1 Goniometrické a iné funkcie

$x \cdot \alpha$	0	30	45	60	90	180
$x \cdot \beta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{1}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N/A	0
$\operatorname{ctg} x$	N/A	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	N/A

$$
\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \\
\sin x \pm \sin y &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \\
\cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \\
\cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \qquad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \sin^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \sinh 2x = 2 \cdot \sinh x \cosh x$$

2 Logaritmy

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x = \frac{\log_z x}{\log_z a}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad x = a^{\log_a x} \qquad x^a = e^{a \cdot \ln x}$$

3 Limity $(k \in \mathbb{R}, a > 1)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

3.1 Nedefinované limity

$$[0 \cdot (\pm\infty)] \qquad \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \qquad [\infty - \infty] \qquad \left[1^{\pm\infty}\right] \qquad \left[0^0\right] \qquad \left[+\infty^0\right]$$

3.2 Definované limity

$$[a \pm \infty = \pm\infty\,(a \in \mathbb{R})] \qquad [\pm\infty \pm \infty = \pm\infty] \qquad \left[\frac{1}{\pm\infty} = 0\right]$$

$$[\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty] \qquad \left[a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \mp\infty & a < 0 \end{cases}\right]$$

4 Derivácie

$$
\begin{aligned}
c' &= 0 \quad (c \in \mathbb{R}) \\
(c \cdot f)'(a) &= c \cdot f'(a) \quad (c \in \mathbb{R}) \\
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \\
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \frac{g'(a)}{g^2(a)} \quad (g(a) \neq 0) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \quad (g(a) \neq 0) \\
(h = g \circ f)\ h'(a) &= f'(a) \cdot g'(f(a))
\end{aligned}
$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (x > 0)$$

4.1 Derivácie inverznej funkcie

$f: M \to \mathbb{R}$ je prostá, diferencovateľná v $f^{-1}(a)$, $a \in f(M)$. Ak f^{-1} je v a spojitá, tak:

1. ak $f'(f^{-1}(a)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tak $\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$;
2. ak $f'(f^{-1}(a)) = 0$ a f je v bode $f^{-1}(a)$ rastúca, tak $\left(f^{-1}\right)'(a) = \infty$;
3. ak $f'(f^{-1}(a)) = 0$ a f je v bode $f^{-1}(a)$ klesajúca, tak $\left(f^{-1}\right)'(a) = -\infty$.

4.2 Leibnitzov vzorec

Nech $f, g: I \to \mathbb{R}$ sú n-krát dif. na I. Potom:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

4.3 Derivácie vyšších rádov

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} \cdot x^{m-n} & (n \le m;\ m \in \mathbb{N}) \\ 0 & (n > m;\ m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln^n a} \qquad (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$$

4.4 L'Hospitalovo pravidlo

Nech

1. funkcie f, g sú diferencovateľné v niektorom prstencovom okolí $P(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^*$;
2. $\forall x \in P(a) : g'(x) \neq 0$;
3. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ alebo $|\lim_{x\to a} g(x)| = +\infty$;
4. existuje vlastná alebo nevlastná $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5 Taylorove a MacLaurinove polynómy

Nech fcia f je n-krát dif. v $a \in \mathbb{R}$. Potom **Tay. pol. st. n fcie f v a** je pol. (v prem. x)

$$T_n(a) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ak $a = 0 \to$ MacLaurinov pol. Ak je fcia f n-krát dif. v $a \in \mathbb{R}$ a T_n je jej Tay. pol. st. n v a, tak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

5.1 Vybrané polynómy ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

5.2 Implikácie ($x \to 0,\ m, n \in \mathbb{N}$)

$$o(x^n) + o(x^n) \Rightarrow o(x^n) \qquad o(x^m) \Rightarrow o(x^n) \quad (\text{pre } m > n)$$

$$o^m(x^n) \Rightarrow o\left(x^{m\cdot n}\right) \qquad x^m \cdot o(x^n) \Rightarrow o\left(x^{m+n}\right)$$

$$o(x^m) \cdot o(x^n) \Rightarrow o\left(x^{m+n}\right)$$

5.3 Tvary zvyšku

Nech $f^{(n)}$ je spojitá v $O(a)$, nech $\forall x \in O(a) \setminus \{a\}\ \exists$ vlastná $f^{(n+1)}$. Nech T_n je TP funkcie f stupňa n v bode a. Potom

1. Lagrangeov tvar zvyšku: $\forall x \in O(a),\ x > a$ $(x < a)$ $\exists \vartheta(x) \in (a, x)$ $(\vartheta(x) \in (x, a))$ také, že

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

2. Cauchyho tvar zvyšku: $\forall x \in O(a),\ x > a$ $(x < a)$ $\exists \vartheta(x) \in (a, x)$ $(\vartheta(x) \in (x, a))$ také, že

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{n!}(x-a)(x-\vartheta(x))^n$$

6 Neurčitý integrál

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int e^x\ dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\ dx = -\ln|\cos x| + C$$

6.1 Metóda rozkladu

$$\int (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n))dx = c_1 \int f_1(x)dx + \cdots + c_n \int f_n(x)dx$$

6.2 Metóda substitúcie

$$\int g(x)\ dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \left| \begin{array}{c} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int f(t)\ dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$$

6.3 Metóda per partes

$$\int u'(x)v(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\ dx$$

6.4 Integrovanie racionálnych funkcií

1.
$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

2. $n \in \mathbb{N}, n > 1$
$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

3.
$$\int \frac{Mt+N}{t^2+r} dx = \begin{cases} N \int \frac{dt}{t^2+r} = \frac{N}{\sqrt{r}} \text{arctg}\, \frac{t}{\sqrt{r}} + C \\ \text{pre } M = 0 \\ \\ \frac{M}{2} \int \frac{2t\ dt}{t^2+r} + N \int \frac{dt}{t^2+r} = \\ = \frac{M}{2} \ln(t^2+r) + \frac{N}{\sqrt{r}} \text{arctg}\, \frac{t}{\sqrt{r}} + C \\ \text{pre } M \neq 0 \end{cases}$$

4.
$$\int \frac{Mt+N}{(t^2+r)^n} dx = \begin{cases} N \int \frac{dt}{(t^2+r)^n} \text{ pre } M = 0, \text{ rekurentne} \\ \\ \frac{M}{2} \int \frac{2t\ dt}{(t^2+r)^n} + N \int \frac{dt}{(t^2+r)^n} = \\ = \frac{M}{2(1-n)} \frac{1}{(t^2+r)^{n-1}} + N \int \frac{dt}{(t^2+r)^n} \\ \text{pre } M \neq 0, \text{ rekurentne} \end{cases}$$

6.5 Goniometrické substitúcie

6.5.1 Substitúcia tg $x = t$ (párne moc. sin, cos; tg)

$$\text{tg}\, x = t \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

6.5.2 Univerzálna substitúcia tg $\frac{x}{2} = t$

$$\text{tg}\, \frac{x}{2} = t \qquad dx = \frac{2\ dt}{1+t^2} \qquad x \neq (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

7 Určitý integrál

7.1 Newton-Leibnizov vzorec

Nech fcia f je R-integrovateľná na $[a,b]$ a má na (a,b) primitívnu fciu F, pričom existujú konečné $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) \quad \left(\text{označ. } [F(x)]_a^b\right)$$

špeciálne, ak $f \in R[a,b]$ a F je primitívna fcia k fcii f na $[a,b]$, tak

$$dx = F(b) - F(a)$$

7.2 Metóda substitúcie

f je spojitá, φ spojite diferencovateľná, $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt$$

7.3 Metóda per partes

Fcie f, g majú R-integrovateľné derivácie definované na $[a,b]$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

7.4 Integrál ako funkcia hornej (dolnej) hranice

Nech $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ je spojitá, φ, ψ sú dif. na I a nech $\varphi(I) \subset [c,d]$, $\psi(I) \subset [c,d]$. Potom fcia $G : I \to \mathbb{R}$; $G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\ dt$ je dif. na I a $G'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$

7.5 Aplikácie určitého integrálu

7.5.1 Plocha ohraničená krivkami

Nech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sú spojité a $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)$. Potom plošným obsahom množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ je číslo

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\ dx$$

7.5.2 Objem rotač. telesa; dĺžka, plocha rotač. krivky

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx \qquad V_y = \pi \int_a^b x^2 f'(x)\ dx$$
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx \qquad S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

8 Číselné rady

8.0.3 Niektoré súčty radov

$$\sum_{i=0}^{n} aq^i = a\frac{1-q^n}{1-q}\ (q \neq 1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}\ (|q| < 1)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

8.0.4 Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

8.0.5 Nutná podmienka konvergencie

Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

8.1 Rady s nezápornými (nekladnými) členmi

8.1.1 1. porovnávacie kritérium

Ak pre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$ $(n \geq n_0)$ potom: ak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverg., tak aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.; ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg., tak aj $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverg. Špec., nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je s nezáp., $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s klad. členmi, nech $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: K$. Potom: ak $K \in (0;\infty)$ tak rady majú rovnaký charakter; ak $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverg., tak aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.; ak $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverg., tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg.

8.1.2 Cauchyho kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je s nezáp. členmi. Potom: ak $\exists q \in [0;1)\ \exists n^* \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n^* : \sqrt[n]{a_n} \leq q$ tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.; ak pre ∞ veľa $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg. Špec., ak $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$; potom: ak $k < 1$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.; ak $k > 1$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg.;

8.1.3 2. porovnávacie kritérium

Rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú s klad. členmi; nech $(\forall n \in \mathbb{N}) : n > n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Potom: ak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverg., tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.; ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg., tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverg.

8.1.4 d'Alembertovo kritérium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je s kladn. členmi, potom ak $\exists q \in [0;1)$ a $\exists n^* \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n^* : \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.; ak $\exists n^* \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n^* : \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg.

8.1.5 Integrálne kritérium

Nech $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáp. nerast. fcia. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverg. (diverg.) práve vtedy, keď $\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\, dt$ je vlastná (nevlastná). Špec., ak je f spojitá, tak $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverg. (diverg.) ak $\lim_{x\to\infty} F(x)$, (F je primit. k f) je vlastná (nevlastná).

8.1.6 Raabeho kritérium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je s klad. členmi. Ak počnúc nejakým $n \in \mathbb{N}\ \ \exists q > 1$ také, že $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ge q$ tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.; ak $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$ tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg.

8.2 Absolútne a relatívne konvergentné rady

8.2.1 Leibnitzovo kritérium

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monot. postupnosť s limitou nula. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje a platí $\left|\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n\right| \le |a_k|$.

9 Postupnosti a rady funkcií

9.1 Kritériá rovnomernej konvergencie

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \rightrightarrows$ na M k $f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$

9.1.1 C-B kritérium rovnomernej konvergencie

Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \rightrightarrows$ na $M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m > n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Špec. pre funkcionálne rady: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in M : |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

9.1.2 Weierstrassovo kritérium r-k

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť ohr. fcií na M, nech $|f_n(x)| \le c_n$. Ak rad s klad. členmi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, tak funkc. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$.

9.2 Vlastnosti r-k postupností a radov fcií

9.2.1 Zámena poradia limít

Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod M. Ak $f_n \rightrightarrows$ na M a počnúc $n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists$ konečná $\lim_{x\to a} f_n(x) =: A_n$, tak $\exists$ konečná $\lim_{n\to\infty} A_n$ a platí $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n$; teda platí: $\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$.

9.2.2 Určité integrály a rovnomerná konvergencia

Nech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a;b]$. Ak $f_n \in \Re[a;b]$ tak aj $f \in \Re[a;b]$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

9.2.3 Derivácie a rovnomerná konvergencia

Nech $\{f_n\}$ je postupnosť spojit. dif. fcií na $[a;b]$. Ak platí $f_n' \rightrightarrows g$ na $[a;b]$ a zároveň $\exists c \in [a;b]$ tak, že $\{f_n(c)\}$ konverguje, tak $f_n \rightrightarrows$ na $[a;b]$ a zároveň $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = g$.

9.3 Mocninové rady

Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ konverg. v bode $t_0 \ne 0$, tak konverg. abs. $\forall t \in (-|t_0|, |t_0|)$. Nastane práve jedna z nasled. možností: a) $\exists\,(R > 0)$: konverg. abs. $\forall x \in (a - R, a + R)$ a diverg. pre $x \in (-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$; b) rad konverg. abs. na $\mathbb{R}$; c) rad konverg. len v a.

9.3.1 Polomer konvergencie

Nech $r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $(\in \mathbb{R}^*)$. Potom pre polomer konvergencie R radu platí: ak $r \in \mathbb{R}^+$ tak $R = \frac{1}{r}$; ak $r = 0$ tak $R = \infty$; ak $r = \infty$ tak $R = 0$. Ak počínajúc niektorým n_0 je $a_n \ne 0$ a $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ $(\in \mathbb{R}^*)$, tak polomer konvergencie $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

9.3.2 Integrovanie člen po člene

Nech mocninový rad má nenulový R. Potom: Fcia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ je spojitá; Rad možno integrovať člen po člene na každom podintervale oboru konvergenice, špec.

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right) dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1};$$

V každom bode $x \in I$, kde I je int. konvergencie radu, má fcia f derivácie všetkých rádov, hodnotu $f^{(k)}(x) (k \in \mathbb{N}, x \in I)$ možno nájsť k–násobným derivovaním radu člen po člene:

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)' = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k} \qquad (*)$$

Ak $R \in R^+$ a rad $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k}$ konverguje pre $x = a + R (x = a - R)$, tak funkcie $f, f', ..., f^{(k)}$ sú definované aj v bode $a + R$ (v bode $(a - R)$) a v tomto bode platí tiež rovnosť (*).

9.3.3 Taylorove rady

Funkcia f sa nazýva analytická v bode a, ak jej Taylorov rad $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n)$ konverguje na niektorom okolí $O(a)$ bodu a k funkcii $f|O(a)$. Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje na $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$ funkcii $f|O(a)$, tak je Taylorov rad fcie f (a f je analytická v a).

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1, 1)$
$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$	
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad x \in [-1, 1)$	
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1, 1]$	
$(1+x)^m = 1 + mx + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in I$	

$$I = \begin{cases} (-\infty, \infty), & ak \quad m \in \mathbb{N} \\ [-1, 1], & ak \quad m \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N} \\ (-1, 1], & ak \quad m \in (-1, 0) \\ (-1, 1), & ak \quad m \in (-\infty, -1] \end{cases}$$