Druhá písomka z ÚDDŠ, vzorové riešenia

1. [4b] Dokážte nasledovnú rovnosť

$$(A \div B) \div (A \cap B) = A \cup B.$$

   Riešenie:

   Z definície $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$
   Pomocou toho si ľavú stranu prepíšeme ako
   $((A - B) \cup (B - A)) \div (A \cap B) =$
   Z definície $A - B = A \cap \neg B$, preto
   $((A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B)) \div (A \cap B) =$
   $(((A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B)) - (A \cap B)) \cup ((A \cap B) - ((A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B))) =$
   $(((A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B)) \cap \neg (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \cap \neg ((A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B))) =$
   $(((A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B)) \cap (\neg A \cup \neg B)) \cup ((A \cap B) \cap ((\neg A \cup B) \cap (A \cup \neg B))) =$
   $\emptyset \cup (\neg A \cap B) \cup \emptyset \cup (A \cap \neg B) \cup ((A \cap B) \cap ((\neg A \cap \neg B) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B))) =$
   $(\neg A \cap B) \cup (A \cap \neg B) \cup \emptyset \cup (A \cap B) =$
   $(\neg A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap \neg B) \cup (A \cap B) =$
   $(B \cap (A \cup \neg A)) \cup (A \cap (B \cup \neg B)) =$
   $(A \cup B)$

2. [4b] Zistite, či relácia φ je na množine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ekvivalencia, ostré alebo neostré čiastočné usporiadanie alebo lineárne usporiadanie

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \varphi \text{ práve vtedy, keď } x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2.$$

   Riešenie:

   φ je **reflexívna**, pretože $x_1 \leq x_1 \wedge x_2 \leq x_2$
   φ je **antisymetrická**, pretože ak $x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$ a zároveň $y_1 \leq x_1 \wedge y_2 \leq x_2$, tak potom platí aj $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$
   φ je **tranzitívna**, pretože ak $x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$ a zároveň $y_1 \leq z_1 \wedge y_2 \leq z_2$, tak potom platí aj $x_1 \leq z_1 \wedge x_2 \leq z_2$
   φ **nie je trichotomická**, pretože napríklad pre dvojicu bodov $a_1 = [4, 7]$ a $a_2 = [7, 4]$ neplatí $(a_1, a_2) \in \varphi \vee (a_2, a_1) \in \varphi \vee a_1 = a_2$
   Z toho vyplýva, že je to **Neostré čiastočné usporiadanie**

3. [4b] Nájdite takú tranzitívnu reláciu R^+, ktorá má čo najmenej prvkov a pritom platí $R \subseteq R^+$, kde $R = \{(1, 2), (3, 4), (1, 4), (5, 1)\}$.

Riešenie:

Keďže $(5,1) \in R^+$ aj $(1,2) \in R^+$, musí aj $(5,2) \in R^+$.
Takisto keďže $(5,1) \in R^+$ aj $(1,4) \in R^+$, musí aj $(5,4) \in R^+$.
Pridaním týchto dvoch dvojíc sa relácia už stala tranzitívnou (už neexistujú také prvky x, y, z, že $(x,y) \in R^+ \wedge (y,z) \in R^+ \wedge (x,z) \notin R^+$)
Keďže tieto prvky sme museli pridať, kvôli tranzitívnosti a žiadne ďalšie sme nepridali, je naša relácia najmenšia možná. Čiže $R^+ = \{(1,2),(3,4),(1,4),(5,1),(5,2),(5,4)\}$

4. [4b] Nájdite rozklad (triedy ekvivalencie) množiny $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ podľa relácie definovanej nasledovne (pre $a, b \in A$): $(a,b) \in R$ práve vtedy, keď a, b sú rovnako vzdialené od najbližšieho prvočísla.

   Riešenie:

   V prvej triede ekvivalencie budú všetky čísla, ktorých vzdialenosť od najbližšieho prvočísla je 0, čiže samotné prvočísla $S_0 = \{2,3,5,7\}$
   V druhej budú čísla, ktorých vzdialenosť od najbližšieho prvočísla je 1, čo sú $S_1 = \{1,4,6,8,10\}$ (pozor, aj 11 je prvočíslo)
   V treťej budú čísla, ktorých vzdialenosť od najbližšieho prvočísla je 2, takže $S_2 = \{9\}$
   $S = \{\{2,3,5,7\},\{1,4,6,8\},\{9\}\}$

5. [1b] Nech A je množina, pre ktorú platí $|A| = n$ a nech X, Y sú podmnožiny. Koľko je usporiadaných dvojíc (X, Y) takých, že platí $|(X - Y) \cup (Y - X)| = 1$

   Riešenie:

   Danú podmienku si vieme prepísať ako $|(X \cup Y) - (X \cap Y)| = 1$, čo nám hovorí, že mimo prieniku X a Y sa nachádza práve jeden prvok, čiže jedna je podmnožinou druhej, ktorá má presne o 1 prvok viac.
   Najprv si vyberieme rozdielový prvok, na výber máme n možností.
   Zo zvyšných $n-1$ prvkov vyberieme ľubovoľnú podmnožinu, to máme 2^{n-1} možností
   Keďže nemáme povedané, ktorá z množín X, Y je väčšia, musíme každý prípad zarátať 2 razy
   Dokopy to je $n \cdot 2^{n-1} \cdot 2 = n \cdot 2^n$ usporiadaných dvojíc