Prvá písomka z UDDS, vzorové riešenia

1. [2b] Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí
$$9|[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3].$$

   Riešenie:

   1° $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$
   $9|36$

   IP: $9|[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3]$

   2° $9|[(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3]$
   $9|[(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + n^3 - n^3]$
   $9|[\underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{IP} + 9.(k^2 + 3.k + 3)]$

2. [3b] Nájdite všetky ohodnotenia, pre ktoré je nasledujúci výrok nepravdivý
$$\{A \to [(\neg B \vee C) \wedge D]\} \wedge [\neg D \to (\neg C \wedge A)].$$

   Riešenie: Úloha sa dala riešiť rôznymi spôsobmi. My si ukážeme jeden z nich.

   Daný výrok neplatí vtedy, ak aspoň jeden z výrokov $A \to [(\neg B \vee C) \wedge D]$ alebo $[\neg D \to (\neg C \wedge A)]$ neplatí.

   Pozrime sa, kedy neplatí prvý výrok $A \to [(\neg B \vee C) \wedge D]$. Keďže ide o implikáciu, výrok neplatí ak:

   – $p(A) = 1$ a
   – $p((\neg B \vee C) \wedge D) = 0$.
     * ak $p(D) = 0$, tak na ohodnotení výrokov B, C nezáleží
     * ak $p(D) = 1$, tak $p(\neg B \vee C)$ sa musí rovnať 0, čiže musí platiť, že $p(\neg B) = 0$ a $p(C) = 0$.

   Dokopy dostaneme, že výrok neplatí pre nasledovné ohodnotenia:

A	B	C	D
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0
1	1	0	1

Pozrime sa, kedy neplatí výrok $\neg D \rightarrow (\neg C \wedge A)$. Keďže ide o implikáciu, výrok neplatí ak:

- $p(\neg D) = 1$, čiže $p(D) = 0$ a
- $p(\neg C \wedge A) = 0$, čo nastáva v nasledovných prípadoch:
  * $p(\neg C) = 0$ a $p(A) = 0$
  * $p(\neg C) = 0$ a $p(A) = 1$
  * $p(\neg C) = 1$ a $p(A) = 0$
- výrok B môže mať ľubovolné ohodnotenie

Dokopy dostaneme, že výrok neplatí pre nasledovné ohodnotenia:

A	B	C	D
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0
0	1	0	0

Z predchádzajúcich dvoch tabuliek vidno, že dokopy existuje 9 rôznych ohodnotení, pre ktoré pôvodný výrok neplatí.

3. [2+2b] Vyjadrite

- spojku $\wedge$ pomocou spojok $\rightarrow$ a $\iff$,
- spojku $\vee$ pomocou spojok $\rightarrow$ a $\iff$.

Riešenie:

$$A \wedge B \equiv (A \rightarrow B) \iff A,$$

$$A \vee B \equiv (A \iff B) \rightarrow A.$$

Poznámka: Formula obsahujúca len binárne spojky $\rightarrow$ a $\iff$ je pravdivá pri pravdivostnom ohodnotení, v ktorom sú pravdivé všetky elementárne výroky. Formula $\neg A$ ale v tomto ohodnotení pravdivá nie je. Preto množina $\{\rightarrow, \iff\}$ netvorí úplný systém logických spojek.

4. [3b] Dokážte, že ak $6^x + 1$ je prvočíslo, tak potom $\sqrt{6^x + 5}$ nie je celé číslo.

   Riešenie: Dokážeme to sporom, predpokladajme, že $\sqrt{6^x + 5} = a \in \mathbb{Z}$ Potom platí nasledovné

   $$a^2 = 6^x + 5$$

   $$a^2 - 4 = 6^x + 1$$

   $$(a + 2) \cdot (a - 2) = 6^x + 1$$

   $6^x + 1$ môže byť za tejto podmienky prvočíslo iba ak $a = 3$, pre túto možnosť však $x \notin \mathbb{Z}$, preto je to SPOR.

   Poznámka: V zadaní chýba predpoklad $x \in \mathbb{Z}$, preto bolo za správne riešenie považované aj nájdenie protipríkladu $x = \log_6 4$.

5. [3b] Zistite, či je nasledovný výrok tautológia

   $$[(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)] \vee [(\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)] \vee [(\forall x)(A(x) \oplus B(x))].$$

   Ak áno, dokážte, ak nie, zostrojte kontrapríklad.

   Riešenie: Budeme dokazovať, že daný výrok je tautológia. Sporom – predpokladajme, že daný výrok nie je tautológia, a preto platí jeho negácia:

   $$[(\forall x)A(x) \wedge (\exists x)\neg B(x)] \wedge [(\exists x)A(x) \wedge (\forall x)\neg B(x)] \wedge [(\exists x)(A(x) \Leftrightarrow B(x))].$$

   $$(\forall x)A(x) \wedge (\exists x)\neg B(x) \wedge (\exists x)A(x) \wedge (\forall x)\neg B(x) \wedge [(\exists x)(A(x) \Leftrightarrow B(x))].$$

   Teraz môžeme použiť pravidlo generalizácie pre existenčné kvantifikátory (pre každý z nich treba použiť novú premennú).

   $$(\forall x)A(x) \wedge \neg B(x_1) \wedge A(x_2) \wedge (\forall x)\neg B(x) \wedge [(A(x_3) \Leftrightarrow B(x_3))].$$

   Ďalej použijeme pravidlo špecifikácie pre všeobecné kvantifikátory. Keďže sú to všeobecné kvantifikátory, tak ich vieme nahradiť ľubovolnou premennou. My si vyberieme premennú x_3, aby sme dostali spor.

   $$A(x_3) \wedge \neg B(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \neg B(x_3) \wedge [(A(x_3) \Leftrightarrow B(x_3))].$$

Dostali sme, že nasledovné výroky musia platiť naraz

$$A(x_3) \wedge \neg B(x_3) \wedge [(A(x_3) \Leftrightarrow B(x_3))].$$

$$A(x_3) \wedge \neg B(x_3) \wedge [(A(x_3) \Rightarrow B(x_3)) \wedge (B(x_3) \Rightarrow A(x_3))].$$

Lenže

$$A(x_3) \wedge \neg B(x_3) \Leftrightarrow [\neg(A(x_3) \Rightarrow B(x_3))].$$

Preto negácia výroku neplatí, čo je spor a znamená to, že pôvodný výrok je tautológia.