta s negáciou konzekventa: $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B}$.
   d) Vieme, že ekvivalencia je vlastne konjunkcia dvoch implikácií, a tieto implikácie nám stačí vyjadriť pomocou disjunkcie:
   $(\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}) \equiv (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{A})$
   e) Ak neplatí ekvivalencia $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$, musí byť jeden z dvoch členov tejto ekvivalencie pravdivý a jeden nepravdivý. Keďže ide len o dvojčlennú ekvivalenciu, nič nepokazíme, ak namiesto ‚jeden' povieme ‚aspoň jeden', čiže použijeme disjunkciu. Takto dostaneme konjunkciu dvoch disjunkcií, čiže formulu v konjunktívnom normálnom tvare: $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B})$.
   f) Táto formula je zrejme v disjunktívnom normálnom tvare. Výmenu postavenia konjunkcie a disjunkcie môžeme ľahko dosiahnuť použitím distributívneho zákona:
   $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$.
   g) Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, aj tu úprava na konjunktívny normálny tvar vyžaduje distributívny zákon, ibaže bude o niečo zložitejšia.
   $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{R} \wedge \mathbf{S}) \equiv ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}) \wedge ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee \mathbf{S}) \equiv ((\mathbf{P} \vee \mathbf{R}) \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})) \wedge$ $\wedge ((\mathbf{P} \vee \mathbf{S}) \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{S})) \equiv (\mathbf{P} \vee \mathbf{R}) \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{S}) \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{S})$
   h) Najprv potrebujeme odstrániť implikáciu tým, že ju nahradíme jej vyjadrením pomocou disjunkcie: $\neg(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{R} \vee \mathbf{S})$. Negáciu disjunkcie vyjadríme pomocou De Morganových zákonov ako konjunkciu negácií a pokračujeme použitím distributívneho a asociatívneho zákona, aby nám vznikla konjunkcia trojčlenných disjunkcií: $(\neg \mathbf{P} \wedge \neg \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{R} \vee \mathbf{S}) \equiv (\neg \mathbf{P} \vee (\mathbf{R} \vee \mathbf{S})) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee (\mathbf{R} \vee \mathbf{S})) \equiv$ $(\neg \mathbf{P} \vee \mathbf{R} \vee \mathbf{S}) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \vee \mathbf{S})$.
   i) Negáciu konjunkcie vieme pomocou De Morganových zákonov ľahko previesť na disjunkciu: $\neg(\mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \equiv \neg \mathbf{X} \vee \mathbf{Y} \vee \neg \mathbf{Z}$. Keďže túto formulu môžeme chápať ako jednočlennú konjunkciu trojčlennej disjunkcie, je v konjunktívnom normálnom tvare.
   j) Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, negáciu konjunkcie potrebujeme upraviť na konjunkciu. Najlepší spôsob, ako odstrániť negátor pred zátvorkou, je použiť De Morganove zákony: $\neg((\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}) \equiv \neg(\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{Y}) \vee \neg \mathbf{Z}$. Tým sme však dostali disjunkciu, ktorá nie je v konjunktívnom normálnom tvare, pretože jeden z jej členov je negácia disjunkcie, a nie premenná, ani negácia premennej. Použijeme teda De Morganove zákony ešte raz, aby sme negáciu disjunkcie upravili na konjunkciu. Dostaneme formulu $(\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \neg \mathbf{Z}$. Táto formula už je v disjunktívnom normálnom tvare. Na konjunktívny normálny tvar ju upravíme pomocou distributívneho zákona: $(\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \neg \mathbf{Z} \equiv (\neg \mathbf{X} \vee \neg \mathbf{Z}) \wedge (\mathbf{Y} \vee \neg \mathbf{Z})$.

4. a) Implikáciu stačí nahradiť jej vyjadrením pomocou disjunkcie. $\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.
   b) Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, aj tu musíme nahradiť implikácie ich vyjadrením pomocou disjunkcie. $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}) \equiv \neg(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}) \equiv$ $\neg (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{C} \vee \mathbf{D}) \equiv (\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B}) \vee \neg \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$. Táto formula je disjunkciou,

ktorej členy sú konjunkcie len premenných a ich negácií ($\neg$**C**, **D** tu považujeme za jednočlenné konjunkcie), takže je v disjunktívnom normálnom tvare.

c) Negáciu implikácie nám stačí preformulovať na konjunkciu: $\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. Môžeme ju chápať ako jednočlennú disjunkciu dvojčlennej konjunkcie, teda je v disjunktívnom normálnom tvare.

d) Ekvivalencia je pravdivá, ak oba jej členy platia, alebo oba neplatia. Môžeme ju teda zapísať v disjunktívnom normálnom tvare takto: $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$.

e) Dvojčlenná ekvivalencia je nepravdivá, ak jeden z jej členov platí a druhý nie, alebo naopak. Preto ju môžeme zapísať v tvare $(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, čo je disjunktívny normálny tvar.

f) Táto formula je v konjunktívnom normálnom tvare, potrebujeme teda vymeniť postavenie konjunkcie a disjunkcie, čo dosiahneme aplikovaním distributívneho zákona: $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$

g) Tak, ako v predchádzajúcej úlohe, aj tu budeme musieť využiť distributívny zákon: $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{R} \vee \mathbf{S}) \equiv ((\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{R}) \vee ((\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{S}) \equiv ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})) \vee$ $\vee ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{S}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{S})) \equiv (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}) \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{S}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{S})$.

h) Implikáciu nahradíme jej vyjadrením pomocou disjunkcie. Ide vlastne o kratší variant úlohy b). $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{R} \vee \mathbf{S}) \equiv \neg(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{R} \vee \mathbf{S}) \equiv (\neg\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}) \vee \mathbf{R} \vee \mathbf{S}$.

i) Potrebujeme odstrániť negátor pred zátvorkou, preto použijeme De Morganove zákony: $\neg(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y} \vee \neg\mathbf{Z}) \equiv \neg\mathbf{X} \wedge \neg\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$. Výsledkom je síce konjunkcia, ale keďže obsahuje len premenné a ich negácie, môžeme ju vnímať ako jednočlennú disjunkciu trojčlennej konjunkcie, preto je v disjunktívnom normálnom tvare.

j) Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, aj tu musíme použiť De Morganove zákony na odstránenie negátora pred zátvorkou. $\neg((\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \neg\mathbf{Z}) \equiv \neg(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \wedge \neg\neg\mathbf{Z}$. Táto konjunkcia však zjavne nie je v konjunktívnom normálnom tvare. Potrebujeme použiť De Morganove zákony ešte raz, aby sme negáciu konjunkcie upravili na disjunkciu, a potom musíme distributívnym zákonom vymeniť postavenie konjunkcie a disjunkcie:
$\neg(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \wedge \neg\mathbf{Z} \equiv (\neg\mathbf{X} \vee \neg\mathbf{Y}) \wedge \neg\mathbf{Z} \equiv (\neg\mathbf{X} \wedge \neg\mathbf{Z}) \vee (\neg\mathbf{X} \wedge \neg\mathbf{Z})$

5. a) Negátor potrebujeme ‚zatlačiť do vnútra‘ tejto konjunkcie, na čo použijeme De Morganove zákony: $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \equiv \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$.

b) Negačný normálny tvar nemôže obsahovať implikátor, musíme ho vymeniť za disjunktor: $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.

c) V tomto prípade musíme odstrániť negátor pred zátvorkou, aj implikátor v nej. Vieme to však urobiť naraz, tým, že vyjadríme negáciu implikácie ako konjunkciu. $\neg(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$.

d) Táto formula vôbec neobsahuje negátory, ale aby bola v negačnom normálnom tvare, musíme ekvivalenciu vyjadriť len pomocou konjunkcie a disjunkcie. $\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q} \equiv$ $\equiv (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\neg\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})$.

e) „Nie je pravda, že negácia **P** je ekvivalentná s **Q**“ znamená, že **P** je ekvivalentné s **Q**, teda riešenie je rovnaké, ako v predchádzajúcej úlohe: $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\neg\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})$.

f) Pre úpravu na negačný normálny tvar musíme odstrániť negátor pred zátvorkou, no keďže sú dva, môžeme jednoducho použiť zákon dvojitej negácie: $\neg\neg(\neg\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \equiv$ $\equiv \neg\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$.

VYPLÝVANIE A ÚSUDOK

1. a) Táto úsudková forma je pravidlom správneho usudzovania. Ak je pravdivá implikácia a jej antecedent, potom musí byť pravdivý aj jej konzekvent. Ukážeme, že formula $(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})) \Rightarrow \mathbf{B}$, t.j. implikácia z konjunkcie premís tohto úsudku na jeho záver je tautológia: $(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})) \Rightarrow \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \wedge (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \Rightarrow \mathbf{B} \equiv ((\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \Rightarrow \mathbf{B} \equiv (\mathbf{0} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \Rightarrow \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{B} \equiv (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}) \vee \mathbf{B} \equiv \neg\mathbf{A} \vee (\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{B}) \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$. Ako jedno zo základných pravidiel usudzovania v logike má táto úsudková forma aj svoje pomenovanie – **modus ponens**.

   b) Existuje také dosadenie pravdivostných hodnôt do premenných, že obe premisy budú pravdivé a záver nepravdivý, a to napr. keď neplatí **A** a platí **B**. Preto záver nevyplýva z premís a daná úsudková forma nie je pravidlom správneho usudzovania.

A	B	A ⇒ B	B	A
0	1	1	1	0

   c) Ani táto úsudková forma nie je pravidlom správneho usudzovania. To, že platí výrok **A**, ešte nemusí znamenať, že platí celá konjunkcia $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, pretože výrok **B** nemusí byť pravdivý.

A	B	A	A ∧ B
1	0	1	0

   d) Ak platí výrok **A**, potom zjavne platí aspoň jeden z dvojice výrokov **A**, **B**, preto ide o pravidlo správneho usudzovania. Dôkaz: $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \neg\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{B} \equiv \mathbf{1} \vee \mathbf{B} \equiv \mathbf{1}$.

2. a) Dosadením výroku „Táto skladba sa mi bude páčiť“ za premennú **A**, výroku „Kúpim si celý album“ za premennú **B** a výroku „Vypočujem si celý album“ za **C** vznikol tento úsudok z úsudkovej formy

$$\begin{array}{c}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}\\ \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}\\ \hline \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}\end{array}$$

   Táto úsudková forma je pravidlom správneho usudzovania a nazýva sa **hypotetický sylogizmus**. Vyjadruje vlastne fakt, že implikácia je tranzitívna. Dôkaz:
   $((\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})) \Rightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}) \equiv \neg((\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})) \vee (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \equiv$
   $\equiv (\neg(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee \neg(\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})) \vee \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C} \equiv (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$
   $\equiv \neg\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \vee (\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \equiv ((\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \wedge (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})) \vee$
   $\vee ((\mathbf{C} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{C})) \equiv (\mathbf{1} \wedge (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})) \vee ((\mathbf{C} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{1}) \equiv$
   $\equiv (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}) \vee (\mathbf{C} \vee \mathbf{B}) \equiv \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{B} \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B} \equiv$
   $\equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$.

b) Tento úsudok vznikol z úsudkovej formy nazývanej **modus tollens**, ktorá má tvar:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{A \Rightarrow B}\\ \mathbf{\neg B}\end{array}}{\mathbf{\neg A}}$$

Modus tollens je pravidlom správneho usudzovania. Dôkaz: $\mathbf{((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A \equiv \neg((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \vee \neg A \equiv (\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg\neg B) \vee \neg A \equiv ((A \wedge \neg B) \vee B) \vee \neg A \equiv (A \wedge \neg B) \vee B \vee \neg A \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A) \equiv (A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg B \wedge A) \equiv (A \wedge \neg B) \vee \neg(A \wedge \neg B) \equiv 1}$. Všimnime si, že aj pravidlo správneho usudzovania nás môže doviesť k nepravdivému záveru, ak je nepravdivá niektorá z premís. Avšak, keď sú všetky premisy pravdivé, pravidlo správneho usudzovania nám zaručuje, že aj záver bude pravdivý.

c) Úsudok bol vytvorený dosadením do úsudkovej formy

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{A \vee B}\\ \mathbf{A}\end{array}}{\mathbf{\neg B}}$$

Táto úsudková forma nie je pravidlom správneho usudzovania, pretože implikácia $\mathbf{((A \vee B) \wedge A) \Rightarrow \neg B}$ nie je tautológia. Je nepravdivá napríklad vtedy, keď sú oba výroky **A**, **B** pravdivé. Ak zjem chlieb, ešte to neznamená, že nezjem ovocie – môžem zjesť oboje. Disjunkcia totiž znamená, že platí aspoň jeden z dvoch výrokov, nie práve jeden.

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	$(A \vee B) \wedge A$	$((A \vee B) \wedge A) \Rightarrow \neg B$
1	1	1	0	1	0

d) Hoci sa podobá na úsudok z predchádzajúcej úlohy, tento úsudok je vytvorený z pravidla správneho usudzovania, ktoré má tvar:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{A \vee B}\\ \mathbf{\neg A}\end{array}}{\mathbf{B}}$$

Dôkaz: $\mathbf{((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B \equiv \neg((A \vee B) \wedge \neg A) \vee B \equiv (\neg(A \vee B) \vee A) \vee B \equiv \neg(A \vee B) \vee A \vee B \equiv \neg(A \vee B) \vee (A \vee B) \equiv 1}$

e) Úsudková forma, z ktorej bol tento úsudok vytvorený má tvar

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{A \Rightarrow C}\\ \mathbf{B \Rightarrow C}\\ \mathbf{A}\end{array}}{\mathbf{B}}$$

a nie je pravidlom správneho usudzovania. Implikácia z premís na záver, teda formula $\mathbf{((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge A) \Rightarrow B}$ nadobudne pravdivostnú hodnotu nepravda napríklad pri dosadení nepravdivého výroku do **B** a pravdivých výrokov do **A** a **C**.

A	B	C	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge$ $\wedge (B \Rightarrow C) \wedge A$	$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge$ $\wedge A) \Rightarrow B$
1	0	1	1	1	1	0

f) Tento úsudok bol vytvorený podľa pravidla správneho usudzovania, ktoré má tvar:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})}$$

To, že jeho záver vyplýva z premís, sa dá zdôvodniť zákonom absorpcie. Keďže platí $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, musí platiť $\mathbf{A} \Leftrightarrow (\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$, a teda aj $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$.

g) Úsudková forma v tejto úlohe sa nazýva **zákon Dunsa Scota** a má tvar:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \neg\mathbf{A}\end{array}}{\mathbf{B}}$$

Na prvý pohľad sa môže zdať, že nejde o pravidlo správneho usudzovania, pretože záver vôbec nesúvisí s premisami. No v skutočnosti zákon Dunsa Scota je pravidlom správneho usudzovania a vyjadruje, že z kontradikcie vyplýva čokoľvek. Dôkaz: $(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{B} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} \equiv \mathbf{1}$.

h) Daná úsudková forma je pravidlom správneho usudzovania. Má tvar

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B}}$$

a vyjadruje fakt, že tautológia vyplýva z čohokoľvek. Dôkaz: $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{B}) \equiv \equiv \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$. Každá tautológia dokonca vyplýva aj z prázdnej množiny premís, preto fakt, že nejaká formula $\boldsymbol{\varphi}$ je tautológia, môžeme zapísať v tvare $\vdash \boldsymbol{\varphi}$.

DODATOK – VLASTNOSTI OPERÁCIÍ A RELÁCIÍ

Logické spojky sú zvláštne tým, že ich môžeme považovať aj za operátory, aj za relácie, keďže ich oborom hodnôt je množina pravdivostných hodnôt. Preto v tejto zbierke skúmame rôzne ich vlastnosti, ktoré boli definované pre operácie, aj relácie. Táto kapitola obsahuje ich stručný prehľad.

OPERÁCIE

Nech $\bullet$ je symbolom nejakej operácie. Potom o tejto operácii hovoríme, že je...

...idempotentná práve vtedy, keď platí $\forall \mathbf{x}\textbf{:}\ \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

...komutatívna práve vtedy, keď platí $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}\textbf{:}\ \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$.

...asociatívna práve vtedy, keď platí $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\textbf{:}\ (\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = \mathbf{x} \bullet (\mathbf{y} \bullet \mathbf{z})$.

Nech $\bullet$ a $\square$ sú symboly nejakých operácií. Potom hovoríme, že prvá z týchto operácií je distributívna vzhľadom na druhú práve vtedy, keď platí:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\textbf{:}\ \mathbf{x} \bullet (\mathbf{y} \square \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}) \square (\mathbf{x} \bullet \mathbf{z})$$

RELÁCIE

Nech $\Re$ je symbolom nejakej relácie. Potom o tejto relácii hovoríme, že je...

...reflexívna práve vtedy, keď platí $\forall \mathbf{x}\textbf{:}\ \mathbf{x} \Re \mathbf{x}$.

...symetrická práve vtedy, keď platí $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}\textbf{:}\ \mathbf{x} \Re \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} \Re \mathbf{x}$.
Keďže logické spojky sú aj operátory, aj relácie, symetria je pre ne to isté, čo komutatívnosť.

...tranzitívna práve vtedy, keď platí $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\textbf{:}\ (\mathbf{x} \Re \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \Re \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \Re \mathbf{z}$.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

GAHÉR, F.: *Logika pre každého*. 3. doplnené vydanie. Bratislava : IRIS, 2003.

JAURIS, M.: *Logika pre 2. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl*.
Bratislava : SPN, 1969.

ŠVEJDAR, V.: *Logika*: *neúplnost, složitost a nutnost*. Praha : Academia, 2002.

Filit, otvorená filozofická encyklopédia.
Dostupné na: http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/

„The Logic Portal" in *Wikipedia, the Free Encyclopedia*.
Dostupné na http://en.wikipedia.org/wiki/Portal:Logic