

## Part I

# Limita funkcie

**Upozornenie pre čitateľa.** Keďže cieľom prvého odseku tejto kapitoly je zaviesť základný pojem matematickej analýzy – pojem limity, je v ňom veľa miesta venovaného prípravným úvahám; navyše sa tu vyskytuje z hľadiska matematickej serióznosti nečestný ťah: dve definície toho istého pojmu (v paragrafoch .5 a .7). Preto považujeme za vhodné zaradiť návod

AKO ČÍTAŤ NASLEDUJÚCI ODSEK

Čitateľ, ktorý si nepraje byť siahodlho privádzaný k definícii limity, ktorú budeme v ďalšom používať, môže začať čítanie až paragrafom .7, z predchádzajúceho textu potrebuje len definície .2 a .4.

Pre čitateľa, ochotného prehrýzať sa celým textom, máme tiež zopár informácií. Na zavedenie pojmu limita sa spravidla používa jedna z dvoch definícií: *Heineho* (ktorú uvádzame v paragrafe .5) alebo *Cauchyho* (paragraf .7). Keďže Heineho definícia sa nám zdala vhodnejšia na osvetlenie tohto (nie úplne jednoduchého) pojmu, privádzame čitateľa v prvých paragrafoch odseku Definícia limity k limite funkcie použitím limity postupnosti; vo vete .6 potom ukážeme, že takto zavedený pojem možno popísať aj iným spôsobom. Ten iný spôsob je práve Cauchyho definícia limity, ktorú budeme využívať ako základnú v našich ďalších úvahách. Jej vyslovením v paragrafe .7 končí obdobie prípravných rečí. Heineho definícia v paragrafe .5 nám teda slúži len ako pomôcka a v ďalšom texte sa na ňu ako na definíciu nikdy nebudeme odvolávať; veta .6 dokazujúca ekvivalenciu obidvoch uvedených prístupov však ukazuje, že naša nečestnosť (je dobrým zvykom uvádzať jedinú definíciu nového pojmu) nebola až taká strašná.

## 1 Definícia limity

**.1 Definícia.** Hovoríme, že postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- *konverguje k číslu*  $l \in \mathbf{R}$ , ak

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > N) (|a_n - l| < \varepsilon) \quad (1)$$

- *diverguje k*  $\infty$ , ak

$$(\forall K \in \mathbf{R}) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > N) (a_n > K) \quad (2)$$

- *diverguje k*  $-\infty$ , ak

$$(\forall K \in \mathbf{R}) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > N) (a_n < K) \quad (3)$$

- *osciluje*, ak nenastane ani jedna z predchádzajúcich možností.

**Poznámka.** Výroky (1), (2), (3) majú podobnú štruktúru:

$$(\forall \heartsuit) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > N) (V(a_n, \heartsuit)),$$

kde  $V(a_n, \heartsuit)$  hovorí, že číslo  $a_n$  leží v intervale popísanom pomocou  $\heartsuit$  (v prvom prípade je to interval  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  (tj.  $(l - \heartsuit, l + \heartsuit)$ ), v druhom  $(K, \infty)$  (tj.  $(\heartsuit, \infty)$ ), v treťom  $(-\infty, K)$  (tj.  $(-\infty, \heartsuit)$ ). Zavedieme teraz niekoľko pojmov, použitie ktorých umožní zapisovať (1), (2), (3) jednotným spôsobom; to sa v budúcnosti ukáže ako prospešné (vyhneme sa tým napríklad opakovaniu niektorých úvah, ktoré sú podobné vo všetkých troch prípadoch).

**.2 Definícia.** Množinu  $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  budeme nazývať *rozšírená reálna os* a jej prvky budeme volať *body* (pričom pre označenie prvkov množiny  $\mathbf{R}$  budeme okrem toho naďalej používať aj pomenovanie *číslo*).

Nech  $l \in \mathbf{R}$ . Každý interval tvaru  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ , kde  $\varepsilon > 0$ , budeme nazývať *okolím* (alebo presnejšie  $\varepsilon$ -*okolím*) *bod*  $l$ ; číslo  $\varepsilon$  sa bude nazývať *polomer okolia*. Každý interval tvaru  $(K, \infty)$  (resp.  $(-\infty, K)$ ), kde  $K \in \mathbf{R}$ , budeme nazývať *okolím bodu*  $\infty$  (resp. *okolím bodu*  $-\infty$ ). Okolie bodu  $b \in \mathbf{R}^*$  budeme označovať  $O(b)$ , špeciálne  $\varepsilon$ -okolie bodu  $l \in \mathbf{R}$  aj znakom  $O(\varepsilon, l)$ . Množiny tvaru  $O(b) \setminus \{b\}$  budeme nazývať *prstencové okolie bodu*  $b$  a označovať  $P(b)$ ; pokiaľ nebude hroziť nedorozumenie, budeme namiesto  $O(b)$  alebo  $P(b)$  písať len  $O$  alebo  $P$ .

**Poznámka.** Zrejme v prípade  $b = \infty$  a  $b = -\infty$  je pojem prstencové okolie totožný s pojmom okolie a zavádzame ho pre tieto prípady len kvôli zjednoteniu terminológie.♠

Zavedenie pojmu okolia nám umožňuje pristupovať k situáciám popísaným výrokmi (1), (2), (3) jednotne:

**.3 Definícia.** Hovoríme, že postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $b \in \mathbf{R}^*$ , ak

$$(\forall O(b))(\exists P(\infty))(\forall n \in P(\infty) \cap \mathbf{N})(a_n \in O(b)) \quad (4)$$

Bod  $b$  sa označuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Ak  $b \in \mathbf{R}$ , hovoríme o *vlastnej* (alebo *konečnej*) *limite*, v prípade  $b = \infty$  alebo  $b = -\infty$  o *nevlastnej limite*. Postupnosti, ktoré majú vlastnú limitu, sa nazývajú *konvergentné*, ostatné postupnosti (tj. postupnosti, ktoré majú nevlastnú limitu alebo nemajú limitu) sa nazývajú *divergentné*.♠

Definíciu limity postupnosti sme naplnili presným obsahom našu pôvodnú pracovnú formuláciu “pre rastúce  $n$  sa hodnoty  $a_n$  približujú k bodu  $b$ ”. Naším ďalším cieľom je definovať pojem limity funkcie  $f$  v bode  $a$ , tj. popísať, čo presne myslíme formuláciou “pre  $x$  blížiac sa k  $a$  sa hodnoty  $f(x)$  blížia k  $b$ ”, upresníme ešte, že “ $x$  blížiac sa k  $a$ ” si v tomto prípade predstavujeme ako “ $x \neq a$  približujúce sa k  $a$ ”<sup>1</sup>. Je zřejmé, že ak sa chceme k bodu  $a$  približovať takýmto spôsobom, musíme požadovať, aby bol hromadným bodom definičného oboru funkcie  $f$  v zmysle nasledujúcej definície.

**.4 Definícia.** Bod  $b \in \mathbf{R}^*$  sa nazýva *hromadný bod množiny*  $M \subset \mathbf{R}$ , ak v každom jeho prstencovom okolí leží aspoň jeden prvok množiny  $M$ .<sup>2</sup>♠

Jednou z možností je popísať “blíženie sa k bodu  $a$ ” pomocou postupností, pre ktoré máme už tento pojem korektne definovaný<sup>3</sup>. Ak postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  bodov rôznych od  $a$  má limitu  $a$ , potom je skutočne  $x_n$  rôzne od  $a$  a blíži sa k  $a$ , požiadavka “pre takéto  $x$  sa hodnoty  $f(x)$  blížia k  $b$ ” získa potom podobu  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ . Keďže k bodu  $a$  sa takýmto spôsobom môžeme blížiť prostredníctvom rôznych postupností  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , je prirodzené požadovať, aby pri *každom* takom približovaní sa k bodu  $a$  sa hodnoty  $f(x_n)$  približovali k  $b$ .

**.5 Definícia.** Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$ . Hovoríme, že *funkcia  $f$  má v bode  $a$  limitu  $b \in \mathbf{R}^*$* , ak pre každú postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  takú, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ .♠

Ukážeme teraz, že takto definovanú limitu funkcie  $f$  v bode  $a$  možno popísať rovnakým spôsobom ako je v (4) popísaná limita postupnosti<sup>4</sup>.

**.6 Veta.** Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$ , nech  $b \in \mathbf{R}^*$ . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (a) pre každú postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  takú, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ ;
- (b)  $(\forall O(b))(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap D(f))(f(x) \in O(b))$ .

**Dôkaz.** :-) Skôr ako začneme vlastný dôkaz, skúsme sa zamyslieť nad vlastnosťou (b). Ak si graf funkcie  $f$  predstavíme znázornený v podobe “šípka z  $x$  do  $f(x)$ ”, tak (b) hovorí toto: akokoľvek si zvolíme okolie  $O(b)$  bodu  $b$ , vždy vieme nájsť prstencové okolie  $P(a)$  bodu  $a$  tak, že

- všetky šípky začínajúce v  $P(a)$  končia v  $O(b)$

alebo nepatrne inak povedané:

- ak si chceme byť istí, že  $f(x)$  bude ležať v  $O(b)$ , stačí zabezpečiť, aby  $x$  ležalo v  $P(a)$ .(-:

<sup>1</sup>Pojmom limita funkcie  $f$  v bode  $a$  chceme totiž vyjadriť správanie sa funkcie  $f$  v “bezprostrednej blízkosti bodu  $a$ ”, ale nezaujímá nás, čo sa deje v bode  $a$ , tj. či tam je alebo nie je funkcia  $f$  definovaná, resp. akú funkčnú hodnotu tam nadobúda. (Otázkou, či sa funkcia  $f$  v bode  $a$  správa tak, ako by sa dalo očakávať od jej správania sa “v bezprostrednej blízkosti bodu  $a$ ”, sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.) Všimnime si ešte, že požiadavka  $x \neq a$  bola automaticky splnená v našich ilustračných príkladoch, v ktorých funkcia  $f$  nebola v bode  $a$  definovaná.

<sup>2</sup>Výrok *bod  $\infty$  ( $-\infty$ ) je hromadný bod množiny  $M$*  je zrejme len iné vyjadrenie skutočnosti, že množina  $M$  je zhora (zdola) neohraničená. (Teda skutočne novým pojmom je len pojem hromadného bodu pre prípad  $b \in \mathbf{R}$ , pre  $b = \infty$  a  $b = -\infty$  definujeme tento pojem kvôli zjednoteniu terminológie.)

<sup>3</sup>Samozrejme, že ďalšou možnosťou je ihneď chápať definíciu .7 ako presné vyjadrenie pracovnej formulácie “pre  $x$  blížiac sa k  $a$  sa  $f(x)$  blíži k  $b$ ”, a nezdržiavať sa sprostredkovaním tohto pojmu cez postupnosti.

<sup>4</sup>Čitateľ, ktorého doteraz trápilo, prečo sme v (4) použili práve prstencové okolie  $P(\infty)$  (keď sme v uvedenom prípade mohli rovnako dobre použiť aj okolie  $O(\infty)$ ), teraz už asi vidí, že dôvodom bola snaha, aby (4) a výrok (b) z nasledujúcej vety mali rovnakú podobu.

Dokážeme najprv implikáciu  $(b) \Rightarrow (a)$ . Predpokladajme teda, že platí (b). Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  je postupnosť s limitou  $a$ . Chceme dokázať, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ , tj. že platí

$$(\forall O(b)) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > N) (f(a_n) \in O(b)).$$

:-) Ak chceme dokázať tvrdenie zapísané v predchádzajúcom riadku, vidíme, že máme zodpovedať nasledujúcu otázku: ak je dané okolie  $O(b)$  bodu  $b$ , pre ktoré čísla  $n \in \mathbf{N}$  vieme zaručiť, že  $f(a_n)$  leží v  $O(b)$ ? Jednu možnosť poskytuje predpoklad (b):  $f(a_n)$  bude iste ležať v  $O(b)$ , ak  $a_n$  bude ležať v  $P(a)$ , čo prvú položenú otázku prevádza na druhú: pre ktoré  $n$  vieme zaručiť, že  $a_n$  leží v  $P(a)$ ? Na to ale dávajú odpoveď predpoklady  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  a  $(\forall n \in \mathbf{N})(a_n \neq a)$ . Z prvého z nich vyplýva, že k okoliu  $O(a) := P(a) \cup \{a\}$  iste existuje  $N_1 \in \mathbf{N}$  tak, že pre  $n \in \mathbf{N}, n > N_1$  už platí  $a_n \in O(a)$ , druhý z nich zaručuje, že z inklúzie  $a_n \in O(a)$  vyplýva inklúzia  $a_n \in P(a)$ . Pre  $n \in \mathbf{N}, n > N_1$  teda platí  $a_n \in P(a)$ , a teda – podľa predchádzajúcich úvah – aj  $f(a_n) \in O(b)$ .(-)

Teda znova stručne: Zvolíme okolie  $O(b)$  bodu  $b$ . K okoliu  $O(b)$  nájdeme prstencové okolie  $P(a)$  bodu  $a$  tak, že platí

$$x \in P(a) \implies f(x) \in O(b) \tag{5}$$

(existencia okolia  $P(a)$  vyplýva z predpokladu (b)). K okoliu  $O(a) := P(a) \cup \{a\}$  nájdeme  $N_1 \in \mathbf{N}$  tak, že

$$n > N_1 \implies a_n \in O(a)$$

(existencia čísla  $N_1$  vyplýva z nášho predpokladu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ). Z podmienky

$$(\forall n \in \mathbf{N})(a_n \neq a)$$

potom vyplýva

$$n > N_1 \implies a_n \in P(a) \tag{6}$$

a z (6) a (5) dostávame

$$(\forall n \in \mathbf{N}, n > N_1) (f(a_n) \in O(b)).$$

Naša úvaha je správna pre každé pevne zvolené okolie  $O(b)$ , teda

$$(\forall O(b)) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > N) (f(a_n) \in O(b)),$$

čo sme chceli dokázať.  $\triangle$

Implikáciu  $(a) \Rightarrow (b)$  budeme dokazovať nepriamo (tj. dokážeme implikáciu  $\neg(b) \Rightarrow \neg(a)$ ). Nech teda

$$(\exists O(b)) (\forall P(a)) (\exists x \in P(a) \cap D(f)) (f(x) \notin O(b)). \tag{7}$$

:-) Našou snahou je teraz dopracovať sa od tohto výroku (v ktorom čitateľ iste spoznal negáciu tvrdenia (b)) k výroku  $\neg(a)$ , tj. ukázať, že existuje postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  tak, že platí rovnosť  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , ale číslo  $b$  nie je limitou postupnosti  $\{f(a_n)\}$ .(-)

Predpokladajme najprv, že  $a \in \mathbf{R}$ . Nech  $n \in \mathbf{N}$ ; označme  $P_n(a) := (a - 1/n, a + 1/n) \setminus \{a\}$ , potom  $P_n(a)$  je iste prstencové okolie bodu  $a$ , a preto podľa (7) existuje aspoň jedno číslo  $x \in P_n(a)$  tak, že  $f(x) \notin O(b)$ . Zvolme jedno z čísel s touto vlastnosťou a označme ho  $a_n$ . Ak to urobíme pre každé  $n \in \mathbf{N}$ , dostaneme postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  takú, že

- $(\forall n \in \mathbf{N})(|a_n - a| < 1/n)$  (to je len iný zápis inklúzie  $a_n \in P_n(a)$ ), z tejto vlastnosti vyplýva, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (dôkaz prenechávame vždy ochotnému čitateľovi);
- $(\forall n \in \mathbf{N})(f(a_n) \notin O(b))$ , odtiaľ ale vyplýva, že číslo  $b$  nemôže byť limitou postupnosti  $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$  (pretože v takom prípade by až na konečný počet ležali všetky členy tejto postupnosti v okolí  $O(b)$ ).

Z existencie postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  s uvedenými vlastnosťami vyplýva tvrdenie  $\neg(a)$ , čím je náš dôkaz v prípade  $a \in \mathbf{R}$  skončený.  $\triangle$

V prípade  $a = \infty$ , resp.  $a = -\infty$  je postup rovňaký, ale namiesto  $P_n(a) := (a - 1/n, a + 1/n)$  volíme  $P_n(\infty) := (n, \infty)$ , resp.  $P_n(-\infty) := (-\infty, -n)$ .

**Poznámka.** V prípade dôsledne axiomatického budovania základov matematickej analýzy je potrebné na zdôvodnenie existencie postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ktorú sme použili v dôkaze implikácie  $(a) \Rightarrow (b)$  predchádzajúcej vety, použiť axiómu nazývanú *axióma výberu*. Jedna z jej možných formulácií znie:

*Nech  $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$ , kde  $I$  je neprázdna množina indexov, je systém neprázdnych množín<sup>5</sup>. Potom existuje zobrazenie  $I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  také, že pre každé  $\alpha \in I$  je  $f(\alpha) \in A_\alpha$ .*

Treba upozorniť, že v matematike existujú smery nepovažujúce dôkazy založené na axióme výberu za korektné, preto aj v tomto texte ju budeme používať pokiaľ možno len v nevyhnutných prípadoch.  $\spadesuit$

Po tejto dlhotrvajúcej delostreleckej príprave môžeme vysloviť definíciu limity v tejto jednotnej podobe.

<sup>5</sup>príklady ozrejmujúce pojem *systém množín* nájde čitateľ v poznámke k leme .46

**.7 Definícia.** Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$ . Hovoríme, že *funkcia  $f$  má v bode  $a$  limitu  $b$*  ( $\in \mathbf{R}^*$ ) (a zapisujeme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  alebo  $f(x) \rightarrow b$  pre  $x \rightarrow a$ ), ak

$$(\forall O(b)) (\exists P(a)) (\forall x \in P(a) \cap D(f)) (f(x) \in O(b)) . \quad (8)$$

Ak  $b \in \mathbf{R}$  (resp.  $a \in \mathbf{R}$ ), hovoríme o *konečnej* (alebo *vlastnej*) *limite* (resp. o *limite v konečnom bode*), v prípade  $b = \infty$  alebo  $b = -\infty$  (resp.  $a = \infty$  alebo  $a = -\infty$ ) o *nevlastnej* (alebo *nekonečnej*) *limite* (resp. *limite v nevlastnom bode*).

**Poznámka. 1.** Výrok (8) možno zrejme zapísať aj v tvare

$$(\forall O(b)) (\exists P(a)) (\forall x \in D(f)) (x \in P(a) \Rightarrow f(x) \in O(b)) . \quad (9)$$

Všeobecná formulácia (8), resp (9), v sebe obsahuje 9 špeciálnych prípadov (zodpovedajúcich možnostiam  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a = \infty$  alebo  $a = -\infty$  a rovnakým možnostiam pre  $b$ ), v každom z nich môžeme (8), resp. (9) nahradiť konkrétnejším zápisom. V prípade  $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$  môžeme okolia bodu  $b$  popísať ich polomerom  $\varepsilon$  a okolia bodu  $a$  ich polomerom  $\delta$ , a (9) dostane tak podobu

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D(f)) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon) \quad (10)$$

(kde nerovnosť  $0 < |x - a|$  zrejme zabezpečuje, že  $x \neq a$ , tj. že  $x$  leží v *prstencovom* okolí bodu  $a$ ).

V prípade  $a \in \mathbf{R}, b = -\infty$  môžeme okolia bodu  $b$  popísať ich pravým koncovým bodom  $K$ , okolia bodu  $a$  opäť popíšeme ich polomerom  $\delta$  a (9) bude v tvare

$$(\forall K \in \mathbf{R}) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D(f)) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K) .$$

(Ďalšie prepisovanie prenechávame čitateľovi.)

**2.** Definícia limity postupnosti v (4), resp. v (1), (2), (3), je zrejme špeciálnym prípadom definície (8), ktorý dostaneme, ak zvolíme  $D(f) = \mathbf{N}$ . ♣

Skôr ako vyslovíme prvé tvrdenia o limitách, uveďme niekoľko elementárnych pomocných úvah zhrnutých do nasledujúcej lemy.

**.8 Lema.** (a) Nech  $n \in \mathbf{N}$ . Ak  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sú prstencové okolia bodu  $a \in \mathbf{R}^*$ , tak aj  $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n$  je prstencové okolie bodu  $a$ . (Analogické tvrdenie platí aj pre okolia.)

(b) Nech  $a, b \in \mathbf{R}^*$ ,  $a \neq b$ . Potom existujú okolie  $O(a)$  bodu  $a$  a okolie  $O(b)$  bodu  $b$  tak, že  $O(a) \cap O(b) = \emptyset$ .

(c) Ak  $b \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod množiny  $M \subset \mathbf{R}$  a  $N \supset M$ , tak  $b$  je aj hromadný bod množiny  $N$ .

(d) Nech  $\mathcal{P}$  je prstencové okolie bodu  $b \in \mathbf{R}^*$ . Potom  $b$  je hromadný bod množiny  $M \subset \mathbf{R}$  práve vtedy, keď je aj hromadným bodom množiny  $M \cap \mathcal{P}$ .

**Dôkaz.** Napoviem len, že dôkaz implikácie *ak  $b$  je hromadný bod množiny  $M$ , tak je aj hromadný bod množiny  $M \cap \mathcal{P}$*  sa zakladá na tejto úvahe: ak  $P(b)$  je prstencové okolie bodu  $b$ , tak aj  $\mathcal{P} \cap P(b)$  je prstencovým okolím tohto bodu; keďže  $b$  je hromadný bod množiny  $M$ , leží v  $\mathcal{P} \cap P(b)$  aspoň jeden prvok množiny  $M$ , čo ale znamená, že v  $P(b)$  leží aspoň jeden prvok množiny  $M \cap \mathcal{P}$ . ♣

Prvá z našich viet o limitách ukazuje, že pojem limity je definovaný jednoznačne v nasledujúcom zmysle:

**.9 Veta.** *Funkcia má v každom hromadnom bode svojho definičného oboru najviac jednu limitu* (tj. ak  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$  a  $r = \lim_{x \rightarrow a} f(x), s = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , tak  $r = s$ ).

**Dôkaz.** Sporom, nech  $r \neq s$  a nech  $r$  aj  $s$  sú limitou funkcie  $f$  v bode  $a$ . Potom podľa lemy .8(b) existujú okolie  $O(r)$  bodu  $r$  a okolie  $O(s)$  bodu  $s$  tak, že  $O(r) \cap O(s) = \emptyset$ . Keďže  $r = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , k okoliu  $O(r)$  musí podľa definície limity existovať prstencové okolie  $P_1$  bodu  $a$  tak, že

$$(\forall x \in P_1 \cap D(f)) (f(x) \in O(r)) .$$

Z rovnakých dôvodov k okoliu  $O(s)$  existuje prstencové okolie  $P_2$  bodu  $a$  tak, že

$$(\forall x \in P_2 \cap D(f)) (f(x) \in O(s)) .$$

Pre prvky neprázdnjej množiny  $P_1 \cap P_2 \cap D(f)$  (je skutočne neprázdna?) potom musí platiť  $f(x) \in O(r) \cap O(s) = \emptyset$ , čo je zrejme nemožné. Týmto sporom je náš dôkaz skončený.♠

Uvedme v závere tohto odstavca niekoľko tvrdení súvisiacich s definíciou limity, ktoré využijeme v ďalších úvahách. Prvé tri, zhrnuté do lemy .10, sa týkajú ohraničenosti.

**.10 Lema.** *Nech  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  <sup>6</sup>. Potom*

(a) *ak  $b \in \mathbf{R}$ , tak funkcia  $f$  je ohraničená v niektorom prstencovom okolí  $P(a)$  bodu  $a$  (tj. na množine  $P(a) \cap D(f)$ );*

(b) *ak  $b > 0$  alebo  $b = \infty$ , tak  $f$  je v niektorom prstencovom okolí bodu  $a$  ohraničená zdola kladnou konštantou, tj.*

$$(\exists P(a))(\exists M > 0)(\forall x \in P(a) \cap D(f))(f(x) \geq M) ;$$

(c) *ak  $b < 0$  alebo  $b = -\infty$ , tak  $f$  je v niektorom prstencovom okolí bodu  $a$  ohraničená zhora zápornou konštantou.*

**Dôkaz.** Dokážeme len tvrdenie (a). Z definície limity v (8) vyplýva, že ku každému okoliu  $O(b)$  bodu  $b$  vieme nájsť prstencové okolie bodu  $a$  s istými vlastnosťami. Keď ku každému, tak iste aj k okoliu  $O := (b - 1, b + 1)$  <sup>7</sup>. Existuje teda prstencové okolie  $P$  bodu  $a$ , pre ktoré platí

$$(\forall x \in P \cap D(f))(f(x) \in O) ,$$

tj.

$$(\forall x \in P \cap D(f))(b - 1 < f(x) < b + 1) .$$

Posledný výrok hovorí, že na  $P \cap D(f)$  je funkcia  $f$  ohraničená, čím je dôkaz skončený <sup>8</sup>. $\Delta$

K dôkazu tvrdenia (b) pre prípad  $b > 0$  len napovieme, že postup je rovnaký ako v dôkaze (a), ale okolie  $O$  teraz zvolíme tak, aby jeho polomer bol menší než  $b$ .♠

Vzťahom limity funkcie a limity jej zúženia sa zaoberajú nasledujúce tvrdenia.

**.11 Lema.** (a) *Nech funkcia  $g$  je zúžením funkcie  $f$  na množinu  $M$ . Ak  $a$  je hromadný bod množiny  $M$  <sup>9</sup> a existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , tak existuje aj  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .*

(b) *Nech sa funkcie  $f, g$  zhodujú na niektorom prstencovom okolí  $\mathcal{P}$  bodu  $a \in \mathbf{R}^*$ , tj. nech*

$$D(f) \cap \mathcal{P} = D(g) \cap \mathcal{P} \tag{11}$$

a

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f))(f(x) = g(x)) . \tag{12}$$

Potom platí: ak existuje jedna z limít  $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  <sup>10</sup>, tak existuje aj druhá a obidve limity sa rovnajú.

(c) *Nech  $f_1$ , resp.  $f_2$  je zúženie funkcie  $f$  na množinu  $M_1$ , resp.  $M_2$ . Ak limity  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$  existujú <sup>11</sup>, ale sú rôzne, tak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  neexistuje.*

(d) *Nech  $f_1$ , resp.  $f_2$  je zúženie funkcie  $f$  na množinu  $M_1$ , resp.  $M_2$ . Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b \in \mathbf{R}^*$  a navyše platí rovnosť  $M_1 \cup M_2 = D(f)$ , tak existuje aj  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a rovná sa  $b$  <sup>12</sup>.*

<sup>6</sup>Predpoklad *nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$*  chápeme ako “zhustenú podobu” formulácie *nech  $a$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$ , nech  $v$  a existuje limita funkcie  $f$  a rovná sa  $b$ .*

<sup>7</sup>Pri druhom čítaní tohto dôkazu by už čitateľovi malo byť jasné, že nebolo podstatné, že sme si zvolili práve okolie  $(b - 1, b + 1)$ , rovnako by nám v tomto prípade poslúžilo ľubovoľné iné okolie bodu  $b$ .

<sup>8</sup>Tvrdenie (a) lemy zostane v platnosti, ak v ňom slová *v niektorom prstencovom okolí* nahradíme slovami *v niektorom okolí* (v prípade  $a \notin D(f)$  je to zrejme; v prípade  $a \in D(f)$  je množina  $f(O(a) \cap D(f))$ , kde  $O(a) := P \cup \{a\}$ , zjednotením ohraničených množín  $f(P \cap D(f))$  a  $\{f(a)\}$ ). V prípadoch (b) a (c) to nemusí byť pravda (prečo?).

<sup>9</sup>Z inkluzie  $M \subset D(f)$  vyplýva, že  $a$  je potom aj hromadný bod množiny  $D(f)$  (lema .8(c))

<sup>10</sup>predpoklad existencie jednej z uvedených limít v sebe “automaticky” obsahuje predpoklad, že  $a$  je hromadný bod definičného oboru príslušnej funkcie (a vzhľadom na podmienku (11) potom (podľa lemy .8(c),(d)) aj hromadný bod definičného oboru druhej z funkcií  $f, g$ )

<sup>11</sup>znovu pripomeňme, že predpokladajúc existenciu týchto limít, predpokladáme automaticky, že  $a$  je hromadný bod množiny  $M_1$  aj množiny  $M_2$  (a teda podľa lemy .8(c) iste aj definičného oboru funkcie  $f$ )

<sup>12</sup>S týmto tvrdením samozrejme možno vystrájať všelijaké duševné prostocviky, napr. ho indukciou zovšeobecniť na prípad  $D(f) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$  (kde  $n$  je niektoré prirodzené číslo) alebo ho upravovať použitím lemy .11(b). Iniciatíve čitateľa (ani menovateľa) sa medze nekladú, žiadame len, aby dosiahnuté výsledky boli správne.

**Dôkaz.** (b). Nasledujúce úvahy sú síce elementárne, ale kvôli prehľadnosti dôkaz urobíme v dvoch krokoch. Najprv dokážeme tento špeciálny prípad tvrdenia (b):

Nech  $\mathcal{P}$  je prstencové okolie bodu  $a$ . Potom funkcia  $f$  má v bode  $a$  limitu  $b$  práve vtedy, keď ju tam má jej zúženie na množinu  $\mathcal{P}$  (tj. funkcia  $f_1 := f|_{\mathcal{P} \cap D(f)}$ ).

Treba teda dokázať, že nasledujúce dva výroky sú ekvivalentné:

$$(\forall O(b))(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap D(f))(f(x) \in O(b)) \quad (\text{tj. } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b) \quad (13)$$

$$(\forall O(b))(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap (\mathcal{P} \cap D(f)))(f(x) \in O(b)) \quad (\text{tj. } \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b) \quad (14)$$

To, že z (13) vyplýva (14), by malo byť zrejmé: ak pre všetky prvky množiny  $P(a) \cap D(f)$  platí  $f(x) \in O(b)$ , tak to iste platí aj pre všetky prvky jej podmnožiny  $P(a) \cap \mathcal{P} \cap D(f)$ . Ak chceme odvodiť tvrdenie (13) z tvrdenia (14), stačí si uvedomiť, čo vlastne požaduje (13): ku každému okoliu  $O(b)$  máme najšť nejaké prstencové okolie (označme ho teraz  $S(a)$ ) bodu  $a$  tak, aby platilo  $x \in S(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(b)$ . K okoliu  $O(b)$  ale podľa (14) existuje  $P(a)$  tak, že platí  $x \in (P(a) \cap \mathcal{P}) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(b)$ . Potom zrejme  $S(a) := P(a) \cap \mathcal{P}$  je hľadané prstencové okolie (to, že je to skutočne prstencové okolie, vyplýva z tvrdenia (a) lemy 8<sup>13</sup>). $\Delta$

Teraz už ľahko dokážeme tvrdenie (b) našej lemy. Označme  $f_1 := f|_{\mathcal{P} \cap D(f)}$ ,  $g_1 := g|_{\mathcal{P} \cap D(g)}$ , potom z (11) a (12) vyplýva rovnosť

$$f_1 = g_1. \quad (15)$$

Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , tak podľa nášho pomocného tvrdenia (alebo aj podľa tvrdenia (a) tejto lemy) aj  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b$ , z (15) potom vyplýva  $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = b$  a napokon opäť z nášho pomocného tvrdenia<sup>14</sup> dostávame, že aj  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ .

(c) Tvrdenie vyplýva z časti (a) a z vety .9. Budeme dokazovať sporom. Nech  $r := \lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ ,  $s := \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ . Keby existovala  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , museli by podľa časti (a) tejto lemy platiť rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = s$ , čo – keďže  $r \neq s$  – je v spore s tvrdením vety .9.

(d) Nech  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$  a  $M_1 \cup M_2 = D(f)$ , chceme dokázať

$$(\forall O(b))(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap D(f))(f(x) \in O(b)). \quad (16)$$

Zvoľme teda okolie  $O(b)$  a hľadáme prstencové okolie  $P(a)$  s požadovanou vlastnosťou. K nášmu okoliu  $O(b)$  existuje – pretože  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b$  – prstencové okolie  $P_1(a)$  bodu  $a$  také, že

$$(\forall x \in P_1(a) \cap M_1)(f_1(x) \in O(b)).$$

Keďže pre  $x \in M_1$  je  $f_1(x) = f(x)$ , môžeme predchádzajúce tvrdenie zapísať v podobe

$$(\forall x \in P_1(a) \cap M_1)(f(x) \in O(b)). \quad (17)$$

Pretože aj  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$ , existuje aj prstencové okolie  $P_2(a)$  bodu  $a$  také, že

$$(\forall x \in P_2(a) \cap M_2)(f(x) \in O(b)) \quad (18)$$

(podobne ako predtým sme využili, že pre  $x \in M_2$  je  $f_2(x) = f(x)$ ).

Ukážeme teraz, že za hľadané prstencové okolie  $P(a)$  môžeme zvoliť okolie  $P(a) := P_1(a) \cap P_2(a)$ , tj. že pre všetky  $x \in P(a) \cap D(f)$  skutočne platí  $f(x) \in O(b)$ . Z predpokladu  $M_1 \cup M_2 = D(f)$ <sup>15</sup> vyplýva  $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap (M_1 \cup M_2) = P(a) \cap M_1 \cup P(a) \cap M_2 \subset P_1(a) \cap M_1 \cup P_2(a) \cap M_2$ , teda každý prvok  $x \in P(a) \cap D(f)$  leží v  $P_1(a) \cap M_1$  alebo  $P_2(a) \cap M_2$ . Podľa (17) a (18) pre všetky prvky týchto množín platí inklúzia  $f(x) \in O(b)$ . Tým je implikácia  $x \in P(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(b)$  dokázaná. Keďže naše úvahy sú správne, nech na začiatku zvolíme akékoľvek okolie  $O(b)$ , je tým výrok (16) dokázaný.

**Poznámka. 1.** Nenápadne vyzerajúce tvrdenie (b) lemy je často používaným teoretickým nástrojom pri výpočte limit: ak máme v bode  $a$  najšť limitu funkcie  $f$  (zadanej spravidla v nejakej zakuklenej a komplikovanej podobe) a podarí sa nám ukázať, že na niektorom prstencovom okolí bodu  $a$  sa funkcia  $f$  zhoduje s nejakou nám

<sup>13</sup>čitateľ by si mal rozmyslieť, že predpoklad  $\mathcal{P}$  je prstencové okolie bodu  $a$  (ktorý využívame jedine v tomto mieste dôkazu) nemožno vynechať.

<sup>14</sup>tentokrát ovšem už nie z tvrdenia (a) tejto lemy

<sup>15</sup>tento predpoklad je v tomto dôkaze podstatný

už známou (čo sa limit týka) funkciou  $g$ , potom tvrdenie (b) lemy umožňuje previesť hľadanie limity funkcie  $f$  na hľadanie limity funkcie  $g$ .

2. Z dôkazu tvrdenia (d) by malo byť zrejmé, že toto tvrdenie zostane v platnosti, ak podmienku  $M_1 \cup M_2 = D(f)$  nahradíme predpokladom  $M_1 \cup M_2 = D(f) \setminus \{a\}$ .♠

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia zatiaľ presahuje naše možnosti (po vybudovaní dostatočného teoretického aparátu sa k nemu samozrejme vrátíme; pozri príklad .34, cvičenie .35 a paragrafy .72 a .73). Dôvodom jeho vyslovenia už v tomto okamihu je snaha umožniť čitateľovi použiť teoretické poznatky o limitách pri riešení príkladov, ktorých počet by sa nemožnosťou používať elementárne funkcie značne zredukoval.

**.12 Veta.** (a) Ak  $f$  je elementárna funkcia a číslo  $a \in D(f)$  je hromadným bodom množiny  $D(f)$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ; (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

## 2 Limita funkcií $f \pm g, fg, \frac{f}{g}, g \circ f$

V tomto odstavci uvedieme sériu viet popisujúcich “počítanie s limitami”, tj. umožňujúcich hľadanie limit funkcií  $f \pm g, fg, \frac{f}{g}, g \circ f$ , ak poznáme limity funkcií  $f$  a  $g$ .

Začnime zopár drobnosťami, ktoré budeme potrebovať v niektorých nasledujúcich úvahách.

**.13 Lema.** Nech  $k \in \mathbf{R}$ . Potom platí

- (a) ak  $f(x) = k$  pre všetky  $x \in \mathbf{R}$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$  pre každé  $a \in \mathbf{R}^*$ ;
- (b) ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbf{R}$ <sup>16</sup>, tak  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot b$ ;
- (c) ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + k) = \infty$ ;
- (d) ak  $k > 0$  a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = \infty$ .

Ďalej platí

- (e) ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbf{R}$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$ ;
- (e<sub>1</sub>)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  práve vtedy, keď  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ;
- (f)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  práve vtedy, keď  $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\infty$ .

**Dôkaz.** (b). V prípade  $k = 0$  je to zrejmý dôsledok časti (a) a lemy .13(a); predpokladajme teraz, že  $k \neq 0$ .

(-) Ak pre všetky čísla  $x \in D(f)$  ležiace v prstencovom okolí  $P$  bodu  $a$  platí  $|f(x) - b| < \varepsilon$ , tak pre tie isté čísla platí aj  $|k \cdot f(x) - k \cdot b| < |k| \cdot \varepsilon$ . Z tejto triviality vyplýva: ak chceme nájsť prstencové okolie  $P$  tak, aby pre  $x \in D(f)$  ležiace v ňom platilo  $|k \cdot f(x) - k \cdot b| < \varepsilon$ , stačí hľadať  $P$  s vlastnosťou  $x \in P \cap D(f) \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ .  
(-:

Nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , chceme dokázať tvrdenie

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists P(a)) (\forall x \in P(a) \cap D(f)) (|k \cdot f(x) - k \cdot b| < \varepsilon) . \quad (19)$$

Nech je teda dané  $\varepsilon > 0$ . K číslu  $\frac{\varepsilon}{|k|}$  existuje – keďže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  – prstencové okolie  $P(a)$  tak, že

$$x \in P(a) \cap D(f) \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|k|} .$$

Pre všetky  $x \in P(a) \cap D(f)$  potom platí  $|k \cdot f(x) - k \cdot b| < \varepsilon$ , teda  $P(a)$  má vlastnosť požadovanú v (19). Keďže táto úvaha je správna pre každé  $\varepsilon > 0$ , je tým tvrdenie (19) dokázané.

(d) Nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , chceme dokázať výrok

$$(\forall M \in \mathbf{R}) (\exists P(a)) (\forall x \in P(a) \cap D(f)) (k \cdot f(x) > M) .$$

---

<sup>16</sup>opätovne (a už naposledy – dúfajúc, že sa nám už podarilo vytvoriť u čitateľa potrebný pavlovovský reflex) upozorníme, že hovoriac “nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ” máme vždy na mysli toto “nech  $a$  je hromadný bod množiny  $D(f)$ , nech existuje limita funkcie  $f$  v bode  $a$  a nech sa rovná  $b$ ”

Zvoľme teda  $M \in \mathbf{R}$  a hľadáme prstencové okolie požadovaných vlastností. K číslu  $\frac{M}{k}$  existuje (pretože  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ) prstencové okolie  $P(a)$  tak, že pre všetky  $x \in P(a) \cap D(f)$  platí  $f(x) > \frac{M}{k}$ . Keďže  $k > 0$ , platí pre tieto  $x$  aj nerovnosť  $k \cdot f(x) > M$ , čo znamená, že nájdené okolie  $P(a)$  spĺňa naše požiadavky.

(e) Dôkaz je založený na nerovnosti  $\left| |r| - |s| \right| \leq |r - s|$  a jednoduchej z toho vyplývajúcej úvahe ak pre  $x \in P(a) \cap D(f)$  platí  $|f(x) - b| < \varepsilon$ , tak pre tie isté  $x$  platí aj  $\left| |f(x)| - |b| \right| < \varepsilon$ .

(e<sub>1</sub>) Stačí si uvedomiť, že inklúzie  $f(x) \in O(\varepsilon, 0)$  a  $|f(x)| \in O(\varepsilon, 0)$  sú obidve ekvivalentné s nerovnosťou  $|f(x)| < \varepsilon$ .

**.14 Veta.** *Nech funkcie  $f$  a  $g$  sú definované na množine  $M$ . Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  a funkcia  $g$  je ohraničená, tak  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$ .*

**Dôkaz.** Zvoľme  $K > 0$  tak, aby platilo  $(\forall x \in M)(|g(x)| \leq K)$ . Chceme dokázať výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap M)(|f(x)g(x)| < \varepsilon).$$

Zvoľme teda  $\varepsilon > 0$  a hľadáme prstencové okolie s požadovanou vlastnosťou. Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , iste existuje okolie  $P(a)$  bodu  $a$  tak, že

$$(\forall x \in P(a) \cap M) \left( |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \right).$$

Nie je ťažké ukázať, že  $P(a)$  spĺňa naše požiadavky: keďže pre všetky  $x \in M$  je  $|g(x)| \leq K$ , vyplýva z nerovnosti  $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$  nerovnosť  $|f(x)g(x)| < \varepsilon$ , preto

$$(\forall x \in P(a) \cap M)(|f(x)g(x)| < \varepsilon).$$

**Poznámka.** Použitím časti (b) lemy .11 môžeme práve dokázané tvrdenie sformulovať vo všeobecnejšej podobe, napr.:

*Nech funkcie  $f$  a  $g$  sú definované na množine  $M$ . Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  a funkcia  $g$  je ohraničená v niektorom prstencovom okolí  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  (tj. na množine  $\mathcal{P} \cap M$ ), tak  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$ .*

(Ak totiž definujeme  $f_1 := f|_{\mathcal{P} \cap M}$ ,  $g_1 := g|_{\mathcal{P} \cap M}$ , tak funkcie  $f_1, g_1$  spĺňajú predpoklady vety .14, teda  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x)g_1(x)) = 0$ , podľa časti (b) lemy .11 potom – keďže  $(fg)|_{\mathcal{P} \cap M} = f_1g_1$  – aj  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$ ).

**.15 Veta.** *Nech funkcie  $f$  a  $g$  sú definované na množine  $M$ , nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \in \mathbf{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s \in \mathbf{R}$ . Potom*

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = r + s$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = r - s$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

(c)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = r \cdot s$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

(d) ak  $s = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$



**Dôkaz.** (a) :-) Začnime ešte raz predbežnou úvahou. Ak  $R$ , resp.  $S$  je prstencové okolie bodu  $a$  také, že

$$(\forall x \in R \cap M)(|f(x) - r| < \varepsilon_1),$$

resp.

$$(\forall x \in S \cap M)(|g(x) - s| < \varepsilon_2),$$

tak pre  $x \in R \cap S \cap M$  bude platiť

$$|(f(x) + g(x)) - (r + s)| = |(f(x) - r) + (g(x) - s)| \leq |f(x) - r| + |g(x) - s| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

pritom  $R \cap S$  je podľa lemy .8 prstencové okolie bodu  $a$ . Ak teda hľadáme prstencové okolie, pre prvky  $x$  ktorého by platilo  $|(f(x) + g(x)) - (r + s)| < \varepsilon$ , stačí napísať číslo  $\varepsilon$  v tvare súčtu dvoch kladných čísel  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  a nájsť príslušné prstencové okolia  $R$  a  $S$ . (-:

Chceme dokázať

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap M)(|(f(x) + g(x)) - (r + s)| < \varepsilon).$$

Zvoľme teda  $\varepsilon > 0$  a hľadáme prstencové okolie  $P(a)$  s požadovanou vlastnosťou. Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s$ , existujú prstencové okolia  $P_1(a)$  a  $P_2(a)$  tak, že

$$(\forall x \in P_1(a) \cap M) \left( |f(x) - r| < \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad (\forall x \in P_2(a) \cap M) \left( |g(x) - s| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Prstencové okolie  $P(a) := P_1(a) \cap P_2(a)$  potom vyhovuje našim požiadavkám, pretože pre všetky  $x \in P(a) \cap M$  platí

$$|(f(x) + g(x)) - (r + s)| \leq |f(x) - r| + |g(x) - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \Delta$$

Tvrdenie (b) možno odvodiť z lemy .13(b) a z tvrdenia (a): Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s$ , platí podľa lemy .13(b) (v ktorej položíme  $k = -1$ ) rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} (-g(x)) = -s$ ; z existencie konečných limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (-g(x)) = -s$  potom podľa tvrdenia (a) tejto vety vyplýva rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + (-g(x))) = r - s$ , čo sme chceli dokázať.  $\Delta$

Tvrdenie (c) možno dokázať nasledujúcim výpočtom (ktorý hneď zdôvodníme):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) &= \\ &\stackrel{\alpha}{=} \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) - r + r)g(x)] = \\ &\stackrel{\beta}{=} \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) - r)g(x)] + \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot g(x)] = \\ &\stackrel{\gamma}{=} 0 + r \cdot s = r \cdot s. \end{aligned}$$

Podľa lemy .13(b) <sup>17</sup> je  $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot g(x)] = r \cdot s$ . Funkcia  $g$  je ohraničená v niektorom prstencovom okolí bodu  $a$  (lema .10) a  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - r) = 0$  (lema .13(a) a tvrdenie (b) našej vety), preto  $\lim_{x \rightarrow a} [(f(x) - r)g(x)] = 0$  (tvrdenie v poznámke za vetou .14). Tým sme zdôvodnili rovnosť  $\gamma$ . Rovnosť  $\beta$  vyplýva z tvrdenia (a) a rovnosť  $\alpha$  by mala byť zrejmá <sup>18</sup>.  $\Delta$

(d) Dokážeme naše tvrdenie najprv za dodatočného predpokladu

$$(\exists K > 0)(\forall x \in D(g))(|g(x)| > K) \tag{20}$$

a potom ukážeme, že všeobecný prípad  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s \neq 0$  možno vždy previesť na túto špeciálnu situáciu.

Nech teda  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \in \mathbf{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  a nech platí (20). Dokážeme najprv, že  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{s}$ , t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap M) \left( \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{s} \right| < \varepsilon \right).$$

<sup>17</sup>všimnime si, že na dôkaz tvrdenia (c) používame lemu .13(b), ktorá sama je špeciálnym prípadom tohto tvrdenia (ak jednu z funkcií  $f, g$  zvolíme konštantnú), túto situáciu dokazovania všeobecnejšieho tvrdenia pomocou jeho špeciálnych prípadov zažijeme častejšie

<sup>18</sup>Pre čitateľa ovšem nebude na škodu, ak skúsi dokázať tvrdenie (c) bez použitia všelijakých špinavých trikov obdobne ako sme dokazovali tvrdenie (a).

Nech je teda dané  $\varepsilon > 0$ , hľadáme  $P(a)$  požadovaných vlastností. Pretože  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s$ , existuje prstencové okolie  $P(a)$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in P(a) \cap M)(|g(x) - s| < K \cdot |s| \cdot \varepsilon). \quad (21)$$

Toto  $P(a)$  spĺňa naše požiadavky, pretože pre  $x \in P(a) \cap M$  podľa (20) a (21) platí

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{s} \right| = \left| \frac{s - g(x)}{s \cdot g(x)} \right| \leq \frac{|g(x) - s|}{K \cdot |s|} < \frac{K \cdot |s| \cdot \varepsilon}{K \cdot |s|} = \varepsilon.$$

Tým je dokázaná rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{s}$ . Keďže  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , podľa tvrdenia (c) tejto vety vyplýva z existencie konečných limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{s}$  rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$ , čím je naše tvrdenie – za doplňujúceho predpokladu (20) – dokázané.  $\triangle$

Nech sú teraz splnené len predpoklady bodu (d), tj.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \in \mathbf{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Potom  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = |s|$  (lema .13(e)), preto (podľa lemy .10(b)) existuje kladná konštanta  $K > 0$  a prstencové okolie  $\mathcal{S}$  bodu  $a$  tak, že

$$(\forall x \in \mathcal{S} \cap M)(|g(x)| > K).$$

Pre funkcie  $f_1 := f|_{\mathcal{S} \cap M}$ ,  $g_1 := g|_{\mathcal{S} \cap M}$  potom platí  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = r$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = s$  (lema .11(a)) a  $g_1$  spĺňa podmienku (20), preto podľa už dokázaného je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{r}{s}$ . Z lemy .11(b) potom – keďže funkcie  $\frac{f}{g}$  a  $\frac{f_1}{g_1}$  sa zhodujú na  $\mathcal{S} \cap M$  – vyplýva rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$ , ktorú sme chceli dokázať.

**Poznámka.** V prípade (a) možno predpoklad  $D(f) = D(g) = M$  z predchádzajúcej vety nahradiť všeobecnejším predpokladom  $a$  je hromadný bod množiny  $D(f + g)$  ( $= D(f) \cap D(g)$ ). Ak totiž položíme  $f_1 := f|_{D(f+g)}$ ,  $g_1 := g|_{D(f+g)}$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = r$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = s$  (lema .11(a)),  $D(f_1) = D(g_1)$ , podľa vety .15 teda platí  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + g_1(x)) = r + s$ , čo je ovšem (keďže  $f + g = f_1 + g_1$ ) to isté ako  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = r + s$ .

Podobne možno uvažovať aj v prípadoch (b), (c) a (d).

**.16 Cvičenie.** Bez použitia vety .12 dokážte rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  ( $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ ),  $\lim_{x \rightarrow a} x^{-n} = a^{-n}$  ( $a \in \mathbf{R} \setminus \{a\}, n \in \mathbf{N}$ ),  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{(z+1)^{n-1}} = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ).  $\spadesuit$

Zaoberajme sa teraz zloženou funkciou  $g \circ f$ .

:-) Predstavme si grafy funkcií  $g, f$  v podobe “šípka z bodu do funkčnej hodnoty” a funkciu  $g \circ f$  ako “cestovanie s prestupom”: z bodu  $x \in D(f)$  nás funkcia  $f$  dopraví do bodu  $f(x)$  a odtiaľ – ak  $f(x) \in D(g)$ , tj. ak  $x \in D(g \circ f)$  – nás  $g$  dopraví do bodu  $g(f(x))$ . Nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  (tj. nech šípky začínajúce v bodoch  $x \neq a$  stále bližších k  $a$  končia stále bližšie k bodu  $b$ ). Ak chceme, aby  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x)$  bola  $c$ , tj. aby nás funkcia  $g \circ f$  z čísel  $x \neq a$  čoraz bližších k  $a$  dopravila do čísel čoraz bližších k  $c$  (a vieme už, že “po prvej polovici cesty” (realizovanej funkciou  $f$ ) sa z čísel  $x \neq a$  blízkych k  $a$  dostaneme do čísel blízkych k  $b$ ), tak vidíme, že potrebujeme, aby funkcia  $g$  z čísel čoraz bližších k  $b$  dopravovala do čísel čoraz bližších k  $c$ . Je teda prirodzené požadovať, aby  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ .

Ak sa však – skôr než sa vydáme s funkciou  $g \circ f$  na cesty z bodov  $x \neq a$  blížiacich sa k  $a$  (prítom stále predpokladáme, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ) – ešte raz zamyslíme, zistíme, že na to, aby sme pri našom cestovaní končili čoraz bližšie k  $c$ , nestačí len predpoklad  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$  – ten totiž nekladie žiadnu podmienku na funkčnú hodnotu  $g(b)$ ; v prípade  $b \in D(g)$  teda nevieme, kam nás funkcia  $g$  z bodu  $b$  dopraví. Preto ak nechceme na ceste zažiť nečakané komplikácie, potrebujeme buď zabezpečiť, že pri cestovaní s funkciou  $g \circ f$  nebudeme prechádzať cez bod  $b$  (to zaručuje predpoklad (a) alebo (b) z nasledujúcej vety) alebo – ak sa už ceste cez  $b$  nemožno vyhnúť – potrebujeme podmienku “pre  $y \neq b$  blížiace sa k  $b$  sa  $g(y)$  blíži k  $c$ ” rozšíriť aj na  $y = b$ , čo je možné len pre  $g(y) = c$  (čo je podmienka (c) z nasledujúcej vety). (-:

**.17 Veta.** Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $g \circ f$ ,<sup>19</sup> nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbf{R}^*$ ,  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \in \mathbf{R}^*$ . Ak je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok

- (a)  $(\forall x \in D(f) \setminus \{a\})(f(x) \neq b)$ ;
- (b)  $b \notin D(g)$ ;
- (c)  $g(b) = c$ ;<sup>20</sup>

tak  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ .

<sup>19</sup>predpoklad, že  $a$  je hromadný bod množiny  $D(g \circ f)$ , nemožno vypustiť; tento fakt totiž vo všeobecnosti nemožno odvodiť z toho, že  $a$  je hromadný bod množiny  $D(f)$  a  $b$  je hromadný bod množiny  $D(g)$  (tieto dva predpoklady – ako sme si už zvykli – sú zahrnuté v požiadavke existencie limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$ )

<sup>20</sup>samozrejme, že v tomto prípade musíme predpokladať  $c \in \mathbf{R}$

**Dôkaz.** Chceme dokázať tvrdenie

$$(\forall O(c))(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap D(g \circ f))(g(f(x)) \in O(c)) \quad (22)$$

Nech je teda dané okolie  $O(c)$  bodu  $c$ , hľadáme okolie  $P(a)$  požadovaných vlastností. K  $O(c)$  existuje – pretože  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$  – prstencové okolie  $P(b)$  bodu  $b$  s vlastnosťou

$$y \in P(b) \cap D(g) \Rightarrow g(y) \in O(c) . \quad (23)$$

K okoliu  $O(b) := P(b) \cup \{b\}$  existuje – keďže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  – prstencové okolie  $P(a)$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$x \in P(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(b) . \quad (24)$$

Pre  $x \in D(g \circ f)$  je  $f(x) \in D(g)$ , z (24) preto vyplýva

$$x \in P(a) \cap D(g \circ f) \Rightarrow f(x) \in O(b) \cap D(g) . \quad (25)$$

:-) Potrebujeme dokázať implikáciu

$$x \in P(a) \cap D(g \circ f) \Rightarrow g(f(x)) \in O(c) ;$$

to by sa dalo urobiť “spojením” (25) a (23), keby ovšem na pravej strane implikácie (25) stála namiesto množiny  $O(b) \cap D(g)$  množina  $P(b) \cap D(g)$  (alebo keby naopak na ľavej strane implikácie (23) bolo  $O(b) \cap D(g)$ , a nie  $P(b) \cap D(g)$ ). (-:

Ak platí (a) alebo (b), tak z (25) vyplýva

$$x \in P(a) \cap D(g \circ f) \Rightarrow f(x) \in P(b) \cap D(g) ; \quad (26)$$

z (26) a (23) už vidno, že potom  $P(a)$  má skutočne vlastnosť požadovanú v (22).

Ak je splnený predpoklad (c), tak z (23) vyplýva

$$y \in O(b) \cap D(g) \Rightarrow g(y) \in O(c) \quad (27)$$

a z (25) a (27) opäť vidno, že  $P(a)$  je hľadané prstencové okolie.

**Poznámka. 1.** Z tvrdenia (b) lemy .11 vyplýva, že veta .17 zostane v platnosti, ak podmienku (a) nahradíme predpokladom

(a') *existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  tak, že*

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f))(f(x) \neq b) .$$

(Ak totiž označíme  $f_1 := f|_{\mathcal{P} \cap D(f)}$ , možno na funkcie  $f_1$  a  $g$  aplikovať vetu .17 ( $f_1$  spĺňa teraz predpoklad (a)), podľa ktorej  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f_1)(x) = c$ . Pretože  $g \circ f_1 = (g \circ f)|_{\mathcal{P} \cap D(g \circ f)}$ , platí podľa lemy .11(b) aj rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ .)

**2.** V úvahách o limitách postupností viackrát použijeme tvrdenie *ak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbf{R}^*$ , tak aj  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$*  (kde  $k$  je niektoré celé číslo), ktoré síce možno odvodiť z vety o limite zloženej funkcie, ale – vzhľadom na jeho jednoduchosť – za prirodzenejšie považujeme dokázať ho samostatne (čo ako zvyčajne prenechávame na čitateľa).

**Príklad.** Na vete .17 sa (okrem iného) zakladá použitie substitúcií pri hľadaní limit; predvedme to na výpočte limity  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ).

Skúsme (v snahe zbaviť sa odmocnín a v nádeji, že nám to nejak pomôže) položiť  $y = \sqrt[n]{x} - 1$ ; potom  $\sqrt[n]{x} = y + 1$ ,  $x = (y + 1)^n$  a limitovaný výraz zapísaný pomocou  $y$  má podobu  $\frac{y}{(y+1)^n - 1}$ . Našu pôvodnú funkciu  $h(x) = \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$  môžeme teraz zapísať v tvare  $h = g \circ f$ , kde  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $g(y) = \frac{y}{(y+1)^n - 1}$ . Pretože  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$  (veta .12) a  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \frac{1}{n}$  (cvičenie .16), vyplýva z vety .17 (oprávnenie na jej použitie je dané splnením podmienky (a): funkcia  $f$  je totiž prostá a  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ) rovnosť  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y)$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1} = \left| \sqrt[n]{x} - 1 = y \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(y+1)^n - 1} = \frac{1}{n} .$$

Teda použitím substitúcie  $y = f(x)$  limitovanú funkciu  $h$  napíšeme v tvare  $h = g \circ f$  a veta .17 nám potom (pokiaľ budeme oprávnení ju použiť) umožní previesť hľadanie limity funkcie  $h = g \circ f$  na hľadanie limity vonkajšej zložky  $g$ . ♠

Informácie o limite podielu dvoch funkcií z tvrdenia (d) vety .15 doplníme ešte nasledujúcim poznatkom.

**.18 Veta.** (a) *Nech*  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ . *Potom*  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

(b) *Nech*  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . *Ak funkcia*  $f$  *je nezáporná (nekladná) na niektorom prstencovom okolí*  $\mathcal{P}$  *bod*  $a$  *a bod*  $a$  *je hromadný bod množiny*  $D\left(\frac{1}{f}\right)$ , *tak*  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$   $\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty\right)$ .

**Dôkaz.** (b) Dokážeme najprv, že  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ , tj. že

$$(\forall K \in \mathbf{R})(\exists P(a)) \left( \forall x \in P(a) \cap D\left(\frac{1}{|f|}\right) \left( \frac{1}{|f(x)|} > K \right) \right). \quad (28)$$

Zvoľme teda  $K$  a hľadáme príslušné prstencové okolie  $P(a)$ . Ak  $K \leq 0$ , vyhovuje požiadavkám tvrdenia (28) každé prstencové okolie  $P(a)$  (pre všetky  $x \in D\left(\frac{1}{|f|}\right)$  totiž platí  $\frac{1}{|f(x)|} > 0 \geq K$ ).

Nech teraz  $K > 0$ . K číslu  $\frac{1}{K}$  existuje (pretože  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ) prstencové okolie  $P(a)$  tak, že

$$(\forall x \in P(a) \cap D(f)) \left( |f(x)| < \frac{1}{K} \right).$$

Z tejto nerovnosti vyplýva

$$\left( \forall x \in P(a) \cap D\left(\frac{1}{f}\right) \left( \frac{1}{|f(x)|} > K \right) \right),$$

čo znamená, že  $P(a)$  je prstencové okolie s vlastnosťou požadovanou v (28), a teda skutočne platí rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ .  $\triangle$

Teraz už ľahko dokážeme tvrdenie (b). Ak

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f))(f(x) \geq 0),$$

možno použiť tvrdenie (b) lemy .11: funkcie  $\frac{1}{f}$  a  $\frac{1}{|f|}$  sa zhodujú na prstencovom okolí  $\mathcal{P}$ , preto  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ .

Ak

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f))(f(x) \leq 0),$$

tak sa na prstencovom okolí  $\mathcal{P}$  zhodujú funkcie  $\frac{1}{f}$  a  $-\frac{1}{|f|}$ , a preto platí  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = -\infty$  (prvá rovnosť vyplýva z lemy .11(b), druhá z lemy .13(f)).  $\spadesuit$

Naším ďalším cieľom je dokázať analógiu tvrdení (a), (b) a (c) vety .15 pre prípad, že aspoň jedna z limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  je nevlastná.

**.19 Lema.** *Nech*  $M$  *je definičný obor funkcií*  $f, g$ . *Ak*  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  *a*

$$(\forall x \in M \setminus \{a\})(f(x) \leq g(x)), \quad (29)$$

*tak existuje aj*  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  *a rovná sa*  $\infty$ .

**Dôkaz.** Realizáciu elementárneho dôkazu, založeného na úvahe *ak pre*  $x \in P(a) \cap M$  *platí*  $f(x) > K$ , *tak z* (29) *vyplýva, že pre tie isté*  $x$  *platí aj*  $g(x) > K$ , *prenechávame čitateľovi.*

**Poznámka. 1.** Z časti (b) lemy .11 vyplýva – podobne ako už viackrát predtým – že tvrdenie predchádzajúcej lemy zostane v platnosti, ak podmienku (29) nahradíme podmienkou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap M)(f(x) \leq g(x)),$$

kde  $\mathcal{P}$  je niektoré prstencové okolie bodu  $a$ .

**2.** Čitateľovi by nemalo robiť ťažkosť dokázať (buď kopírovaním dôkazu lemy .19 alebo aplikáciou jej tvrdenia na funkcie  $-f, -g$ ) toto tvrdenie:

*Nech*  $M$  *je definičný obor funkcií*  $f, g$ . *Ak*  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  *a*  $(\forall x \in \mathcal{P} \cap M)(f(x) \geq g(x))$  *– kde*  $\mathcal{P}$  *je niektoré prstencové okolie bodu*  $a$  *– tak*  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ .

**.20 Veta.** Nech funkcie  $f, g$  sú definované na množine  $M$ .

(a) Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  a funkcia  $g$  je zdola ohraničená na niektorom prstencovom okolí  $\mathcal{P}$  bodu  $a$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$ .

(b) Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  a funkcia  $g$  je na niektorom prstencovom okolí  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  zdola ohraničená kladnou konštantou, tak  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \infty$ .

**Dôkaz.** (b) Nech  $k > 0$  je číslo také, že

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap M)(g(x) > k > 0) \quad (30)$$

Pretože  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , existuje podľa tvrdenia (b) lemy .11 prstencové okolie  $\mathcal{S}$  bodu  $a$  tak, že

$$(\forall x \in \mathcal{S} \cap M)(f(x) > 0) . \quad (31)$$

Potom  $\mathcal{R} := \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$  je prstencové okolie bodu  $a$  (lema .8(a)) také, že pre  $x \in \mathcal{R} \cap M$  platia nerovnosti  $g(x) > k$  a  $f(x) > 0$  súčasne (prvá z nich vyplýva z inklúzie  $\mathcal{R} \cap M \subset \mathcal{P} \cap M$  a z (30), druhá z inklúzie  $\mathcal{R} \cap M \subset \mathcal{S} \cap M$  a (31)). Jednoduchá úvaha ak  $g(x) > k$  a  $f(x) > 0$ , tak  $f(x)g(x) > k \cdot f(x)$  potom implikuje

$$(\forall x \in \mathcal{R} \cap M)(f(x)g(x) > k \cdot f(x)) . \quad (32)$$

Teraz je už všetko dostatočne pripravené na použitie tvrdenia z poznámky za lemov .19: pretože  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = \infty$  (lema .13(d)); vyplýva z nerovnosti (32), že  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \infty$ , čo sme chceli dokázať.  $\Delta$

Z práve dokázanej vety možno odvodiť ďalšie “pravidlá pre počítanie s nevlastnými limitami”, ktoré zapíšeme v nasledujúcej symbolickej podobe:

$$\left. \begin{array}{lll} \infty + b = \infty & \infty \cdot b = \infty \text{ pre } b > 0 & \infty \cdot \infty = \infty \\ -\infty + b = -\infty & \infty \cdot b = -\infty \text{ pre } b < 0 & \infty \cdot (-\infty) = -\infty \\ \infty + \infty = \infty & (-\infty) \cdot b = -\infty \text{ pre } b > 0 & (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty \\ -\infty - \infty = -\infty & (-\infty) \cdot b = \infty \text{ pre } b < 0 & \end{array} \right\} \quad (33)$$

Pritom napr. zápis  $\infty \cdot b = \infty$  pre  $b > 0$  tu chápeme ako symbolickú skratku tvrdenia

Nech funkcie  $f, g$  sú definované na množine  $M$ , nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b > 0$ . Potom  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \infty$ .

Nasledujúci dôkaz tohto tvrdenia je príkladom úvah, ktorými možno dokázať výroky obsiahnuté v (33).

Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b > 0$ , je funkcia  $g$  v niektorom prstencovom okolí  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  zdola ohraničená kladnou konštantou (lema .10(b)), z vety .20 potom vyplýva  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \infty$ .

Zvyšné tvrdenia obsiahnuté v strednom stĺpci (33) môžeme dokázať podobne alebo ich odvodiť z práve dokázaného použitím lemy .13(f) (obtiaznosť je v oboch prípadoch rovnaká, tj. žiadna). Dokumentujme stručne druhý z navrhnutých postupov na dôkaze pravidla  $\infty \cdot b = -\infty$  pre  $b < 0$ . Nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b < 0$ . Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} (-g(x)) = -b > 0$ , platí  $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot (-g(x))) = \infty$  (prvá rovnosť by mala byť zrejma, druhá vyplýva z už dokázaného tvrdenia  $\infty \cdot b = \infty$  pre  $b > 0$ ), podľa .13(f) je potom  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = -\infty$ .

**.21 Cvičenie.** Dokážte rovnosti  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } n \text{ párne} \\ -\infty & \text{pre } n \text{ nepárne} \end{cases}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  ( $n \in \mathbf{N}$ ).

**.22 Neurčité výrazy. Limita  $\frac{1}{0}$ .** Ak teraz urobíme dôkladnú inventúru, zistíme, že naša zbierka viet o výpočte limit funkcií  $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$  pomocou limit funkcií  $f, g$  nie je kompletná – nedoriešili sme úplne prípad  $\frac{1}{0}$  (“nakúsnutý” vo vete .18(b)) a nevyslovili sme žiadne všeobecné tvrdenia o limitách typu  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ <sup>21</sup> (v tomto zozname chýbajúcich tvrdení vedome neuvádzame typy  $0 \cdot (-\infty), \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}$

<sup>21</sup>čitateľovi je iste jasné, že napr. pod limitou typu  $\frac{r}{s}$  (kde  $r, s \in \mathbf{R}^*$ ) rozumieme limitu funkcie  $\frac{f}{g}$  takej, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s$

a  $\frac{-\infty}{\infty}$ , keďže skúmanie každého z nich možno použitím lemy .13(f) previesť na skúmanie prípadu  $0 \cdot \infty$ , resp.  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Dokončíme najprv náš rozbor prípadu  $\frac{1}{0}$ , tj. hľadania  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$  za predpokladu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . Ak  $a$  je hromadný bod množiny  $D\left(\frac{1}{f}\right)$  (inak by o limite funkcie  $\frac{1}{f}$  v bode  $a$  nemalo ani zmysel uvažovať), nastane práve jedna z troch možností<sup>22</sup>

- funkcia  $f$  je nezáporná v niektorom prstencovom okolí bodu  $a$ ;
- funkcia  $f$  je nekladná v niektorom prstencovom okolí bodu  $a$ ;
- v každom prstencovom okolí bodu  $a$  nadobúda funkcia  $f$  kladné aj záporné hodnoty.

V prvom z týchto prípadov – ako už vieme – platí (veta .18(b))  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , v druhom  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ . Dokážeme, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  neexistuje, ak nastane tretí prípad; vtedy je totiž číslo  $a$  hromadným bodom množiny  $M_1 := \{x \in D(f) ; f(x) > 0\}$  aj množiny  $M_2 := \{x \in D(f) ; f(x) < 0\}$ . Pre  $f_1 := f|_{M_1}$  potom platí  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = 0$  (lema .11(a)) a  $(\forall x \in D(f_1))(f_1(x) > 0)$ , preto podľa vety .18(b) je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f_1(x)} = \infty$ ; pre funkciu  $f_2 := f|_{M_2}$  ale z analogických úvah dostávame  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f_2(x)} = -\infty$ . Z lemy .11(c) potom vyplýva, že limita  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$  nemôže existovať.  $\Delta$

Vráťme sa teraz k prípadom  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ . Nasledujúce (prudko elementárne) príklady ukazujú (po doplnení čitateľom), že nemôže existovať žiadne všeobecné tvrdenie, ktoré by umožňovalo nájsť limitu typu  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  len na základe znalostí limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ; preto sa limity uvedených typov niekedy nazývajú *neurčité výrazy*.

Začnime prípadom  $\infty - \infty$ , limity v nasledujúcej tabuľke uvažujeme v bode  $a = \infty$ .

funkcia $f$	funkcia $g$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$
$f(x) = x^2$	$g(x) = x$	$\infty$
$f(x) = x$	$g(x) = x^2$	$-\infty$
$f(x) = x + b$	$g(x) = x$	$b \in \mathbf{R}$
$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ x, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$	$g(x) = x$	neexistuje

Presvedčme sa, že funkcia  $f$  v poslednom riadku prvého stĺpca tejto tabuľky má skutočne v bode  $\infty$  limitu  $\infty$  (u ostatných funkcií z prvých dvoch stĺpcov by to malo byť zrejmé): pretože pre všetky  $x \geq 1$  je  $x^2 \geq x$ , platí pre všetky  $x$  z intervalu  $(1, \infty)$  (ktorý je prstencovým okolím bodu  $\infty$ ) nerovnosť  $f(x) \geq x$ , z lemy .19 (a z poznámky za ňou) potom vyplýva rovnosť  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Preverme ešte správnosť údajov v poslednom stĺpci:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x(x - 1)) = \infty$ , posledná rovnosť vyplýva z pravidla  $\infty \cdot \infty = \infty$  z (33), keďže  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1) = \infty$ ;
- z práve dokázaného a z lemy .13(f) vyplýva  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2) = -\infty$ ;
- overovanie tvrdenia ďalšieho riadku je pod našu dôstojnosť;
- neexistencia limity  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$  v poslednom riadku vyplýva z lemy .11(c): pre  $x \in \mathbf{Q}$  je  $f(x) - g(x) = x^2 - x$ , teda pre  $f_1 := (f - g)|_{\mathbf{Q}}$  je  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \infty$ <sup>23</sup>; pre  $x \notin \mathbf{Q}$  je  $f(x) - g(x) \equiv 0$ , teda pre  $f_2 := (f - g)|_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}$  je  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0$ , podľa lemy .11(c) teda  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$  nemôže existovať.  $\Delta$

Uveďme ešte príklady pre prípad  $0 \cdot \infty$ , všetky limity v nasledujúcej tabuľke opäť uvažujeme v bode  $a = \infty$ .

funkcia $f$	funkcia $g$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2$	$\infty$
$f(x) = -\frac{1}{x}$	$g(x) = x^2$	$-\infty$
$f(x) = \frac{b}{x}$	$g(x) = x$	$b \in \mathbf{R}$
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$	$g(x) = x$	neexistuje

<sup>22</sup>treba si uvedomiť, že dôkaz faktu, že nemôže súčasne nastať prvá aj druhá z nasledujúcich možností, je založený práve na predpoklade  $a$  je hromadný bod množiny  $D\left(\frac{1}{f}\right)$

<sup>23</sup>doplňme podrobné zdôvodnenie (ktoré už v prípade funkcie  $f_2$  prenecháme na čitateľa): rovnosť  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \infty$  vyplýva z už dokázanej rovnosti  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \infty$  a lemy .11(a)

Preverenie správnosti údajov tejto tabuľky už prenechávame na čitateľa (napoviem len, že rovnosť  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , kde  $f$  je funkcia z posledného riadku prvého stĺpca, vyplýva na základe vety .18(a) z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$ , ktorú sme dokázali v súvislosti s predchádzajúcou tabuľkou <sup>24</sup>) rovnako ako vymýšľanie podobných tabuliek pre prípady  $\frac{0}{0}$  a  $\frac{\infty}{\infty}$ . K prípadu  $\frac{\infty}{\infty}$  ešte jedno upozornenie: pokusy vymyslieť dvojicu funkcií  $f, g$  definovaných na  $M$  tak, aby  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  bola záporná alebo  $-\infty$ , sú beznadéjné. Z lemy .10(c) by potom totiž vyplývalo, že funkcia  $\frac{f}{g}$  nadobúda v niektorom prstencovom okolí  $P_1$  bodu  $a$  len záporné hodnoty, zatiaľčo z predpokladov  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  by podľa lemy .10(b) súčasne vyplývalo, že v niektorom prstencovom okolí  $P_2$ , resp.  $P_3$ , bodu  $a$  nadobúda funkcia  $f$ , resp. funkcia  $g$ , len kladné hodnoty. Pre prvky neprázdnej množiny  $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap M$  by potom museli súčasne platiť nerovnosti  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  a  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ , čo zrejme nie je možné. ♠

Na záver tohto odseku venujme ešte trocha miesta otázke existencie limity súčtu, resp. súčiny v prípade, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbf{R}^*$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  neexistuje.

Pokiaľ  $b \in \mathbf{R}$ , dáva odpoveď (úplnú pre prípad súčtu a čiastočnú pre prípad súčiny) nasledujúca lema.

**.23 Lemma.** *Nech funkcie  $f$  a  $g$  sú definované na množine  $M$ , nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbf{R}$ . Potom*

- (a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  existuje práve vtedy, keď existuje  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ;
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$  existuje práve vtedy, keď existuje  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

**Dôkaz.** (a) Implikácia " $\Leftarrow$ " je v prípade konečnej  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  obsahom tvrdenia (a) vety .15, v prípade nekonečnej  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  vyplýva z prvých dvoch tvrdení prvého stĺpca tabuľky (33). Implikácia " $\Rightarrow$ " je rovnako elementárna: ak existuje  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =: r \in \mathbf{R}^*$  a konečná  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , tak z rovnosti  $g = (f + g) - f$  vyplýva existencia limity  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  na základe .15(b) (pre prípad  $r \in \mathbf{R}$ ), resp. podľa prvých dvoch tvrdení <sup>25</sup> v prvom stĺpci tabuľky (33) (pre prípady  $r = \infty$  a  $r = -\infty$ ).

**Poznámka.** Tvrdenie (a) predchádzajúcej lemy možno zrejme ešte doplniť informáciou, že  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  – pokiaľ existujú – sú buď obidve  $\infty$  alebo obidve  $-\infty$  alebo obidve konečné. Podobne možno doplniť tvrdenie (b) poznatkom (nie veľmi prekvapujúcim), že pokiaľ limity  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existujú, sú buď obidve nevlastné alebo obidve konečné.  $\Delta$

Postačujúce podmienky existencie limity  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$  v prípade, že jedna z funkcií  $f, g$  nemá v bode  $a$  limitu, sú sformulované vo vetách .14 a .20.

Príklady z tabuľky (35) ukazujú, že pokiaľ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  síce existuje, ale funkcia  $g$  nespĺňa predpoklady vety .14 (čo – ako vyplýva z lemy .10(a) – je možné len v prípade, že  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  je nevlastná), nemožno už vo všeobecnosti o existencii limity  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$  nič povedať. (Podobne súvisia príklady z tabuľky (35) s vetou .20(a).)

Len pre zaujímavosť (pre naše ďalšie úvahy to totiž nemá nejaký veľký význam) uveďme ešte príklady ukazujúce, že rozhodnúť vo všeobecnosti o existencii či neexistencii limity  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$  nemožno ani v prípade, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , funkcia  $g$  nespĺňa predpoklady vety .14 a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  neexistuje. Položme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

a za  $g$  postupne voľme funkcie

$$g_1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -x^3, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}, \quad g_2(x) = -g_1(x), \quad g_3(x) = \begin{cases} bx^2, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -bx^2, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases},$$

$$g_4(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -x, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}, \quad g_5(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ bx^2, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

(v prípade funkcie  $g_3$  predpokladáme  $b \neq 0$ , v prípade  $g_5$  nech  $a > 0 > b$ ); z tvrdenia lemy .11(d) vyplýva, že ani jedna z funkcií  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  nemá v bode  $\infty$  limitu. Platí ale  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g_1(x)) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g_2(x)) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g_3(x)) = b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g_4(x)) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g_5(x))$  neexistuje <sup>26</sup>.

<sup>24</sup>prezradíme ešte viac: naša funkcia  $\frac{1}{x}$  sa na  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  zhoduje s funkciou v poslednom riadku prvého stĺpca tabuľky (34)

<sup>25</sup>a keď chceme byť úplne (ubíjajúco) podrobní, tak ešte aj podľa tvrdenia (b) lemy .13, umožňujúceho previesť limitu rozdielu na limitu súčtu

<sup>26</sup>Čitateľ nech sa nedá klamať tým, že pri tvorbe našich príkladov sa kľúčovite pridržiavame schémy " $f(x) =$  niečo pre  $x \in \mathbf{Q}$  a niečo iné pre  $x \notin \mathbf{Q}$ ". V uvedených príkladoch by sme namiesto  $x \in \mathbf{Q}, x \notin \mathbf{Q}$  mohli písať napr.  $x \in \mathbf{N}$  je párne,  $x \in \mathbf{N}$  je nepárne (tj. uvádzať príklady postupností, lebo aj to sú funkcie) alebo  $[x]$  je párna,  $[x]$  je nepárna (kde  $[.]$  označuje celú časť) alebo aj horšie veci, ale také, ktoré nám umožňujú použiť tvrdenia (c) a (d) lemy .11.

Čitateľ sa sám môže presvedčiť, že podobná situácia nastane aj v prípade vety .20.

### 3 O nerovnostiach a limitách

Aby sme sprehľadnili zápis nasledujúcej vety, označme znakom  $\prec$  usporiadanie na  $\mathbf{R}^*$ , ktoré vznikne prirodzeným rozšírením usporiadania  $<$  definovaného na  $\mathbf{R}$ ; tj. pre  $a, b \in \mathbf{R}$  je  $a \prec b$  práve vtedy, keď  $a < b$ , a navyiac platí  $-\infty \prec a \prec \infty$  pre každé  $a \in \mathbf{R}$ .

**.24 Veta.** *Nech funkcie  $f, g$  sú definované na množine  $M$ . Ak existujú limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: r \in \mathbf{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) := s \in \mathbf{R}^*$  a pre niektoré prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  platí*

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap M)(f(x) \leq g(x)) , \quad (36)$$

tak platí aj nerovnosť

$$r \preceq s , \quad \text{tj.} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \preceq \lim_{x \rightarrow a} g(x) .$$

**Dôkaz.** Sporom; predpokladajme, že  $r \succ s$ . Potom existujú okolie  $O(r)$  bodu  $r$  a okolie  $O(s)$  bodu  $s$  s vlastnosťou

$$y \in O(r) \wedge z \in O(s) \Rightarrow y > z \quad (37)$$

(tj.  $O(r)$  a  $O(s)$  sú disjunktné množiny a  $O(r)$  “leží vpravo” od množiny  $O(s)$ ).

Pretože  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$ , existuje k okoliu  $O(r)$  z (37) prstencové okolie  $P_1(a)$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$x \in P_1(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in O(r) ; \quad (38)$$

podobne k okoliu  $O(s)$  z (37) existuje prstencové okolie  $P_2(a)$  bodu  $a$ , pre ktoré platí

$$x \in P_2(a) \cap M \Rightarrow g(x) \in O(s) . \quad (39)$$

Pretože pre ľubovoľný prvok  $x$  neprázdnej množiny  $A := \mathcal{P} \cap P_1(a) \cap P_2(a) \cap M$  platí súčasne  $x \in P_1(a) \cap M$  aj  $x \in P_2(a) \cap M$ , z (38) a (39) vyplýva

$$(\forall x \in A)(f(x) \in O(r) \wedge g(x) \in O(s)) ,$$

z (37) potom dostávame

$$(\forall x \in A)(f(x) > g(x)) . \quad (40)$$

Súčasne ale  $A \subset \mathcal{P} \cap M$  a z (36) teda vyplýva

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap P_1(a) \cap P_2(a) \cap M)(f(x) < g(x)) ,$$

čo – keďže  $A \neq \emptyset$  – je spor s (40).

**Poznámka.** Jednoduchý príklad  $f(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  – kedy platí  $(\forall x \in (0, \infty))(f(x) < g(x))$ , ale  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  – ukazuje, že pokiaľ v predpoklade (36) nahradíme neostrú nerovnosť  $\leq$  ostrou nerovnosťou  $<$ , nemusí odtiaľ ešte vyplývať, že aj nerovnosť medzi limitami by sa musela zmeniť na ostrú. ♠

Lema .19 ukazuje, že v práve dokázanom tvrdení možno v prípade  $r = \infty$  predpoklad existencie limity  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  vypustiť (podobne možno podľa poznámky za lemu .19 vypustiť predpoklad existencie limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  v prípade  $s = -\infty$ ). Analógiou tejto lemy pre prípad konečných limít je nasledujúca veta.

**.25 Veta.** *Nech funkcie  $f, g, h$  sú definované na množine  $M$ . Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \in \mathbf{R}$  a pre niektoré prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  platí*

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap M)(f(x) \leq g(x) \leq h(x)) ,$$

tak existuje aj  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  a rovná sa  $b$ .



**Dôkaz.** <sup>27</sup> Označme  $F := h - f, G := h - g$ , z predpokladov našej vety potom dostávame  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  (veta .15(b)) a

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap M)(0 \leq G(x) \leq F(x)). \quad (41)$$

Teraz stačí dokázať rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = 0$ , pretože z existencie konečných limit  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$  bude podľa vety .15(a) vyplývať rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (G(x) + h(x)) = b$ , ktorú sme chceli dokázať.

Chceme teda dokázať výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P(a))(\forall x \in P(a) \cap M)(|G(x)| < \varepsilon). \quad (42)$$

Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ , existuje k okoliu  $O_\varepsilon(0)$  bodu 0 prstencové okolie  $P_1(a)$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in P_1(a) \cap M)(|F(x)| < \varepsilon). \quad (43)$$

Čitateľ teraz na základe (41) a (43) ľahko overí, že prstencové okolie  $P(a) := P_1(a) \cap \mathcal{P}$  má vlastnosť požadovanú v (42).

**.26 Príklad** (klasický <sup>28</sup>). Ak  $a > 0$ , tak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**Riešenie.** Pre  $a = 1$  je tvrdenie zrejme pravdivé <sup>29</sup>. Predpokladajme teraz  $a > 1$ . Potom  $\sqrt[n]{a} > 1$  pre všetky  $n \in \mathbf{N}$  (to vyplýva z tvrdenia  $ak \ b \in [0, 1]$ , tak  $(\forall n \in \mathbf{N})(b^n \leq 1)$ , ktoré možno dokázať indukciou), a existuje teda nezáporná postupnosť  $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$  definovaná rovnosťou

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \omega_n. \quad (44)$$

Potom

$$a = (1 + \omega_n)^n = 1 + n\omega_n + \binom{n}{2}\omega_n^2 + \dots + \omega_n^n. \quad (45)$$

Z nerovnosti  $\omega_n \geq 0$  potom vyplýva, že pravá strana rovnosti (45) sa vynechaním členov  $\binom{n}{2}\omega_n^2, \dots, \omega_n^n$  nemôže zväčšiť, preto

$$a \geq 1 + n\omega_n,$$

a teda

$$0 \leq \omega_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Keďže  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} = 0$ , vyplýva z vety .25 (v ktorej položíme  $M = \mathbf{N}, f(n) \equiv 0, g(n) = \omega_n, h(n) = \frac{a-1}{n}$ ) rovnosť  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$  a z (44) dostávame (veta .15(a))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \omega_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 1.$$

Zostáva dokázať naše tvrdenie pre prípad  $a \in (0, 1)$ . Označme  $b := \frac{1}{a}$ . Potom  $b > 1$  a podľa už dokázaného je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$ . Z rovnosti  $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$  potom podľa vety .15(c) vyplýva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

<sup>27</sup>ako uvidíme, tento dôkaz bude opäť názorným príkladom dokazovania všeobecnejšieho tvrdenia pomocou niektorého jeho špeciálneho prípadu

<sup>28</sup>ak ho v niektorej učebnici diferenciálneho počtu nenájdete, je to dôvod na vyšetrovanie, prečo tam nie je a ako sa bez neho autor zaobišiel

<sup>29</sup>nedôverčivý čitateľ môže zvrat je zrejme pravdivé nahradiť slovami vyplýva z lemy .13(a) a lemy .11(a)

## 4 Limity monotónnych funkcií

(-) Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je rastúca zhora ohraničená postupnosť, označme  $b := \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$ . Ak čísla  $a_n$  budeme postupne zakresľovať na číselnú os, tak každé nasledujúce bude ležať napravo od všetkých už zakreslených a naľavo od  $b$  (tj. pre rastúce  $n$  budú čísla  $a_n$  postupovať doprava, ale neprekročia  $b$ ). Ak si teraz zvolíme  $\varepsilon > 0$ , musí niektoré z čísel  $a_n$  ležať v intervale  $(b - \varepsilon, b]$  (pretože inak by  $b$  nebolo suprémom), nech je to  $a_N$ . Potom všetky za ním nasledujúce členy postupnosti už tiež ležia v tomto intervale, pretože ležia napravo od  $a_N$  a naľavo od  $b$  (teda akonáhle čísla  $a_n$  pri svojom pochode vpravo vstúpia do intervalu  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  – a raz tam vstúpiť musia, keďže  $b = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$  – tak tam už zostanú). Z týchto úvah ale vyplýva, že  $b$  je limitou postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Všeobecnejšej formulácii uvedeného faktu a jeho dôsledkom je venovaný tento odsek. (-)

**.27 Definícia.** Nech  $f$  je funkcia definovaná na  $M$ . Ak bod  $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$  je hromadný bod množiny  $M_+ := M \cap (a, \infty)$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) =: b \in \mathbf{R}^*$ , kde  $f_1 := f|_{M_+}$ , nazýva sa číslo  $b$  *limita funkcia  $f$  v bode  $a$  sprava* a označuje sa  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ .

Definíciu *limity funkcie  $f$  v bode  $a$  zľava* (ktorú označujeme  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ) dostaneme, ak v práve uvedenej definícii nahradíme predpoklad  $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$  inklúziou  $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ , množinu  $M_+$  množinou  $M_- := M \cap (-\infty, a)$  a funkciu  $f_1$  funkciou  $f_2 := f|_{M_-}$ .

Limity sprava a zľava sa súhrne označujú ako *jednostranné limity*.

**Poznámka.** Zrejme pre  $a = \infty$  sú pojmy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  totožné (podobne pre  $a = -\infty$  pojmy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ). Všeobecnejšie, ak  $M \cap (-\infty, a) = M$ , tak pojmy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  splývajú (obdobná poznámka sa vzťahuje na limity sprava).♠

Keďže  $M_+ \cup M_- = D(f) \setminus \{a\}$ , je nasledujúce tvrdenie dôsledkom častí (a) a (d) lemy .11 (a poznámky 2 za ňou).

**.28 Lema.** Nech funkcia  $f$  je definovaná na množine  $M$  a bod  $a \in \mathbf{R}$  je hromadný bod množín  $M_+ := M \cap (a, \infty)$ ,  $M_- := M \cap (-\infty, a)$ . Potom  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existuje práve vtedy, keď v bode  $a$  existujú obidve jednostranné limity funkcie  $f$  a rovnajú sa. Limitou funkcie  $f$  v bode  $a$  je v takom prípade spoločná hodnota jednostranných limit.♠

Skôr ako vyslovíme nasledujúce tvrdenie, zastavme sa ešte pri jednej drobnosti. Výrok  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$  ( $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}, b \in \mathbf{R}^*$ ) hovorí, že

$$(\forall O(b)) (\exists P(a)) (\forall x \in D(f)) (x \in P(a) \cap (-\infty, a) \Rightarrow f(x) \in O(b)) . \quad (46)$$

Tento všeobecný zápis možno opäť v jednotlivých prípadoch nahradiť konkrétnejším; napr. pre  $a, b \in \mathbf{R}$  zápisom

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D(f)) (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

alebo pre  $a \in \mathbf{R}, b = \infty$  zápisom

$$(\forall K \in \mathbf{R}) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D(f)) (a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > K) .$$

Pre potreby nasledujúceho dôkazu podobu výroku (46), ktorá je na náš vkus už priveľmi zaťažovaná symbolmi, trochu zjednodušíme. Keďže  $P(a) \cap (-\infty, a)$  je interval, ktorý (ak považujeme  $a$  za dané) je jednoznačne určený svojím ľavým koncovým bodom  $\xi$ , možno (46) prepísať do podoby

$$(\forall O(b)) (\exists \xi < a) (\forall x \in D(f)) (\xi < x < a \Rightarrow f(x) \in O(b)) . \quad (47)$$

**.29 Veta.** Ak  $f$  je monotónna funkcia definovaná na  $M$  a  $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  je hromadný bod množiny  $M_- := M \cap (-\infty, a)$ , tak existuje  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ . Pritom platí

(a) ak  $f$  je neklesajúca a na množine  $M_-$  zhora ohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \sup_{x \in M_-} f(x) ;$$

(b) ak  $f$  je neklesajúca a na množine  $M_-$  zhora neohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty ;$$

(c) ak  $f$  je nerastúca a na množine  $M_-$  zdola ohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \inf_{x \in M_-} f(x) ;$$

(d) ak  $f$  je nerastúca a na množine  $M_-$  zdola neohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty .$$

**Dôkaz.** (a) Označme  $b := \sup_{x \in M_-} f(x)$ . Chceme dokázať, že  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ , tj. (pozri (47)), že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \xi < a)(\forall x \in M)(\xi < x < a \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon) \quad (48)$$

(pre istotu vysvetlime, že okolie  $O(b)$  sme popísali jeho polomerom  $\varepsilon$  a inklúzia  $f(x) \in O(b)$  získala tak podobu  $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ ).

Nech je teda dané  $\varepsilon > 0$ , hľadáme  $\xi$  s uvedenou vlastnosťou. Keďže  $b = \sup_{x \in M_-} f(x)$ , vyplýva z definície suprema funkcie, že k nášmu  $\varepsilon > 0$  existuje  $\xi \in M_-$  tak, že  $f(\xi) > b - \varepsilon$ . Ukážeme, že toto  $\xi$  vyhovuje našim požiadavkám:

Keďže  $\xi \in M_-$ , je zrejme  $\xi < a$ . Pretože funkcia  $f$  je neklesajúca, platí

$$(\forall x \in M)(\xi < x \Rightarrow f(\xi) < f(x))$$

z nerovnosti  $f(\xi) > b - \varepsilon$  potom dostávame

$$(\forall x \in M)(\xi < x \Rightarrow b - \varepsilon < f(x)) . \quad (49)$$

Na druhej strane, z rovnosti  $b = \sup_{x \in M_-} f(x)$  vyplýva  $(\forall x \in M_-)(f(x) \leq b)$ , čo môžeme zapísať v podobe

$$(\forall x \in M)(x < a \Rightarrow f(x) \leq b) \quad (50)$$

Z (49) a (50) vyplýva

$$(\forall x \in M)(\xi < x < a \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) \leq b) ,$$

odkiaľ už vidno, že  $\xi$  spĺňa dokonca trochu viac, než požaduje (48).  $\Delta$

Dôkaz tvrdenia (b) je obdobný a prenechávame ho na čitateľa; pripomeňme len, že treba dokázať

$$(\forall K \in \mathbf{R})(\exists \xi < a)(\forall x \in M)(\xi < x < a \Rightarrow f(x) > K)$$

a že výrok *funkcia  $f$  je na  $M_-$  zhora neohraničená* možno zapísať v podobe

$$(\forall K \in \mathbf{R})(\exists \xi \in M_-)(f(\xi) > K)$$

(tú sme získali negáciou výroku  $(\exists K \in \mathbf{R})(\forall x \in M_-)(f(x) \leq K)$ , ktorý hovorí, že  $f$  je na  $M_-$  zhora ohraničená).  $\Delta$

Tvrdenie (c) (ktoré možno samozrejme dokázať skopírovaním dôkazu použitého v prípade (a)) odvodíme z (a). Ak  $f$  je nerastúca a na množine  $M_-$  ohraničená zdola, tak funkcia  $-f$  je neklesajúca a na  $M_-$  ohraničená zhora. Podľa tvrdenia (a) teda existuje  $\lim_{x \rightarrow a^-} (-f(x))$  a platí  $\lim_{x \rightarrow a^-} (-f(x)) = \sup_{x \in M_-} (-f(x))$ .

Náš dôkaz bude hotový, ak ukážeme, že môžeme použiť vetu .15(c), podľa nej bude totiž z existencie  $\lim_{x \rightarrow a^-} (-f(x))$  vyplývať existencia  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  a bude platiť

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = - \lim_{x \rightarrow a^-} (-f(x)) = - \sup_{x \in M_-} (-f(x)) = \inf_{x \in M_-} f(x) .$$

Chceme teda preveriť platnosť prvej z uvedených rovností<sup>30</sup>. Podľa definície limity zľava je  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ , kde  $f_1 := f|_{M_-}$ . Na funkciu  $f_1$  už tvrdenie vety .15(c) môžeme použiť, preto  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = - \lim_{x \rightarrow a} (-f_1(x))$ , ale, opäť podľa definície limity zľava,  $\lim_{x \rightarrow a} (-f_1(x)) = \lim_{x \rightarrow a^-} (-f(x))$ .

<sup>30</sup>nasledujúce (pomerne rozvláčne) zdôvodnenie predstavuje všeobecný návod, ako prenášať tvrdenia o limitách na jednostranné limity

Tým je rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\lim_{x \rightarrow a-} (-f(x))$ , a teda aj rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \inf_{x \in M_-} f(x)$ , dokázaná.  $\triangle$

Tvrdenie (d) možno podobne odvodiť z tvrdenia (b).

**Poznámka. 1.** V prípade (b) z predpokladov  $f$  je neklesajúca na  $M$  a je zhora neohraničená na  $M_-$  vyplýva, že  $M = M_-$  (sporom; keby funkcia  $f$  bola definovaná ešte v niektorom bode  $\alpha \geq a$ , vyplývala by z faktu, že  $f$  je neklesajúca, nerovnosť  $(\forall x \in M_-)(f(x) \leq f(\alpha))$ , čo by bolo v spore s predpokladom, že  $f$  je na  $M_-$  zhora neohraničená).

**2.** Z rovnakých úvah vyplýva: ak  $f$  je monotónna na  $M$  a  $M_- \neq M$  (tj.  $M_- \subsetneq M$ ), tak funkcia  $f$  spĺňa predpoklady bodu (b) alebo (d) (teda  $f$  je buď neklesajúca a na  $M_-$  zhora ohraničená, alebo je nerastúca a na  $M_-$  zdola ohraničená).  $\spadesuit$

Nasledujúcu analógiu vety .29 možno dokázať rovnakým postupom alebo ju z tejto vety odvodiť (my uprednostníme druhý prístup).

**.30 Dôsledok.** Ak  $f$  je monotónna funkcia definovaná na  $M$  a  $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$  je hromadný bod množiny  $M_+ := M \cap (a, \infty)$ , tak existuje  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ . Pritom platí

(a) ak  $f$  je neklesajúca a na množine  $M_+$  zdola ohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \inf_{x \in M_+} f(x);$$

(b) ak  $f$  je neklesajúca a na množine  $M_+$  zdola neohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty;$$

(c) ak  $f$  je nerastúca a na množine  $M_+$  zhora ohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \sup_{x \in M_+} f(x);$$

(d) ak  $f$  je nerastúca a na množine  $M_+$  zhora neohraničená, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty.$$

**Dôkaz.** Aby sme sa v nasledujúcich (ako čitateľ neskôr uvidí, pomerne jednoduchých) úvahách nezamotávali prívelmi v zápisoch, označme  $f_1 := f|_{M_+}$ , máme teda (vzhľadom na definíciu pojmu limity sprava) dokázať existenciu  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ .

(a) Na množine  $D := -M_+$  (tj.  $D = \{-x; x \in M_+\}$ ) definujme funkciu  $g$  predpisom  $g(x) = f_1(-x)$ . Z rovnosti  $g(D) = f_1(M_+) = f(M_+)$  vyplýva, že funkcia  $g$  je zdola ohraničená a  $\inf_{x \in D} g(x) = \inf_{x \in M_+} f(x)$ . Keďže  $f$  (a teda aj  $f_1$ ) je neklesajúca, je funkcia  $g$  nerastúca. Funkcia  $g$ , množina  $D(g) = D$  a bod  $-a$  spĺňajú predpoklady vety .29 ( $g$  je monotónna a bod  $-a$  je hromadný bod množiny  $D(g) \cap (-\infty, a)$ , ktorá je v tomto prípade totožná s množinou  $D$ ), preto podľa tvrdenia (c) tejto vety je  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow -a+} g(x) = \inf_{x \in D} g(x) = \inf_{x \in M_+} f(x)$  (prvá rovnosť je dôsledkom rovnosti  $D(g) \cap (-\infty, a) = D(g)$ , pozri poznámku za definíciou .27).

Z rovnosti  $f_1(x) = g(-x)$ , pre  $x \in M_+ = D(f_1)$ , vyplýva, že funkcia  $f_1$  je zložená z funkcie  $v(x) = -x, x \in \mathbf{R}$ , ako vnútornej zložky a funkcie  $g$  ako vonkajšej zložky. Pretože  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-x) = -a$  a  $\lim_{x \rightarrow -a} g(x) = \inf_{x \in M_+} f(x)$  (čo sme práve dokázali), bude rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \inf_{x \in M_+} f(x)$ , ktorú chceme dokázať, vyplývať z vety .17 o limite zloženej funkcie, pokiaľ ukážeme, že je splnená aspoň jedna z podmienok (a), (b), (c) tejto vety. To je našťastie pravda: funkcia  $v$  je prostá, preto spĺňa podmienku (a). Tým je dôkaz rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \inf_{x \in M_+} f(x)$  skončený.  $\triangle$

Postup v prípade (b) je obdobný; v prípadoch (c) a (d) má čitateľ na výber: môže ich dokázať samostatne (postupom, akým sme dokazovali (a), resp. (b) z vety .29), môže ich odvodiť z tvrdení (c) a (d) vety .29 postupom, ktorý sme použili na dôkaz tvrdenia (a) tohto dôsledku, alebo ich môže odvodiť z tvrdení (a), (b) tohto dôsledku tak, ako sme dokazovali tvrdenia (c) a (d) vo vete .29.

**Poznámka.** Na tvrdenie uvedeného dôsledku sa vzťahujú obdobné poznámky ako na vetu .29.

**.31 Dôsledok.** Ak  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$  je monotónna funkcia, tak  $f$  má v každom bode  $a \in (\alpha, \beta)$  konečné jednostranné limity, pričom platí:

ak  $f$  je neklesajúca, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a+} f(x);$$

ak  $f$  je nerastúca, tak

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

**Dôkaz.** Predpokladajme, že  $f$  je neklesajúca. Potom (teraz čiastočne opakujeme úvahy z poznámky za vetou .29) platí

$$(\forall x \in (\alpha, a))(f(x) \leq f(a)),$$

teda  $f(a)$  je horné ohraničenie množiny  $\{f(x); x \in (\alpha, a)\}$ , a preto

$$\sup_{x \in (\alpha, a)} f(x) \leq f(a). \quad (51)$$

Podľa tvrdenia (a) vety .29 existuje  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \sup_{x \in (\alpha, a)} f(x)$ , z (51) teda dostávame

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \leq f(a).$$

Dôkaz druhej rovnosti je obdobný a zakladá sa na tvrdení (a) dôsledku .30.

Prípad  $f$  nerastúca prenechávame na čitateľa.

**Poznámky. 1.** Obdobnými úvahami možno dokázať toto tvrdenie.

**VELTA.** Ak  $a$  je vnútorný bod intervalu  $I$  (tj. pre niektoré  $\varepsilon > 0$  platí inklúzia  $O(a, \varepsilon) \subset I$ ) a  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  je neklesajúca funkcia, tak existujú konečné  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

**DÔKAZ.** Obdobne ako v predchádzajúcom dôkaze možno pre každé  $b \in I, b > a$ , z nerovnosti

$$(\forall x \in I, x < a)(f(x) \leq f(b))$$

odvodiť nerovnosť

$$\alpha := \sup\{f(x); x \in I \wedge x < a\} \leq f(b);$$

z takto dokázaného tvrdenia

$$(\forall x \in I, x > a)(f(x) \geq \alpha)$$

vyplýva, že  $\alpha$  je dolné ohraničenie množiny  $M := \{f(x); x \in I \wedge x > a\}$ , preto

$$\alpha \leq \inf M,$$

tj.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \alpha \leq \inf M = \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

**2. LEMA.** Ak sú splnené predpoklady tvrdenia z poznámky 1 a funkcia  $f$  je rastúca, platí

$$(\forall x \in I, x < a)(f(x) \leq \lim_{y \rightarrow a-} f(y)),$$

$$(\forall x \in I, x > a)(f(x) > \lim_{y \rightarrow a+} f(y)).$$

**DÔKAZ.** Dokážeme prvú z uvedených nerovností. Nech  $x \in I, x < a$ . Zvoľme  $z \in (x, a)$  (potom iste platí aj  $z \in I$ ); keďže  $f$  rastie, platí

$$f(x) < f(z), \quad (52)$$

súčasne — keďže  $z \in I, z < a$  — z rovnosti  $\lim_{y \rightarrow a-} f(y) = \sup\{f(y); y \in I \wedge y < a\}$  vyplýva

$$f(z) \leq \lim_{y \rightarrow a-} f(y) \quad (53)$$

a z (52) a (53) dostávame

$$f(x) < \lim_{y \rightarrow a-} f(y),$$

čo sme chceli dokázať.

**.32 Príklad** (kedy existuje a čomu sa rovná limita postupnosti  $\{q^n\}_{n=1}^\infty$ ). Pre  $q = 0$  a  $q = 1$  je postupnosť  $\{q^n\}_{n=1}^\infty$  zrejme konštantná, a teda konvergentná (používame terminológiu z definície .3). Pre  $q = -1$  táto postupnosť osciluje, pretože jej zúžená na množiny  $N_1 := \{2n - 1; n \in \mathbf{N}\}$  a  $N_2 := \{2n; n \in \mathbf{N}\}$ , ktoré sú konštantné, majú rôzne limity (lema .11(c)).

Nech teraz  $0 < |q| < 1$ . Potom postupnosť  $\{|q|^n\}_{n=1}^\infty$  je klesajúca a zdola ohraničená, preto podľa vety .29 (v ktorej položíme  $M = \mathbf{N}$ ,  $a = \infty$ ,  $f(n) = |q|^n$ ) existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n =: a \in \mathbf{R}$ . Podľa vety o limite zloženej funkcie potom platí  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1}$  (funkciu  $c(n) = |q|^{n+1}$  možno písať v tvare  $a \circ b$ , kde  $b(n) = n + 1$ ,  $a(n) = |q|^n$ ); súčasne z lemy .13(b) vyplýva  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = |q| \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = |q|a$ , teda

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = |q| \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = |q|a .$$

Keďže  $|q| \neq 1$ , z rovnosti  $a = |q|a$  vyplýva  $a = 0$  a z tvrdenia ( $e_1$ ) lemy .13 dostávame, že pre  $0 < |q| < 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

Pre  $|q| > 1$  je  $\{|q|^n\}_{n=1}^\infty$  rastúca postupnosť, ktorá má podľa vety .29 limitu  $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ . Dokážeme, že  $a = \infty$ . Keby totiž platilo  $a \in \mathbf{R}$ , mohli by sme použiť predchádzajúce úvahy, z ktorých by vyplývalo, že  $a = 0$ , čo je ovšem v spore s predpokladom  $|q| > 1$  a rovnosťou  $a = \sup_{n \in \mathbf{N}} |q|^n$  (veta .29(a)). Tým je rovnosť  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$  pre  $|q| > 1$  dokázaná. Pre  $q > 1$  potom dostávame  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$ . Postupnosť  $\{q^n\}_{n=1}^\infty$  pre  $q < -1$  osciluje, pretože jej zúžená na množinu  $N_1$ , resp.  $N_2$  (pozri prvý odstavec tohto príkladu) má limitu  $-\infty$ , resp.  $\infty$  (pre  $n \in N_1$  je  $q^n = -|q|^n$ , pre  $n \in N_2$  platí  $q^n = |q|^n$ ).

Zistili sme teda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pre } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pre } q = 1 \\ = \infty & \text{pre } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pre } q \leq -1 \end{cases} .$$

**.33 Príklad.** Ukážeme, že existuje konečná  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (ktorú budeme označovať písmenom  $e$ ).

Dokážeme, že postupnosť  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  je rastúca a zhora ohraničená. Prvá z týchto skutočností je ekvivalentná s nerovnosťou  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , tú možno dokázať nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > \\ &> \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

(nerovnosť  $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{1}{n+1}$  vyplýva z Bernoulliho nerovnosti  $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x > -1$ ,  $x \neq 0$ , v ktorej sme položili  $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ ).

Ohraničenosť postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  dokážeme možno trochu prekvapujúcim spôsobom: Označme  $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , potom zrejme  $b_n \geq a_n$ . Postupnosť  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  je pritom klesajúca (preverenie úprav obdobných úpravám pri dôkaze rastu postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  prenechávame na čitateľa):

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \\ &> \frac{n}{n+1} \left(1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)}\right) = 1 . \end{aligned}$$

Z nerovností  $b_1 \geq b_n \geq a_n$  potom vyplýva, že číslo  $b_1$  je iste horné ohraničenie postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  (dokonca každé  $b_k$  je jej horným ohraničením).

Z vety .29(a) (pre  $M = \mathbf{N}$ ,  $a = \infty$ ,  $f(n) = a_n$ ) vyplýva teda existencia konečnej  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$ , pritom (keďže  $e = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$  a postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  je rastúca)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, \quad n \in \mathbf{N} .$$

Postupnosť  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , použitá v predchádzajúcich úvahách, umožňuje odhadovať číslo  $e$  zhora: Podľa vety .15(c) o limite súčiny je  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ , pritom – keďže  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  je klesajúca – platí

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Pre číslo  $e$  tak dostávame odhad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N},$$

ktorý je jednou z možností jeho približného výpočtu (neskôr uvedieme ešte ďalšie).

**Poznámka.** Predchádzajúce úvahy mohli na časť čitateľskej obce pôsobiť trochu trikovým dojmom (nebolo jasné, odkiaľ sme vopred tušili, že  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  bude rastúca a dôkaz ohraničenosti bol tiež trochu nezvyčajný); ponúkame preto ešte jeden dôkaz ohraničenosti a monotónnosti postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ktorý je z tohto hľadiska názornejší.

Upravme vyjadrenie  $a_n$  nasledovne

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \frac{1}{2!} + \dots + \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{1}{k!} + \dots + \\ &+ \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right] \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Z takto získaného vyjadrenia pre  $a_n$  by malo byť vidieť, že  $a_{n+1} > a_n$  (čísla v hranatých zátvorkách sa zväčšia, ak namiesto  $n$  dosadíme  $n+1$ , okrem toho vo vyjadrení čísla  $a_{n+1}$  bude o jeden kladný sčítanec viac než vo vyjadrení pre  $a_n$ ). Keďže v každej z hranatých zátvoriek je kladné číslo menšie než 1, dostávame odhad

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

(využili sme nerovnosť  $n! \geq 2^{n-1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , a pre  $q = \frac{1}{2}$  rovnosť  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ).

**.34 Príklad.** Dokážeme teraz, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

Náš postup bude nasledovný:

1. dokážeme rovnosti  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1$ ;
2. z nich substitúciou  $x = \frac{1}{t}$  odvodíme rovnosti

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

a použijeme lemu .28.

Použijeme pritom tieto informácie o funkcii ln:

- ln je inverzná funkcia k funkcii  $e^x$ , preto ln je rastúca funkcia,  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$ ,  $\ln \frac{1}{e} = -1$  a  $r \ln s = \ln(s^r)$ ;
- pre každé  $a \in (0, \infty)$  je  $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$ ;

a dokazovanie v bode 1 bude založené na nasledujúcej úvahe (ktorej dôkaz prenechávame na čitateľa):

LEMA. Ak  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť s limitou  $a \in \mathbf{R}^*$  a funkcia  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  je daná vzťahom  $f(x) = a_n$  pre  $[x] = n$  (kde  $[\cdot]$  označuje celú časť), tak  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ .  $\triangle$

Po tomto úvode môžeme prejsť k realizácii bodov 1 a 2.

1a) Pre  $t \in [n, n+1)$  platí

$$0 < [t] \leq t \leq [t] + 1$$

a (keďže funkcia  $\ln$  je rastúca a  $\ln 1 = 0$ )

$$0 < \ln \left( 1 + \frac{1}{[t] + 1} \right) \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{[t]} \right),$$

preto

$$f(t) := [t] \ln \left( 1 + \frac{1}{[t] + 1} \right) \leq t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \leq ([t] + 1) \ln \left( 1 + \frac{1}{[t]} \right) =: h(t). \quad (54)$$

Označme teraz  $a_n := n \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)$ ,  $b_n := (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ . Pretože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = e$$

(pozri predchádzajúci príklad) a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = {}^3 e,$$

dostávame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \right] \stackrel{(*)}{=} \ln \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \right) = \ln e = 1$$

a obdobne  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$  (rovnosť  $(*)$  vyplýva z vety .17 o limite zloženej funkcie a vety .12, ktorá tiež zaručila splnenie podmienky (c) vety .17).

Z našej lemy potom vyplýva  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1$  (pretože  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ) a  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$  (pretože  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ), z (54) a vety .25 potom dostávame rovnosť  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = 1$ .

1b) Ak použijeme substitúciu  $z = -t$ , stačí namiesto rovnosti  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = 1$  dokazovať rovnosť  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left( -z \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \right) = 1$ , tj.  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) = -1$ . Ďalší postup je obdobný ako v 1a): treba dokázať nerovnosti

$$[z] \ln \left( 1 - \frac{1}{[z]} \right) \leq z \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \leq ([z] + 1) \ln \left( 1 - \frac{1}{[z] + 1} \right)$$

a v ďalších úvahách využiť výpočet

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{n}{n-1} \right)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\left( 1 - \frac{1}{n-1} \right)} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}} \right) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

(rovnosť  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} = e$  opäť vyplýva z tvrdenia v poznámke 2 za vetou .17).

2. Ak  $h : (-1, \infty) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia s predpisom  $\frac{\ln(1+x)}{x}$ , tak  $h_1 := h|_{(0, \infty)}$  možno písať v tvare  $h_1 = g \circ f$ , kde  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ ;  $g(y) = y \ln \left( 1 + \frac{1}{y} \right)$ ,  $y > 0$ ; z vety .17 o limite zloženej funkcie potom vyplýva  $\lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) = 1$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$  (oprávnenie k použitiu vety .17 sme získali splnením podmienky (b)). Dôkaz rovnosti  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 1$  je rovnaký.

**.35 Cvičenie.** Na základe predchádzajúceho príkladu použitím substitúcie  $t = e^x - 1$  dokážte rovnosť  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ . (Pri dokazovaní môžete použiť tieto (v našom texte zatiaľ nedokázané) tvrdenia: 1. funkcia  $\ln x$  je inverzná k funkcii  $e^x$ ; 2.  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$ .)  $\triangle$

**Poznámka.** Z predchádzajúceho cvičenia a vety o limite zloženej funkcie vyplýva toto tvrdenie:

Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ( $a \in \mathbf{R}^*$ ), pričom  $a$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $\frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)}$ , tak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1.$$

Špeciálne platí: ak  $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ , tak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a = 1 \cdot \ln a = \ln a$$

---

<sup>31</sup>táto rovnosť vyplýva z rovnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$  a tvrdenia v poznámke 2 za vetou .17 o limite zloženej funkcie



(v tomto prípade teda bolo  $f(x) = x \ln a$ ).

Podobne z vyplýva z príkladu .34 a vety o limite zloženej funkcie:

Ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ( $a \in \mathbf{R}^*$ ), pričom  $a$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}$ , tak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1. \spadesuit$$

Zaveďme teraz označenie, ktoré využijeme pri formulácii nasledujúcej vety: pre  $I := [a, b]$  (kde  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a \leq b$ ) označíme znakom  $|I|$  číslo  $b - a$  (tj. dĺžku (degenerovaného alebo nedegenerovaného) intervalu  $I$ ).

**.36 Veta.** (Princíp do seba vložených intervalov) *Nech  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť uzavretých (nedegenerovaných alebo degenerovaných) ohraničených intervalov s vlastnosťou*

$$(i) \quad I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$$

Potom  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

Ak navyše platí

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0,$$

tak  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  je jednoprvková množina, tj. existuje práve jedno číslo  $c \in \mathbf{R}$  s vlastnosťou  $(\forall n \in \mathbf{N})(c \in I_n)$ .

**Dôkaz.** Začnime prvou časťou nášho tvrdenia. Ak  $I_n$  je uzavretý interval s koncovými bodmi  $a_n \leq b_n$ , tak predpoklad (i) možno sformulovať v podobe  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je nerastúca,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  je neklesajúca postupnosť a platí

$$(\forall n \in \mathbf{N})(a_n \leq b_n). \quad (55)$$

Z nerovností  $b_1 \geq b_n \geq a_n$  vyplýva, že postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je zhora ohraničená, preto podľa vety .29(a) existuje konečná  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: c$ . Podobne možno dokázať existenciu čísla  $d := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ; z (55) potom na základe vety .24 (pre  $M = \mathbf{N}$ ,  $f(n) = a_n$ ,  $g(n) = b_n$ ) vyplýva nerovnosť  $c \leq d$ .

Keďže  $c = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$ ,  $d = \inf_{n \in \mathbf{N}} b_n$  (veta .29) platí

$$(\forall n \in \mathbf{N})(a_n \leq c \leq d \leq b_n), \quad (56)$$

čo znamená, že čísla  $c, d$  (a ľubovoľné  $x$  z (nedegenerovaného alebo degenerovaného) uzavretého intervalu  $[c, d]$ ) ležia v každom intervalov  $I_n = [a_n, b_n]$ , čím je prvá časť našej vety dokázaná.  $\Delta$

Dokážme teraz ešte navyše rovnosť  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [c, d]$ , ktorej dôsledkom bude druhá časť nášho tvrdenia. Inklúziu  $[c, d] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  sme už dokázali (tvrdenie (56)). Ak naopak  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ , tak z nerovností

$$(\forall x \in \mathbf{N})(a_n \leq x \leq b_n)$$

podľa vety .24 (použitej najprv pre  $M = \mathbf{N}$ ,  $f(n) = a_n$ ,  $g(n) \equiv x$ , a potom pre  $M = \mathbf{N}$ ,  $f(n) \equiv x$ ,  $g(n) = b_n$ ) vyplýva nerovnosť  $c \leq x \leq d$ , čím je dokázaná inklúzia  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [c, d]$ , a tým aj rovnosť  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [c, d]$ .  $\Delta$

Predpokladajme teraz navyše, že platí (ii), ktoré zrejme možno prepísať do podoby  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ . Z tohto predpokladu dostávame

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = c + 0 = c,$$

z práve dokázanej rovnosti  $c = d$  a z rovnosti  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [c, d]$  (dokázanej v predchádzajúcom odstavci) už vyplýva druhá časť tvrdenia našej vety.

## 5 Späť k postupnostiam (a nielen k nim)

Tento odsek, venovaný rozšíreniu našich teoretických poznatkov o limitách postupností, uvedieme definíciou pojmu podpostupnosti.

**.37 Definícia.** Nech je daná postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a rastúca postupnosť  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  prirodzených čísel. Potom postupnosť  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  sa nazýva *podpostupnosť* (alebo *vybraná postupnosť z*) *postupnosti*  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . ♠

Nasledujúce tvrdenie možno – keďže postupnosť  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je zložením postupností  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  – odvodiť z vety o limite zloženej funkcie <sup>32</sup>, rovnako dobre ho však – vzhľadom na jeho jednoduchosť – možno dokázať priamo na základe definície limity postupnosti.

**.38 Lema.** Ak  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  je podpostupnosť postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  <sup>33</sup> a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbf{R}^*$ , tak aj  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ . ♠

Nasledujúcu vetu popisujúcu súvislosť medzi limitou postupnosti a limitou funkcie sme vyslovili už v paragrafe .6, aby sme pomocou nej ukázali, že definícia limity vyslovená v .5 (ktorá sa nazýva aj *Heineho definíciou limity*) je ekvivalentná s nami používanou definíciou .7 (nazývanou niekedy aj *Cauchyho definíciou limity*). Kvôli poriadku sformulujeme v tomto odseku spomínané tvrdenie znova (ovšem už bez dôkazu, ktorý čitateľ nájde v paragrafe .6), aby sa tak vrátilo na miesto, z ktorého sme si ho vypožičali.

**.39 Veta.** Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$ , nech  $b \in \mathbf{R}^*$ . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (a) pre každú postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  s limitou  $a$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ ;
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

**Poznámka.** Z vety .39 možno odvodiť toto tvrdenie.

**VETA.** Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$ . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (a') pre každú postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  s limitou  $a$  existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ ;
- (b') existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

*Špeciálne, platí ekvivalencia medzi týmito tvrdeniami:*

- (a'') pre každú postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  s limitou  $a$  je postupnosť  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  konvergentná;
- (b'') existuje konečná  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

:-) Všimnime si, že v (a') netreba – na rozdiel od (a) z vety .39 – overovať, či pre rôzne postupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  s limitou  $a$  majú postupnosti  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  vždy rovnaké limity, požadujeme len existenciu limity  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . (-:

**DŮKAZ.** Keďže náš výrok (b') je ekvivalentný s (b) z vety .39, bude tvrdenie našej vety vyplývať z vety .39, ak dokážeme ekvivalenciu (a)  $\Leftrightarrow$  (a'). Implikácia (a)  $\Rightarrow$  (a') zrejme platí, stačí preto dokázať, že z predpokladu (a') možno odvodiť tvrdenie *ak postupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  majú limitu  $a$ , tak  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ , z ktorého už vyplýva (a) z vety .39.*

Nech teda  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , potom postupnosť

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$$

má tiež limitu  $a$  (lema .11(d)) a všetky prvky tejto postupnosti ležia v  $D(f) \setminus \{a\}$ . Z predpokladu (a') vyplýva, že postupnosť

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots, f(x_n), f(y_n), \dots$$

má limitu, preto podľa lemy .38 jej podpostupnosti  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  musia mať rovnaké limity.

Dôkaz ekvivalencie (a'')  $\Leftrightarrow$  (b'') prenechávame na čitateľa. ♠

Naším ďalším cieľom je veta .43, formulujúca spolu s lemov .42 nutnú a postačujúcu podmienku konvergencie postupnosti. Tvrdenie .40, ktoré použijeme pri jej dôkaze, sa ukáže ako užitočné aj neskôr.

<sup>32</sup>v takom prípade stačí dokázať “zrejmé” tvrdenie  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$

<sup>33</sup>dúfame, že čitateľa nezaskočilo zákerné použitie písmenka  $n$  ako premennej aj v postupnosti  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  aj v postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  (ktorá je vonkajšou zložkou vo vyjadrení  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ )

**.40 Veta.** Z každej ohraničenej postupnosti možno vybrať konvergentnú podpostupnosť.

**Dôkaz.** Nech teda  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je ohraničená postupnosť, zvolíme  $c_1, d_1 \in \mathbf{R}$  tak, aby platilo ( $\forall n \in \mathbf{N}$ ) ( $c_1 \leq a_n \leq d_1$ ), a konštruujeme postupnosť uzavretých ohraničených do seba vložených intervalov  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  nasledovne:

Položíme  $I_1 := [c_1, d_1]$ . Interval  $I_1$  rozdelíme bodom  $b_1 := \frac{c_1+d_1}{2}$  na intervaly  $I_{11} := [c_1, b_1], I_{12} := [b_1, d_1]$ , vyberieme ten z intervalov  $I_{11}, I_{12}$ , ktorý obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  <sup>34</sup> (čitateľ ľahko zistí, že aspoň jeden z nich túto vlastnosť musí mať; pokiaľ ju majú oba, zvolíme  $I_{11}$ ) a označíme ho  $I_2$  a jeho koncové body  $c_2 < d_2$ . Interval  $I_2$  rozdelíme bodom  $b_2 := \frac{c_2+d_2}{2}$  na intervaly  $I_{21} := [c_2, b_2], I_{22} := [b_2, d_2]$ , vyberieme ten z nich, ktorý obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  (pokiaľ túto vlastnosť majú obidva, zvolíme  $I_{21}$ ) a označíme ho  $I_3$  a jeho koncové body  $c_3 < d_3$ .

Popis konštrukcie intervalu  $I_{n+1}$  za predpokladu, že intervaly  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sú už skonštruované, vie čitateľ už teraz iste urobiť sám <sup>35</sup>.

Naša postupnosť spĺňa predpoklady (i) a (ii) z vety .36 (splnenie predpokladu (ii) vyplýva z rovnosti  $|I_n| = \frac{d_1-c_1}{2^{n-1}}$ ), preto existuje práve jedno číslo  $a \in \mathbf{R}$  ležiace súčasne vo všetkých intervaloch  $I_n$ . Skonštruujeme teraz podpostupnosť  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  konvergujúcu k číslu  $a$ , čím bude náš dôkaz skončený.

(-) Myšlienka konštrukcie postupnosti  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je jednoduchá: z každého intervalu  $I_k$  vyberieme nejaký prvok  $b_k$  postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  (podľa definície množiny  $I_k$  tam nejaký musí ležať); z nerovnosti  $0 \leq |b_k - a| \leq |I_k|$  bude už – keďže  $\lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| = 0$  – vyplývať, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a$ . Pretože však chceme, aby  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  bola podpostupnosťou postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , musíme zabezpečiť, že prvok  $b_{k+1}$  vybraný z intervalu  $I_{k+1}$  leží v postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  za prvkom  $b_k$  vybraným z intervalu  $I_k$  (tj. ak  $b_k = a_r, b_{k+1} = a_s$ , tak  $s > r$ ) <sup>36</sup>.(-:

Definujeme teraz indukciu postupnosť  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  prirodzených čísel nasledovne:

$$n_1 := \min\{n \in \mathbf{N} ; a_n \in I_1\}, \quad n_{k+1} := \min\{n \in \mathbf{N} ; n > n_k \wedge a_n \in I_{k+1}\}$$

(korektnosť našej konštrukcie vyplýva z faktu, že množina  $\{n \in \mathbf{N} ; a_n \in I_{k+1}\}$  je nekonečná, preto  $\{n \in \mathbf{N} ; n > n_k \wedge a_n \in I_{k+1}\}$  je neprázdna množina).

Zrejme  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Z inklúzie  $a_{n_k} \in I_k$  vyplýva – keďže súčasne platí aj  $a \in I_k$  – nerovnosť  $0 \leq |a_{n_k} - a| \leq |I_k|$ , a keďže  $\lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| = 0$ , dostávame z vety .25 rovnosť  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - a| = 0$ , tj.  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ , čo sme chceli dokázať.

**Poznámka. 1.** Keďže ohraničená monotónna postupnosť je konvergentná (veta .29), možno predchádzajúce tvrdenie dokázať aj na základe tejto lemy:

LEMA. Z každej postupnosti možno vybrať monotónnu podpostupnosť.

DÔKAZ. Nech je daná postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Číslo  $k \in \mathbf{N}$  nazveme *začiatok úpadku postupnosti*  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ak bude platiť ( $\forall n > k$ ) ( $a_n \leq a_k$ ). Nech  $\mathcal{U}$  je množina všetkých začiatkov úpadku postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Ak  $\mathcal{U}$  je nekonečná, možno ju zoradiť do rastúcej postupnosti  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  prirodzených čísel; postupnosť  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je potom nerastúca. Ak  $\mathcal{U}$  je konečná, môžeme z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  vybrať rastúcu postupnosť  $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$  nasledovne. Zvolíme  $n_1 \in \mathbf{N}$  tak, aby platilo ( $\forall u \in \mathcal{U}$ ) ( $u < n_1$ ). Keďže  $n_1$  nie je začiatok úpadku, existuje  $n_2 > n_1$  tak, že  $a_{n_2} > a_{n_1}$ . Keďže ani  $n_2$  nie je začiatok úpadku, existuje  $n_3 > n_2$  tak, že  $a_{n_3} > a_{n_2}$ , atď. (Vycifrovaný formálne korektný zápis prenechávame na čitateľa poučeného predchádzajúcim textom.)

**2.** Čitateľa, vyplašeného našimi skazkami o axióme výberu v poznámke v paragrafe .6, upozorňujeme, že ani jeden z uvedených dôkazov vety .40 sa nezakladá na tejto axióme (v prvom z uvedených dôkazov totiž vždy jednoznačne určujeme, ktorý interval  $I$ , resp. bod  $a$  zvolíme, a druhý z uvedených dôkazov možno do takejto podoby ľahko upraviť); k axióme výberu sa uchýľujeme v situáciách, kedy takéto jednoznačné kritérium výberu nevieme nájsť.

**3.** Obdoba vety .40 platí aj pre neohraničené postupnosti:

LEMA. Z každej zhora (zdola) neohraničenej postupnosti možno vybrať rastúcu (klesajúcu) postupnosť s limitou  $\infty$  ( $-\infty$ ).

DÔKAZ. V prípade zhora neohraničenej postupnosti stačí položiť  $n_1 := \min\{n \in \mathbf{N} ; a_n > 1\}$ ,  $n_{k+1} := \min\{n \in \mathbf{N} ; n > n_k \wedge a_n \geq a_{n_k} + 1\}$ .

**Cvičenie.** (Limes superior a limes inferior postupnosti.)

<sup>34</sup>formulácia interval  $J$  obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  znamená množina  $\{n \in \mathbf{N} ; a_n \in J\}$  je nekonečná

<sup>35</sup>Tento spôsob tvorenia postupnosti  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  sa nazýva *konštrukcia indukciou*. Postupnosť  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  považujeme za danú, ak je daný člen  $I_1$  a postup, ktorým možno za predpokladu, že už poznáme členy  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , skonštruovať prvok  $I_{n+1}$ .

<sup>36</sup>okrem toho sa snažíme vyhnúť sa použitiu axiomy výberu

Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je zhora ohraničená postupnosť, potom je množina  $\mathcal{M} := \{x \in \mathbf{R}; (\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, n > N)(a_n \leq x)\}$  neprázdna. Ak  $\mathcal{M}$  je zdola ohraničená, nazýva sa číslo  $\inf \mathcal{M}$  *limes superior postupnosti*  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a označuje sa  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Ak  $\mathcal{M}$  je zdola neohraničená, kladieme  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := -\infty$ .

Pre zhora neohraničenú postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  definujeme jej limes superior rovnosťou  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \infty$ .

**1. a)** Nech je daná postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Dokážte, že existuje jej podpostupnosť  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , ktorej limitou je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ . (Možno navyše požadovať, aby  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  bola neklesajúca postupnosť?)

**b)** Ak  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je podpostupnosť postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$ , tak  $l \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  (symbol  $\prec$  sme definovali pred paragrafom .24).

(Návod: Sporom; nech  $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , z nerovnosti  $l > \alpha$  vyplýva existencia okolí  $O(l)$  a  $O(\varepsilon, \alpha)$ , ktoré sú disjunktné, preto

$$(\forall x \in O(l))(x > \alpha + \varepsilon). \quad (57)$$

Keďže  $l = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ , v okolí  $O(l)$  leží nekonečne veľa členov postupnosti  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , a teda aj nekonečne veľa členov postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Z (57) potom vyplýva, že v intervale  $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$  neleží žiadny prvok množiny  $\mathcal{M}$ , čo je v spore s rovnosťou  $\alpha = \inf \mathcal{M}$ .  $\Delta$

Z (a) a (b) vidno, že  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  je najväčší spomedzi tých prvkov usporiadanej množiny  $(\mathbf{R}^*, \prec)$ , ktoré sú limitou niektorej postupnosti vybranej z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Ako sa dá očakávať, existuje aj najmenší z týchto prvkov, ten sa nazýva *limes inferior postupnosti*  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a označuje sa  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Pri definícii limes inferior postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  možno buď zopakovať postup, ktorý sme použili na začiatku tohto cvičenia pri definovaní pojmu limes superior, alebo limes inferior zaviesť rovnosťou

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$$

(v tomto texte budeme za definíciu pojmu limes superior považovať práve uvedenú rovnosť).

Ďalšiu z možných definícií (pre prípad zdola ohraničenej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ) obsahuje nasledujúce cvičenie.

**c)** Ak  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je zdola (zhora) ohraničená postupnosť, tak  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{a_k; k \geq n\})$  ( $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k; k \geq n\})$ ). Dokážte!

**d)** Postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu práve vtedy, keď platí rovnosť  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  (a touto limitou je spoločná hodnota limes inferior a limes superior). Dokážte!

**2.** Dokážte toto tvrdenie:

Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $f$ . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(a") existujú postupnosti  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  také, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ , ale postupnosti  $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$  a  $\{f(y_k)\}_{k=1}^{\infty}$  majú navzájom rôzne limity;

(b") neexistuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

(Návod: Implikácia "⇒" vyplýva z vety .39 (z nášho (a")) vyplýva totiž negácia tvrdenia (a) z uvedenej vety).

"⇐" Nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  neexistuje; potom existuje postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  taká, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  neexistuje (veta z poznámky v paragrafe .39). To znamená, že  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  (bod d predchádzajúceho cvičenia), preto existujú z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  vybrané postupnosti  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  a  $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$  tak, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  (bod a predchádzajúceho cvičenia),  $\lim_{l \rightarrow \infty} f(a_{n_l}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ ; pritom  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a = \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l}$  (lema .38).

**.41 Definícia.** Hovoríme, že postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je *fundamentálna* (alebo *cauchyovská*), ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n, p \in \mathbf{N}, n, p > N)(|a_n - a_p| < \varepsilon). \quad (58)$$

**.42 Lema.** Každá konvergentná postupnosť je fundamentálna.

**Dôkaz.** Jednoduchý dôkaz založený na úvahe ak pre všetky  $m > N$  je  $|a_m - a| \leq \varepsilon$ , tak pre  $n, p > N$  platí

$$|a_n - a_p| = |(a_n - a) + (a - a_p)| \leq |a_n - a| + |a_p - a| < 2\varepsilon$$

prenechávame na čitateľa.

**.43 Veta.** (Cauchy, Bolzano) Každá fundamentálna postupnosť je konvergentná.

**Dôkaz.** Najprv dokážeme toto tvrdenie:

LEMA. Ak fundamentálna postupnosť má konvergentnú podpostupnosť, tak je sama konvergentná.

DÔKAZ. Nech  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je konvergentná podpostupnosť fundamentálnej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Ukážeme, že číslo  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$  je aj limitou postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , tj. že platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, n > N)(|a_n - a| < \varepsilon). \quad (59)$$

Zvoľme teda  $\varepsilon > 0$  a hľadáme  $N$ . Podľa (58) existuje  $N \in \mathbf{N}$  s vlastnosťou

$$(\forall n, p \in \mathbf{N}, n, p > N) \left( |a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

tj.

$$(\forall p \in \mathbf{N}, p > N)(\forall n \in \mathbf{N}, n > N) \left( |a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (60)$$

Ukážeme, že toto  $N$  vyhovuje našim požiadavkám.

Keďže  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ , musí existovať  $n_k > N$  tak, že

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (61)$$

(60) platí pre každé  $p > N$ , platí teda špeciálne aj pre  $p = n_k$ , teda

$$(\forall n \in \mathbf{N}, n > N) \left( |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (62)$$

Pretože z nerovností  $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$  a  $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  vyplýva

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

platí podľa (61) a (62)

$$(\forall n \in \mathbf{N}, n > N)(|a_n - a| < \varepsilon),$$

teda naše  $N$  skutočne vyhovuje požiadavkám z (59). Tým je dôkaz rovnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  skončený.  $\Delta$

Dôkaz Cauchyho-Bolzanovej vety už teraz bude stručný. Ukážeme, že každá fundamentálna postupnosť je ohraničená, podľa vety .40 z nej potom možno vybrať konvergentnú podpostupnosť a tvrdenie Cauchyho-Bolzanovej vety potom vyplýva z našej práve dokázanej lemy.

Zostáva teda dokázať implikáciu *ak postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je fundamentálna, tak je ohraničená*. Podľa (58) existuje (k číslu  $\varepsilon = 1$ ) číslo  $N \in \mathbf{N}$  s vlastnosťou

$$(\forall n, p \in \mathbf{N}, n, p > N)(|a_n - a_p| < 1),$$

tj.

$$(\forall p \in \mathbf{N}, p > N)(\forall n \in \mathbf{N}, n > N)(|a_n - a_p| < 1).$$

Keďže toto tvrdenie platí pre všetky  $p > N$ , platí iste pre  $p = N + 1$ , čo – keďže nerovnosť  $|a_n - a_{N+1}| < 1$  je ekvivalentná s nerovnosťami  $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$  – znamená, že platí

$$(\forall n \in \mathbf{N}, n > N)(a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1),$$

a teda množina  $B := \{a_n ; n > N\}$  je ohraničená. Pretože  $A := \{a_n ; n \in \mathbf{N}\}$  je zjednotenie konečnej, a teda ohraničenej, množiny  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  s ohraničenou množinou  $B$ , je aj  $A$  ohraničená množina, čím je naše tvrdenie dokázané.

#### Poznámka.

**2.** Na základe vety .43 a vety z poznámky v paragrafe .39 možno dokázať toto tvrdenie:

VETA. *Funkcia  $f$  má v hromadnom bode  $a \in \mathbf{R}^*$  svojho definičného oboru konečnú limitu práve vtedy, keď platí*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P(a))(\forall x, y \in P(a) \cap D(f))(|f(x) - f(y)| < \varepsilon). \quad (63)$$

DÔKAZ pre záujemcov len naznačíme: Dôkaz implikácie “ $\Rightarrow$ ” je obdobou úvahy použitej pri odvodení lemy .42. Dôkaze implikácie “ $\Leftarrow$ ” založíme na ekvivalencii (a”)  $\Leftrightarrow$  (b”) z vety v poznámke z paragrafu .39: ak postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$  má limitu  $a$ , tak z (63) vyplýva, že postupnosť  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  je fundamentálna, a teda podľa vety .43 konvergentná.

---

<sup>37</sup>Dôkaz tohto “na prvý pohľad zrejmeho” tvrdenia prenechávame na čitateľa; jedna z (viacerých) možností uvažovania je nasledovná: k číslu  $\frac{\varepsilon}{2}$  existuje – pretože  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$  – číslo  $K_1 \in \mathbf{N}$  tak, že pre  $k > K_1$  je  $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; množina  $A := \{n_k ; k > K_1\}$  je nekonečná množina prirodzených čísel (pretože  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  je monotónna, a teda prostá postupnosť a množina  $\{K_1 + 1, K_1 + 2, \dots\}$  je nekonečná), preto nemôže byť podmnožinou konečnej množiny  $B := \{1, 2, \dots, N\}$ , teda musí existovať aspoň jeden prvok  $n_k \in A \setminus B$ .

## 6 Niektoré topologické pojmy

V tomto odseku zavedieme pojem otvorenej, uzavretej a kompaktnej množiny (a pre záujemcov navyiac aj množiny typu  $F_\sigma$  a typu  $G_\delta$ ) a dokážeme niektoré základné tvrdenia o nich.

**.44 Definícia.** Číslo  $a \in \mathbf{R}$  sa nazýva *vnútorný bod množiny*  $A \subset \mathbf{R}$ , ak pre niektoré jeho okolie  $O(a)$  platí  $O(a) \subset A$ .

Množina  $A \subset \mathbf{R}$  sa nazýva *otvorená*, ak každý jej bod je jej vnútorným bodom.

$\emptyset$  považujeme za otvorenú množinu.

Množina  $B \subset \mathbf{R}$  sa nazýva *uzavretá*, ak jej doplnok  $\mathbf{R} \setminus B$  je otvorená množina.

**Poznámka. 1.** Dohodu, že množinu  $\emptyset$  pokladáme za otvorenú, sme mohli v predchádzajúcej definícii vynechať (uvádzame ju tam len na zdôraznenie tejto skutočnosti), pretože to vyplýva priamo z našej definície založenej na pojme vnútorného bodu. Ak je totiž  $V(x)$  na  $\mathbf{R}$  definovaná výroková forma “ $x$  je vnútorný bod množiny  $\emptyset$ ”, musí byť výrok  $(\forall x \in \emptyset)(V(x))$  pravdivý, keďže jeho negácia  $(\exists x \in \emptyset)(\neg V(x))$  je zrejme nepravdivá.

**2.** Po tragických skúsenostiach z minulosti dôrazne nabádame čitateľa, aby si uvedomil, že negáciou výrokovej formy *množina  $B$  je otvorená* nie je výroková forma *množina  $B$  je uzavretá*. Existujú totiž množiny, ktoré nie sú otvorené ani uzavreté (napr. každý interval tvaru  $[a, b)$ , kde  $a < b$ ). Opačným prípadom sú množiny  $\mathbf{R}$  a  $\emptyset$ , ktoré sú súčasne otvorené aj uzavreté (dá sa dokázať, že iná množina  $A \subset \mathbf{R}$  už túto vlastnosť nemá).

**.45 Lema.** *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(a) množina  $B \subset \mathbf{R}$  je uzavretá;

(b)  $B' \subset B$ , kde  $B' := \{b \in \mathbf{R}; b \text{ je hromadný bod množiny } B\}$  <sup>38</sup>.

**Dôkaz.** (a)  $\Rightarrow$  (b). Ak  $B$  je uzavretá množina, je podľa definície .44 množina  $\mathbf{R} \setminus B$  otvorená; ak teda  $c \notin B$ , t.j.  $c \in \mathbf{R} \setminus B$ , tak existuje okolie  $O(c)$  bodu  $c$  s vlastnosťou  $O(c) \subset \mathbf{R} \setminus B$ . V tomto okolí  $O(c)$  teda nemôže ležať žiadny prvok množiny  $B$ , čo znamená, že  $c$  nie je hromadný bod  $B$ . Tým sme dokázali implikáciu  $c \notin B \Rightarrow c \notin B'$  ekvivalentnú s implikáciou  $c \in B' \Rightarrow c \in B$ , t.j. s inklúziou  $B' \subset B$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a). Nech  $c \in \mathbf{R} \setminus B$ ; pretože  $B' \subset B$ , nie je bod  $c$  hromadný bod množiny  $B$ , existuje teda jeho prstencové okolie  $P(c)$  s vlastnosťou  $P(c) \cap B = \emptyset$ . Keďže súčasne  $c \notin B$ , platí aj rovnosť  $O(c) \cap B = \emptyset$ , kde  $O(c) := P(c) \cup \{c\}$  je okolie bodu  $c$ . Z práve dokázanej inklúzie  $O(c) \subset \mathbf{R} \setminus B$  vyplýva, že  $c$  je vnútorný bod množiny  $\mathbf{R} \setminus B$ , a keďže táto úvaha platí pre každé  $c \in \mathbf{R} \setminus B$ , je množina  $\mathbf{R} \setminus B$  otvorená. To ale znamená, že  $B$  je uzavretá množina, čo sme chceli dokázať.

**Poznámka. 1.** Informáciu z predchádzajúcej lemy možno ešte doplniť:

LEMA. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(a) množina  $B \subset \mathbf{R}$  je uzavretá;

(c) ak  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$  je konvergentná postupnosť s limitou  $a$ , tak  $a \in B$ .

**DÔKAZ.** Vzhľadom na už dokázanú ekvivalenciu (a)  $\Leftrightarrow$  (b) z predchádzajúcej lemy dokážeme implikácie (b)  $\Rightarrow$  (c) a (c)  $\Rightarrow$  (a).

(b)  $\Rightarrow$  (c). Ak  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$  je konvergentná postupnosť s limitou  $a$ , môže nastať jedna z dvoch možností:

1. pre niektoré  $n \in \mathbf{N}$  platí  $a_n = a$ ; z inklúzie  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$  potom vyplýva aj  $a \in B$ .

2. platí (\*)  $(\forall n \in \mathbf{N})(a_n \neq a)$ ; v takom prípade je  $a$  hromadný bod množiny  $B$  (keďže  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , vyplýva z definície limity, že v každom okolí  $O(a)$  bodu  $a$  leží aspoň jeden prvok  $a_N$  postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ , ktorý je prvkom množiny  $B$ ; podľa (\*) je  $a_N \neq a$ , t.j.  $a_N$  leží v prstencovom okolí bodu  $a$ ), inklúzia  $a \in B$  potom vyplýva z predpokladu  $B' \subset B$  a inklúzie  $a \in B'$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a). Budeme postupovať nepriamo. Ak  $B$  nie je uzavretá, znamená to (podľa definície .44), že  $\mathbf{R} \setminus B$  nie je otvorená množina. Existuje preto bod  $a \in \mathbf{R} \setminus B$ , ktorý nie je vnútorným bodom množiny  $\mathbf{R} \setminus B$ . To znamená, že každé okolie  $O(a)$  bodu  $a$  obsahuje prvky neležiace v  $\mathbf{R} \setminus B$ , teda prvky z  $B$ . Vyberme niektorý z prvkov množiny  $B$  ležiacich v okolí  $O(\frac{1}{n}, a)$  a označme ho  $a_n$ . Ak tento výber urobíme pre každé  $n \in \mathbf{N}$ , dostaneme <sup>39</sup> postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ , ktorá konverguje k  $a$  (z inklúzie  $a_n \in O(\frac{1}{n}, a)$  vyplýva  $0 \leq |a_n - a| \leq \frac{1}{n}$ , podľa vety .25 potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$ , čo je ekvivalentné s rovnosťou  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ). Z existencie konvergentnej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$  s limitou  $a \notin B$  ovšem vyplýva tvrdenie  $\neg(c)$ .

<sup>38</sup>štandardne používané (a priam sa núkajúce) slovné vyjadrenie inklúzie  $B' \subset B$ , ktorým je formulácia *B obsahuje všetky svoje hromadné body* nemôžeme, žiaľ, použiť, keďže sme si k nemu sami zahatali cestu definíciou .4 (inak užitočnou), podľa ktorej za hromadný bod zhora (zdola) neohraničenej množiny  $B \subset \mathbf{R}$  považujeme aj bod  $\infty$  ( $-\infty$ ), ktorý zrejme nemôže byť prvkom  $B$

<sup>39</sup>axióma výberu opäť medzi nami

2. V niektorých doplnujúcich úvahách využijeme toto tvrdenie:

LEMA. Nech  $B \subset \mathbf{R}$ . Potom  $B \cup B'$  je uzavretá množina.

DÔKAZ. Nech  $a$  je hromadný bod množiny  $B \cup B'$ . Dokážeme, že  $a$  je aj hromadný bod množiny  $B$ , a leží teda iste v  $B \cup B'$ ; uzavretosť množiny  $B \cup B'$  bude potom vyplývať z lemy .45. V našich úvahách pritom využijeme, že pre každý bod  $x \in B \cup B'$  platí

$$(\forall \varepsilon > 0) (O(\varepsilon, x) \cap B \neq \emptyset). \quad (64)$$

Zvoľme  $\varepsilon > 0$ . Pretože  $a$  je hromadný bod množiny  $B \cup B'$ , existuje číslo  $x \in B \cup B'$  ležiace v  $P(\varepsilon, a)$ . Nech  $\varepsilon_1 := \min\{|x - a|, a + \varepsilon - x, x - (a - \varepsilon)\}$ , potom  $\varepsilon_1 > 0$  a  $O(\varepsilon_1, x) \subset P(\varepsilon, a)$ . Podľa (64) v okolí  $O(\varepsilon_1, x)$  leží aspoň jeden prvok množiny  $B$ , z inklúzie  $O(\varepsilon_1, x) \subset P(\varepsilon, a)$  potom vyplýva  $P(\varepsilon_1, a) \cap B \neq \emptyset$ . Keďže táto úvaha platí pre každé  $\varepsilon > 0$ , je  $a$  hromadný bod množiny  $B$ .

**.46 Lema.** Nech  $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$ , kde  $I$  je neprázdna množina indexov, je systém množín reálnych čísel<sup>40</sup>. Potom platí

(a) ak každá z množín  $A_\alpha$  je otvorená, tak aj množina  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  je otvorená;

(b) ak každá z množín  $A_\alpha$  je uzavretá, tak aj množina  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  je uzavretá.

Ak množina  $I$  je navyše konečná, položme  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Potom

(c) ak každá z množín  $A_1, A_2, \dots, A_n$  je otvorená, tak aj množina  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  je otvorená;

(d) ak každá z množín  $A_1, A_2, \dots, A_n$  je uzavretá, tak aj množina  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  je uzavretá.

**Dôkaz.** (a) Označme  $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ . Ak  $x \in A$ , tak (podľa definície množiny  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ ) pre niektoré  $\alpha' \in I$  platí inklúzia  $x \in A_{\alpha'}$ . Keďže množina  $A_{\alpha'}$  je podľa predpokladu otvorená, existuje okolie  $O(x)$  bodu  $x$  s vlastnosťou  $O(x) \subset A_{\alpha'}$ . Z inklúzie  $A_{\alpha'} \subset A$  potom vyplýva  $O(x) \subset A$ , čo znamená, že  $x$  je vnútorný bod množiny  $A$ . Keďže táto úvaha platí pre každý prvok  $x \in A$ , je množina  $A$  otvorená.

(c) Ak  $x \in A$ , tak pre každé  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $x \in A_i$ . Keďže množina  $A_i$  je otvorená, vyplýva z inklúzie  $x \in A_i$  existencia čísla  $\varepsilon_i > 0$  takého, že  $O(\varepsilon_i, x) \subset A_i$ . Pre  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  potom platí

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) (O(\varepsilon, x) \subset O(\varepsilon_i, x) \subset A_i), \quad \text{tj.} \quad O(\varepsilon, x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

čo znamená, že  $x$  je vnútorný bod množiny  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

Tvrdenia (b) a (d) možno odvodiť z (a) a (c) použitím de Morganových pravidiel

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \mathbf{R} \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} (\mathbf{R} \setminus A_\alpha) \right) \quad \text{a} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \mathbf{R} \setminus \left( \bigcap_{i=1}^n (\mathbf{R} \setminus A_i) \right).$$

**Poznámka.** Nasledujúce príklady ukazujú, že predpoklad  $I$  je konečná množina nemožno v tvrdeniach (c) a (d) vynechať. Ak položíme  $I = \mathbf{N}$ ,  $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , tak každá z množín  $A_n$  je otvorená, ale o množine  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$  to neplatí. Podobne v prípade  $I = \mathbf{N}$ ,  $A_n := (-1, \frac{1}{n})$ , kedy  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 0]$ . Z uvedených príkladov už možno odvodiť príklady dokumentujúce nemožnosť vynechania uvedeného predpokladu aj v prípade (d), doplníme ich ešte jedným: pre  $I = \mathbf{N}$ ,  $A_n := [0, \frac{1}{n}]$  (teda všetky  $A_n$  sú uzavreté) je  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1)$ , čo zrejme nie je uzavretá množina. ♠

V našich ďalších úvahách budú mať množiny, s príkladmi ktorých sme sa stretli v predchádzajúcej poznámke, istý význam.

**.47 Definícia.** Množina  $A \subset \mathbf{R}$  sa nazýva množina typu  $G_\delta$ , ak je možné ju písať v tvare najviac spočítateľného prieniku otvorených množín.

Množina  $B \subset \mathbf{R}$  sa nazýva množina typu  $F_\sigma$ , ak je možné ju písať v tvare najviac spočítateľného zjednotenia uzavretých množín.

**Poznámka.** Z de Morganových pravidiel

$$\mathbf{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R} \setminus A_n) \quad \text{a} \quad \mathbf{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R} \setminus A_n)$$

<sup>40</sup>Uveďme tu niekoľko príkladov systémov množín reálnych čísel. V systéme  $\{(x-1, x+1); x \in \mathbf{R}\}$  všetkých otvorených intervalov dĺžky 2 je indexovou množinou množina  $\mathbf{R}$  a  $A_x := (x-1, x+1)$ ; v systéme  $\{[a, b]; a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$  všetkých nedegenerovaných uzavretých intervalov je indexovou množinou množina  $I$  všetkých usporiadaných dvojíc  $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  takých, že  $a < b$ ; v systéme  $\{O(\varepsilon, x); \varepsilon > 0, x \in \mathbf{R}\}$  všetkých okolí reálnych čísel je indexovou množinou množina  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ .

zrejme vyplýva tvrdenie množina  $B$  je typu  $F_\sigma$  práve vtedy, keď  $\mathbf{R} \setminus B$  je typu  $G_\delta$ .

**Príklad. 1.** Množina  $\mathbf{Q}$  je typu  $F_\sigma$ , keďže  $\mathbf{Q} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \{q\}$  (za indexovú množinu sme zvolili spočítateľnú množinu  $\mathbf{Q}$ , jednoprvkové množiny  $\{q\}$  sú zrejme uzavreté).

**2.** Ukážeme teraz, že  $\mathbf{Q}$  nie je typu  $G_\delta$  (a teda  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  nie je typu  $F_\sigma$ ). Využijeme pritom nasledujúce tvrdenie:

**LEMA.** Ak  $\{A_n; n \in \mathbf{N}\}$  je spočítateľný systém uzavretých množín taký, že  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$ , tak aspoň jedna z množín  $A_n$  musí mať vnútorný bod.

**DŮKAZ.** Sporom. Predpokladajme, že  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$  a žiadna z množín  $A_n$  nemá vnútorné body. Potom musí existovať bod  $c_1$  tak, že  $c_1 \notin A_1$  (inak by platilo  $A_1 = \mathbf{R}$  a každý bod množiny  $A_1$  by bol jej vnútorným bodom). Keďže  $A_1$  je uzavretá množina, je množina  $\mathbf{R} \setminus A_1$  otvorená, a existuje preto  $\varepsilon_1 > 0$  tak, že  $(c_1 - \varepsilon_1, c_1 + \varepsilon_1) \subset \mathbf{R} \setminus A_1$ . Označme  $I_1 := [c_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, c_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}]$ .  $I_1$  je teda uzavretý ohraničený interval neobsahujúci prvky množiny  $A_1$ .

V intervale  $I_1$  musí ležať aspoň jeden bod  $c_2$  s vlastnosťou  $c_2 \notin A_2$  (keby totiž platilo  $I_1 \subset A_2$ , bol by bod  $c_1$  vnútorný bod množiny  $A_2$ , čo podľa predpokladov nie je možné). Keďže  $\mathbf{R} \setminus A_2$  je otvorená množina, existuje  $\varepsilon_2 > 0$  tak, že  $(c_2 - \varepsilon_2, c_2 + \varepsilon_2) \subset \mathbf{R} \setminus A_2$ . Označme  $I_2 := I_1 \cap [c_2 - \frac{\varepsilon_2}{2}, c_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}]$ .  $I_2$  je teda uzavretý ohraničený interval neobsahujúci prvky z  $A_2$ , pritom  $I_2 \subset I_1$ .

Ak budeme týmto spôsobom postupovať ďalej, dostaneme postupnosť uzavretých ohraničených intervalov

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots,$$

pričom interval  $I_n$  neobsahuje prvky množiny  $A_n$ . Podľa vety .36 má systém  $\{I_n; n \in \mathbf{N}\}$  neprázdny prienik. Pre prvky  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  z inklúzie  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset I_k$  vyplýva  $x \notin A_k$ . Keďže táto úvaha platí pre každé  $k \in \mathbf{N}$ , dostávame

$$(\forall k \in \mathbf{N})(x \notin A_k), \quad \text{tj.} \quad x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

čo je ale v spore s predpokladom  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbf{R}$ . Tým je dôkaz našej lemy skončený.  $\Delta$

Naše tvrdenie budeme tiež dokazovať sporom; predpokladajme, že množina  $\mathbf{Q}$  je typu  $G_\delta$ . Existujú teda spočítateľný systém  $\{A_n; n \in \mathbf{N}\}$  otvorených množín tak, že  $\mathbf{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Označme  $B_i = \mathbf{R} \setminus A_i$ . Množina  $B_i$  je potom uzavretá (lebo  $A_i$  bola otvorená) a neobsahuje vnútorné body (keby  $c \in B_i$  bol vnútorný bod množiny  $B_i$ , platilo by  $O(\varepsilon, c) \subset B_i$  pre niektoré  $\varepsilon > 0$ ; keďže každý interval obsahuje aspoň jedno racionálne číslo, platila by pre niektoré  $q \in \mathbf{Q}$  inklúzia  $q \in O(\varepsilon, c)$ , a teda aj  $q \in B_i$ ; potom ale  $q \in B_i \cap \mathbf{Q} = B_i \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset B_i \cap A_i = \emptyset$ , inklúzia  $q \in \emptyset$  je ovšem vytúžený spor). Z de Morganovho pravidla vyplýva  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbf{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R} \setminus B_n) = \mathbf{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , teda množinu  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  možno písať v tvare zjednotenia spočítateľného systému  $\mathcal{B} := \{B_n; n \in \mathbf{N}\}$  uzavretých množín, ktoré nemajú vnútorné body. Každý prvok spočítateľného systému  $\mathcal{A} := \{\{q\}; q \in \mathbf{Q}\}$  je tiež uzavretá množina bez vnútorných bodov, zjednotením tohto systému je množina  $\mathbf{Q}$ . Potom  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  je spočítateľný systém uzavretých množín bez vnútorných bodov, zjednotením ktorého je množina  $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ . To je však v spore s tvrdením našej lemy, čím je dôkaz skončený.  $\spadesuit$

Záver tohto odseku venujeme kompaktným množinám. Nasledujúce tvrdenie je sčasti nepovinným úvodom do tejto problematiky („nepovinnosť“ sa týka implikácie (a) $\Rightarrow$ (b)).

**.48 Lema.** Nech  $B \subset \mathbf{R}$ . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (a) z každej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$  možno vybrať konvergentnú podpostupnosť, ktorej limita leží v  $B$ ;
- (b) množina  $B$  je uzavretá a ohraničená.

**DŮkaz.** (b)  $\Rightarrow$  (a). Nech  $B$  je uzavretá a ohraničená, nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ . Keďže  $B$  (a teda aj  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ) je ohraničená, možno z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  vybrať podľa vety .40 konvergentnú podpostupnosť s limitou  $a$ . Pretože  $B$  je uzavretá, vyplýva z poznámky za lemov .45 inklúzia  $a \in B$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b). Treba dokázať implikáciu ak platí (a), tak  $B$  je uzavretá a implikáciu ak platí (a), tak  $B$  je ohraničená, začneme prvou z nich. Stačí dokázať, že z (a) vyplýva vlastnosť (c) z poznámky za lemov .45. Nech teda  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$  je konvergentná postupnosť s limitou  $a$ . Podľa predpokladu (a) možno z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  vybrať konvergentnú podpostupnosť, ktorej limita leží v  $B$ . Keďže limitou tejto podpostupnosti môže byť len  $a$  (lema .38), platí  $a \in B$ , čo sme chceli dokázať.

Implikáciu ak platí (a), tak  $B$  je ohraničená dokážeme nepriamo. Ak  $B$  nie je ohraničená zhora, zostrojíme postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$  s limitou  $\infty$ , z lemy .38 potom vyplýva, že z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  už nemožno vybrať konvergentnú podpostupnosť (keďže všetky jej podpostupnosti divergujú k  $\infty$ ).

Nech teda  $B$  nie je zhora ohraničená, tj. nech

$$(\forall K \in \mathbf{R})(\exists b \in B)(b > K).$$



Zvoľme  $n \in \mathbf{N}$ , množina  $\{b \in B; b > n\}$  je neprázdna, vyberme jeden jej prvok a označme ho  $a_n$ . Ak to urobíme pre každé  $n \in \mathbf{N}$ , dostaneme postupnosť <sup>41</sup>  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  s vlastnosťou  $(\forall n \in \mathbf{N})(a_n > n)$ , z tejto nerovnosti už podľa lemy .19 (pre  $M = \mathbf{N}$ ,  $f(n) = n$ ,  $g(n) = a_n$ ) vyplýva  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Podobne možno pre zdola neohraničenú množinu  $B$  skonštruovať postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  s limitou  $-\infty$ .

**.49 Definícia.** Systém množín  $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$  sa nazýva *otvorené pokrytie množiny*  $A \subset \mathbf{R}$ , ak  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  a každá z množín  $A_\alpha$  je otvorená.

Množina  $A \subset \mathbf{R}$  sa nazýva *kompaktná množina* (alebo *kompakt*), ak z každého jej otvoreného pokrytia  $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$  možno vybrať konečné podpokrytie (tj. existuje konečná množina  $J \subset I$  tak, že systém  $\{A_\alpha; \alpha \in J\}$  je otvorené pokrytie množiny  $A$ ).

**.50 Veta.** *Množina  $A \subset \mathbf{R}$  je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.*

**Dôkaz.** “ $\Rightarrow$ ” Dokážeme najprv implikáciu *ak  $A$  je kompaktná, tak je ohraničená*. Nech  $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , potom  $\mathcal{A} := \{A_n; n \in \mathbf{N}\}$  je otvorené pokrytie množiny  $A$  (keďže platí  $\bigcup \mathcal{A} = \mathbf{R}$ ), možno z neho teda – pretože  $A$  je kompaktná – vybrať konečné podpokrytie  $\mathcal{B}$ . Nech  $N := \max\{n; A_n \in \mathcal{B}\}$ , potom  $A \subset \bigcup_{n=1}^N A_n = (-N, N)$ , teda  $A$  je ohraničená množina.  $\Delta$

Dôkaz implikácie *ak  $A$  je kompaktná, tak  $A$  je uzavretá* je nepatrne dlhší. Treba dokázať (definícia .44), že každé číslo  $b \in \mathbf{R} \setminus A$  je vnútorný bod množiny  $\mathbf{R} \setminus A$ . Zvoľme teda pevne  $b \in \mathbf{R} \setminus A$ . Ak  $x \in A$ , potom zrejme  $x \neq b$ , a teda  $\varepsilon_x := \frac{|b-x|}{2}$  je kladné číslo, pre okolia  $O(\varepsilon_x, x)$  a  $O(\varepsilon_x, b)$  potom iste platí

$$O(\varepsilon_x, x) \cap O(\varepsilon_x, b) = \emptyset. \quad (65)$$

Systém  $\{O(\varepsilon_x, x); x \in A\}$  je otvorené pokrytie kompaktnej množiny  $A$ , existuje teda jeho konečné podpokrytie  $\mathcal{B} = \{O(\varepsilon_{x_1}, x_1), \dots, O(\varepsilon_{x_n}, x_n)\}$ . Nech  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\}$ ; dokážeme, že  $O(\varepsilon, b) \subset \mathbf{R} \setminus A$  (odporúčame ovšem čitateľovi, aby si najprv sám rozmyslel, že to musí byť pravda). Sporom, nech pre niektoré  $a \in A$  platí

$$a \in O(\varepsilon, b), \quad \text{tj. } |b - a| < \varepsilon. \quad (66)$$

Keďže  $\mathcal{B}$  je pokrytie množiny  $A$ , existuje  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tak, že

$$a \in O(\varepsilon_{x_j}, x_j), \quad \text{tj. } |a - x_j| < \varepsilon_{x_j}. \quad (67)$$

Z (66), (67) a nerovnosti  $\varepsilon \leq \varepsilon_{x_j}$  potom vyplýva

$$2\varepsilon_{x_j} = |b - x_j| = |(b - a) + (a - x_j)| \leq |b - a| + |a - x_j| < \varepsilon + \varepsilon_{x_j} \leq 2\varepsilon_{x_j};$$

nerovnosť  $2\varepsilon_{x_j} < 2\varepsilon_{x_j}$  ovšem zrejme nemôže platiť<sup>42</sup>.

“ $\Leftarrow$ ” Budeme postupovať sporom. Nech teda  $A$  je uzavretá a ohraničená množina, ktorá nie je kompaktná. Potom existuje jej otvorené pokrytie  $\mathcal{A}$ , z ktorého nemožno vybrať konečné podpokrytie. Naše ďalšie úvahy budú teraz nápadne pripomínať dôkaz vety .40.

Nech  $I_1 := [c_1, d_1]$  je interval s vlastnosťou  $A \subset I_1$  (existencia  $I_1$  vyplýva z ohraničenosti množiny  $A$ ). Rozdeľme ho bodom  $b_1 := \frac{c_1 + d_1}{2}$  na intervaly  $I_{11} := [c_1, b_1]$ ,  $I_{12} := [b_1, d_1]$ , vyberme ten z nich, ktorého prienik s množinou  $A$  nemožno pokryť konečným počtom množín z  $\mathcal{A}$  (ak majú túto vlastnosť obidva, zvoľme  $I_{11}$ ) a označme ho  $I_2$  a jeho koncové body  $c_2 < d_2$ . Opakovaním tohto postupu získame postupnosť intervalov spĺňajúcich predpoklady (i) a (ii) vety .36, pričom

$$\begin{aligned} & \text{žiadnu z množín } I_n \cap A \text{ nemožno pokryť} \\ & \text{konečným počtom množín pokrytia } \mathcal{A} \end{aligned} \quad (68)$$

<sup>41</sup>axióma výberu večne živá

<sup>42</sup>Pokiaľ sa čitateľovi náš dôkaz sporom nepáčil, ponúkame mu tento priamy:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon, b) \cap A & \subset O(\varepsilon, b) \cap \bigcup_{n=1}^N O(\varepsilon_{x_n}, x_n) = \bigcup_{n=1}^N (O(\varepsilon, b) \cap O(\varepsilon_{x_n}, x_n)) \subset \\ & \subset \bigcup_{n=1}^N (O(\varepsilon_{x_n}, b) \cap O(\varepsilon_{x_n}, x_n)) = \emptyset, \end{aligned}$$

pričom posledná rovnosť vyplýva z (65).

(a teda zrejme každá z množín  $I_n \cap A$  je nekonečná). Nech  $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ .  
 Keďže  $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1 - c_1}{2^{n-1}} = 0$ , má číslo  $a$  nasledujúcu vlastnosť

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbf{N})(I_m \subset O(\varepsilon, a)), \quad (69)$$

z nej vyplýva – keďže každá z množín  $I_m$  obsahuje nekonečne veľa prvkov množiny  $A$  – že  $a$  je hromadný bod množiny  $A$ , a teda  $a \in A$  (lema .45). Keďže  $a \in A$  a  $\mathcal{A}$  je otvorené pokrytie množiny  $A$ , existuje  $M \in \mathcal{A}$  s vlastnosťou  $a \in M$ . Z otvorenosti množiny  $M$  vyplýva, že pre niektoré  $\varepsilon > 0$  platí  $O(\varepsilon, a) \subset M$  (definícia .44). Z (69) potom ale vyplýva, že pre niektorý člen  $I_m$  našej postupnosti  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  platí  $I_m \subset O(\varepsilon, a) \subset M$ , čo znamená, že interval  $I_m$  – a tým skôr aj množinu  $I_m \cap A$  – možno pokryť jediným prvkom pokrytia  $\mathcal{A}$ , čo je zrejme spor s (68).

**Poznámka.** Z lemy .48 a vety .50 vyplýva toto tvrdenie:

VETA. *Nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

(a) množina  $A \subset \mathbf{R}$  je kompaktná;

(b) z každej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  možno vybrať konvergentnú podpostupnosť, ktorej limita je prvkom množiny  $A$ .

**.51 Lema.** *Ak  $A \subset \mathbf{R}$  je kompaktná množina, tak existujú  $\min A, \max A$ .*

**Dôkaz.** Keďže  $A$  je podľa vety .50 ohraničená, existujú  $\sup A, \inf A$ . Inklúziu  $\sup A \in A$  dokážeme sporom. Ak  $a := \sup A \notin A$ , tak  $a$  je hromadný bod množiny  $A$  (dôkaz sa zakladá na rovnakej úvahe ako dôkaz bodu 2 implikácie (b) $\Rightarrow$ (c) v poznámke za lemov .45), z lemy .45 potom vyplýva  $a \in A$ , čo je spor s predpokladom  $a \notin A$ . Dôkaz inklúzie  $\inf A \in A$  je rovnaký.

## Part II

# Spojité funkcie

## 7 Definícia spojitosti

**.52 Definícia.** Hovoríme, že funkcia  $f$  je *spojitá v bode*  $a \in D(f)$ , ak platí

$$\left( \forall O(f(a)) \right) \left( \exists O(a) \right) \left( \forall x \in O(a) \cap D(f) \right) \left( f(x) \in O(f(a)) \right), \quad (70)$$

čo – keďže okolia čísel  $a, f(a)$  môžeme popísať ich polomeri  $\delta$  a  $\varepsilon$  – je to isté ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \spadesuit \quad (71)$$

:-) Výroky (70) a (71) nápadne pripomínajú zápis rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , sú tu však dve odlišnosti:

- podstatná: nepredpokladáme, že  $a$  je hromadný bod definičného oboru  $D(f)$ ;
- nepodstatná: z (70) vidno, že nehľadáme prstencové okolie bodu  $a$ , ale okolie tohto bodu. (-:

Vzťahu limity a spojitosti je venovaný nasledujúci paragraf.

**.53 Definícia.** Číslo  $a \in \mathbf{R}$  sa nazýva *izolovaný bod množiny*  $M \subset \mathbf{R}$ , ak  $a \in M$ , ale  $a$  nie je hromadný bod množiny  $M$ , tj. ak platí

$$(\exists O(a))(M \cap O(a) = \{a\}).$$

**Lema.** *Nech je daná funkcia  $f$ , nech  $a \in D(f)$ . Potom*

(a) *ak  $a$  je izolovaný bod množiny  $D(f)$ , tak  $f$  je spojitá v bode  $a$ ;*

(b) *ak  $a$  je hromadný bod množiny  $D(f)$ , tak  $f$  je spojitá v bode  $a$  práve vtedy, keď  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .*

**Dôkaz.** (a) Nech  $\mathcal{O}$  je okolie bodu  $a$  s vlastnosťou  $\mathcal{O} \cap D(f) = \{a\}$ . Ak zvolíme  $O(f(a))$  a budeme hľadať okolie  $O(a)$  spĺňajúce požiadavky z (70), zistíme, že vždy stačí položiť  $O(a) := \mathcal{O}$ , pretože pre  $x \in \mathcal{O} \cap D(f) = \{a\}$  platí  $f(x) = f(a) \in O(f(a))$ .

(b) Stačí porovnať (71) a (10); zrejme platí (71) $\Rightarrow$ (10); dôkaz opačnej implikácie vyplýva z faktu, že nerovnosť  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  z (10) zostane iste zachovaná, ak za  $x$  zvolíme  $a$ . ♠

Obdobou vety .39 je v prípade spojitosti nasledujúce tvrdenie.

**.54 Veta.** *Nech  $a$  je prvok definičného oboru funkcie  $f$ . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(a) *pre každú postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$  s limitou  $a$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ ;*

(b) *funkcia  $f$  je spojitá v bode  $a$ .*

**Dôkaz** je verná kópia dôkazu vety .39 v paragrafe .6 (druhou, ale – ako čitateľ zistí – komplikovanejšou možnosťou, je odvodiť naše tvrdenie z vety .39.

**.55 Veta.** (a) *Ak funkcie  $f$  a  $g$  s definičným oborom  $M$  sú spojité v bode  $a$ , tak aj funkcie  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  sú spojité v  $a$ . Ak navyše  $g(a) \neq 0$ , tak aj funkcia  $\frac{f}{g}$  je spojitá v bode  $a$ .*

(b) *Ak funkcia  $f$  je spojitá v bode  $a$  a funkcia  $g$  v bode  $f(a)$ , tak funkcia  $g \circ f$  je spojitá v bode  $a$ .*

**Dôkaz.** (a) V prípade, že  $a$  je izolovaný bod množiny  $M$ , niet čo dokazovať (lema .53(a)). Ak  $a$  je hromadný bod množiny  $M$ , je to dôsledok vety .15 a lemy .53(b).  $\Delta$

Najrýchlejšia cesta dôkazu v prípade (b) je zopakovať (tento raz v jednoduchšej verzii) úvahy z dôkazu vety .17<sup>43</sup>:

K  $O(g(f(a)))$  existuje  $O(f(a))$  s vlastnosťou

$$y \in O(f(a)) \cap D(g) \Rightarrow g(y) \in O(g(f(a))), \quad (72)$$

k  $O(f(a))$  existuje okolie  $O(a)$  s vlastnosťou

$$x \in O(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(f(a)),$$

z ktorej vyplýva

$$x \in O(a) \cap D(g \circ f) \Rightarrow f(x) \in O(f(a)) \cap D(g); \quad (73)$$

z (73) a (72) už vyplýva naše tvrdenie.

**.56 Definícia.** Číslo  $a \in \mathbf{R}$  sa nazýva *bod nespojivosti funkcie  $f$* , ak  $a$  je hromadný bod množiny  $D(f)$ , ktorý spĺňa jednu z nasledujúcich podmienok:

1.  $a \notin D(f)$ ;

2.  $a \in D(f)$ , ale  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  buď neexistuje, alebo – ak existuje – je rôzna od  $f(a)$ . ♠

Klasifikáciu bodov nespojivosti uvádzame v nasledujúcej tabuľke<sup>44</sup>.

<sup>43</sup>Môžeme – samozrejme – zopakovať postup z bodu (a) a odvodiť naše tvrdenie z lemy .53 a vety o limite zloženej funkcie; ako však uvidíme, je to komplikovanejšie než dôkaz, ktorý uvádzame v texte:

Ak  $a$  je izolovaný bod množiny  $D(g \circ f)$ , niet čo dokazovať. Ak  $a$  je hromadný bod množiny  $D(g \circ f)$ , sú dve možnosti.

1.  $f(a)$  je izolovaný bod množiny  $D(g)$ , vtedy z predpokladu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  (tj. zo spojitosti funkcie  $f$  v bode  $a$ ) vyplýva, že funkcia  $g \circ f$  je konštantná na niektorom okolí  $O(a)$  bodu  $a$  (stačí zvoliť  $O(a)$  s vlastnosťou  $x \in O(a) \cap D(g \circ f) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O} \cap D(g)$ , kde  $\mathcal{O}$  je okolie bodu  $f(a)$  také, že  $\mathcal{O} \cap D(g) = \{f(a)\}$ );

2. ak  $f(a)$  je hromadný bod množiny  $D(g)$ , tak z predpokladu spojitosti vyplýva  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ,  $\lim_{y \rightarrow f(a)} g(y) = g(f(a))$  a naše tvrdenie vyplýva z vety .17 (v ktorej je splnená podmienka (c)).

<sup>44</sup>Žiadame čitateľa, aby sa nedal ohúriť zdanlivou komplikovanosťou vetviacich sa možností, vyhne sa tak depresiám a následnému rozhodnutiu buď skočiť z okna alebo sa nedajbože tabuľku naučiť naspamäť.

a je hromadný bod množiny  $D(f)$

existuje vlastná  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: b$

neexistuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$a \in D(f)$

$f(a) = b$

$f(a) \neq b$

$a \notin D(f)$

existujú konečné  
navzájom rôzne  
jednostranné limity

iné dôvody  
neexistencie  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

existuje nevlastná  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

	odstrániteľná nespojitosť	neodstrániteľná nespojitosť
spojitosť	body nespojitosti 1. druhu	body nespojitosti 2. druhu

Nasledujúcich 6 funkcií dokumentuje jednotlivé možnosti uvedené v štvrtom riadku našej tabuľky, vo všetkých prípadoch nás zaujíma spojitosť v bode  $a = 0$ :

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \neq 0 \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}, f_3(x) = \frac{x^2}{x}, f_4(x) = [x] \text{ (kde } [.] \text{ označuje celú časť)}, f_5(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), f_6(x) = \frac{1}{x^2}.$$

**.57 Cvičenie.** Každé číslo  $a \in \mathbf{R}$  je bod nespojitosti 2. druhu Dirichletovej funkcie

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \\ 1, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \end{cases}.$$

**.58 Príklad.** *Nech  $f$  je monotónna funkcia definovaná na intervale  $I$ . Potom*

- (a) *body nespojitosti funkcie  $f$  ležiace vnútri intervalu  $I$  sú neodstrániteľné body nespojitosti 1. druhu;*
- (b) *množina všetkých bodov nespojitosti funkcie  $f$  je spočítateľná.*

(a) Nech  $a$  je bod nespojitosti funkcie  $f$  ležiaci vnútri intervalu  $I$ . Podľa dôsledku .31 v  $a$  existujú konečné jednostranné limity. Keby sa tieto limity rovnali, vyplývala by z lemy .28 existencia limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a z nerovností v dôsledku .31 rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , čo by znamenalo, že funkcia  $f$  je v bode  $a$  spojitá.

(b) Keďže množina všetkých bodov nespojitosti funkcie  $f$  je zjednotením množiny  $\mathcal{N}$  všetkých jej bodov nespojitosti ležiacich vnútri intervalu  $I$  s najviac dvojprvkovou množinou (ako ďalšie body nespojitosti totiž prichádzajú do úvahy už len krajné body intervalu  $I$ ), stačí dokázať spočítateľnosť množiny  $\mathcal{N}$ .

Predpokladajme najprv, že  $f$  je rastúca. Potom každému bodu nespojitosti  $a \in \mathcal{N}$  možno priradiť otvorený interval  $I_a := (\lim_{x \rightarrow a-} f(x), \lim_{x \rightarrow a+} f(x))$ ; pritom pre  $a \neq b$  je  $I_a \cap I_b = \emptyset$  (ak  $b < a$ , tak  $\lim_{x \rightarrow b+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ , prvá nerovnosť vyplýva z dôsledku .30, pretože  $f(a) \in A := \{f(x); x \in M_+\}$  a  $\lim_{x \rightarrow b+} f(x) = \inf A$ ; rovnako možno uvažovať v prípade  $a < b$ ). Systém  $\mathcal{I} := \{I_a; a \in \mathcal{N}\}$  je teda systém po dvoch disjunktných nedegenerovaných intervalov, preto je spočítateľný. Pretože zobrazenie  $p : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{I}$ ,  $p(a) = I_a$ , je bijekcia, je potom spočítateľná aj množina  $\mathcal{N}$ . Tým je naše tvrdenie v prípade  $f$  rastúca dokázané.

Ak  $f$  je neklesajúca, je funkcia  $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = x + f(x)$ , rastúca, pritom – ako vyplýva z úvah použitých v dôkaze lemy .23 – množiny bodov nespojitosti funkcií  $f$  a  $g$  sú totožné. Keďže podľa predchádzajúceho je množina všetkých bodov nespojitosti funkcie  $g$  spočítateľná, je tým naše tvrdenie dokázané aj v prípade  $f$  neklesajúca.

V prípade  $f$  nerastúca stačí využiť, že  $-f$  je neklesajúca funkcia s tou istou množinou bodov nespojitosti.

**Poznámka. 1.** Rozbor charakteru bodov nespojitosti funkcie  $f$  možno pomocou viet .29 a .30 rozšíriť samozrejme aj na krajné body intervalu  $I$ . Nasledujúce tvrdenia sú len sľubným začiatkom, na ktorý čitateľ iste dychtivo nadviaže.

*Nech  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je neklesajúca funkcia a  $\alpha$  je ľavý koncový bod intervalu  $I$ . Ak  $\alpha \in \mathbf{R}$ , ale  $\alpha \notin I$ , tak  $\alpha$  je bod nespojitosti funkcie  $f$ , ktorý je neodstrániteľný, ak  $f$  nie je zdola ohraničená (vtedy totiž  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$ ), a je odstrániteľný, ak  $f$  je zdola ohraničená.*

*Ak  $\alpha \in I$ , tak*

$$f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \tag{74}$$

*a funkcia je teda v bode  $\alpha$  buď spojitá (ak v 74 platí rovnosť, alebo je to odstrániteľný bod nespojitosti (ak v 74 platí ostrá nerovnosť)).*

**2.** Tvrdenie (b) nášho príkladu už nemožno zlepšiť, možno totiž dokázať (čo urobíme neskôr v kapitole o číselných radoch) túto lemu.

LEMA. *Nech  $\mathcal{N}$  je spočítateľná množina. Potom existuje rastúca funkcia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , pre ktorú je  $\mathcal{N}$  množinou všetkých jej bodov nespojitosti.*

**.59 Príklad.** *Riemannova funkcia*

$$r(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ak } x = \frac{p}{q}, \end{cases} \quad \text{kde } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné}$$

je spojité v každom iracionálnom čísle, každé racionálne číslo je jej odstrániteľný bod nespojitosti.

Dokážeme, že pre každé  $a \in \mathbf{R}$  platí  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$ , odtiaľ už – keďže  $r(a) = 0$  pre  $a \notin \mathbf{Q}$  a  $r(a) \neq 0$  pre  $a \in \mathbf{Q}$  – bude vyplývať naše tvrdenie.

(-) Stačí si uvedomiť, že – ak  $n \in \mathbf{N}$  je pevne zvolené – hodnoty  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$  môže funkcia  $r$  nadobúdať len v niektorom z bodov tvaru  $\frac{k}{n}$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$ , a že každý bod  $a \in \mathbf{R}$  má prstencové okolie, ktoré už také body neobsahuje. (-:

Nech  $n \in \mathbf{N}$ ; ak  $A_n := \{\frac{k}{n}; k \in \mathbf{Z}\}$ , tak pre  $x \in \mathbf{R} \setminus A_n$  je  $0 \leq r(x) < \frac{1}{n}$ . Ak  $P(2, a)$  je prstencové okolie bodu  $a$  s polomerom 2, tak  $P(2, a) \cap A_n \neq \emptyset$ , ale v  $P(2, a)$  môže ležať len konečne veľa prvkov množiny  $A_n$ , preto existuje  $\delta := \min\{|a - x|; x \in A_n \cap P(2, a)\}$ , pritom  $\delta > 0$  (z rovnosti  $\delta = 0$  by vyplývalo  $x = a$  pre niektoré  $x \in P(2, a) \cap A_n$ , čo – keďže  $a \notin P(2, a)$  – nie je možné). Potom  $P(\delta, a) \cap A_n = \emptyset$ , a teda platí

$$(\forall x \in P(\delta, a)) \left( |r(x)| < \frac{1}{n} \right).$$

Keďže pre každé  $\varepsilon > 0$  vieme nájsť  $n \in \mathbf{N}$  tak, že  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , vyplýva z predchádzajúcich úvah pravdivosť tvrdenia

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathbf{R}) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |r(x)| < \varepsilon),$$

čím je rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$  dokázaná.

**Poznámka. 1.** Množina  $\mathbf{Q}$  bodov nespojitosti funkcie  $r$ , ktorá – ako sme práve videli – má len odstrániteľné body nespojitosti, bola spočítateľná. Ukazuje sa, že to nie je náhoda; platí totiž toto tvrdenie:

*Nech funkcia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  má len odstrániteľné body nespojitosti. Potom množina všetkých jej bodov nespojitosti je spočítateľná.*

Dôkaz naznačíme pre záujemcov len v poznámke <sup>45</sup> pod čiarou a čitateľovi prenecháme tiež kontrolu správnosti dôkazu nasledujúcej lemy (ukazujúcej, že práve vyslovené tvrdenie už nemožno zlepšiť).

LEMA. *Nech  $\mathcal{N}$  je spočítateľná množina. Potom existuje funkcia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  taká, že množina  $\mathcal{N}$  je množinou všetkých jej bodov nespojitosti.*

DÔKAZ. V prípade  $\mathcal{N}$  konečná stačí položiť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{N} \\ 1 & \text{pre } x \in \mathcal{N} \end{cases}.$$

Ak  $\mathcal{N}$  je nekonečne spočítateľná, zoradíme ju do prostej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a položíme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{N} \\ \frac{1}{n} & \text{pre } x = a_n \end{cases}.$$

**2.** Človeku môže skrsnúť v hlave myšlienka <sup>46</sup>: keď existuje funkcia, ktorá je nespojitá len v racionálnych číslach, nedala by sa nejak zostrojiť aj funkcia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  s  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  ako množinou všetkých bodov nespojitosti? Túto otázku zodpovieme (negatívne) v závere tohto odseku.

<sup>45</sup>Nech  $\mathcal{I} := \{(p, q) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}; p < q\}$ , nech  $A_{pq} := \{a \in \mathbf{R}; \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq p < q \leq f(a)\}$ ,  $B_{pq} := \{a \in \mathbf{R}; f(a) \leq p < q \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x)\}$ . Potom žiadne  $\alpha \in \mathbf{R}$  nie je hromadný bod množiny  $A_{pq}$  (keby  $\alpha \in \mathbf{R}$  bol hromadný bod množiny  $A_{pq}$ , existovala by postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A_{pq}$  s limitou  $\alpha$ ; z vlastnosti  $f(a_n) \geq q$  by vyplývalo  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \geq q$ , súčasne – pretože  $(\forall n \in \mathbf{N})(\lim_{x \rightarrow a_n} f(x) \leq p)$  – by bolo možné skonštruovať postupnosť  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  tak, že  $|b_n - a_n| < \frac{1}{n}$ ,  $f(b_n) < p + \frac{1}{n}$ ; potom by ale muselo – keďže  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$  – platiť aj  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \leq p$ , čo nie je možné, pretože  $p < q$ ). Rovnakú vlastnosť má aj každá z množín  $B_{pq}$ . Z tejto vlastnosti vyplýva, že každá z množín  $A_{pq}, B_{pq}$  je spočítateľná. (Keby množina  $M$  s uvedenou vlastnosťou nebola spočítateľná, existovalo by  $i \in \mathbf{N}$  tak, že v intervale  $[i, i + 1]$  by ležala nekonečne veľa prvkov množiny  $M$ . Analógiou postupu z dôkazu vety .40 potom možno dokázať, že v  $[i, i + 1]$  leží hromadný bod množiny  $M$ .) Pre množinu  $\mathcal{N}$  všetkých bodov nespojitosti funkcie  $f$  platí  $\mathcal{N} = \bigcup_{(p,q) \in \mathcal{I}} (A_{pq} \cup B_{pq})$ ; keďže množina  $\mathcal{I}$  aj každá z množín  $A_{pq}, B_{pq}$  pre  $(p, q) \in \mathcal{I}$  je spočítateľná, je spočítateľná aj množina  $\mathcal{N}$ .

<sup>46</sup>stávajú sa také veci

**.60 Definícia.** Funkcia  $f$  sa nazýva *spojitá*, ak je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.

Ak  $\emptyset \neq M \subset D(f)$  a funkcia  $f|_M$  je spojitá, hovoríme, že *funkcia  $f$  je spojitá na množine  $M$* .

**Dôležité upozornenie.** Naša definícia spojitosti na množine *nie je* ekvivalentná s často sa vyskytujúcou definíciou *funkcia  $f : D(f) \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá na množine  $M$ , ak  $f$  je spojitá v každom bode množiny  $M$* ; to ukazuje príklad Dirichletovej funkcie  $\chi$ ;  $\chi|_{\mathbf{Q}}$  je totiž spojitá funkcia, ale  $\chi$  nie je spojitá v žiadnom bode množiny  $\mathbf{Q}$ . Podobne funkcia  $[\cdot]$  (celá časť) je (podľa našej definície) spojitá na intervale  $[0, 1]$ , ale nie je pravda, že je spojitá v každom bode tohto intervalu (bod 0 je neodstrániteľný bod nespojitosti).

**Príklad.** Zo (stále ešte nedokázaného) tvrdenia vety .12 vyplýva:

*Každá elementárna funkcia je spojitá.*

**Poznámka.** Zavedená terminológia môže pôsobiť trochu nezvyčajným dojmom; napr. (elementárna) funkcia  $\frac{1}{x^2}$  je spojitá, ale 0 je jej (neodstrániteľný) bod nespojitosti.

Ak zvolíme trochu iný uhol pohľadu, zistíme, že napriek tomu nie sú naše pojmy až tak nezmyselne zvolené: Ak číslo  $a \in \mathbf{R}$  je odstrániteľný bod nespojitosti funkcie  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ , pričom  $a \notin M$ , je funkcia  $f_1 : M \cup \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre } x \in M \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{pre } x = a \end{cases}, \text{ spojitá v bode } a \text{ (o funkcii } f_1 \text{ niekedy hovoríme ako o } \textit{funkcii } f \textit{ spojito}$$

*dodefínovanej v bode } a*; takýmto spôsobom možno napríklad spojitú funkciu  $e^{-\frac{1}{x^2}}$  definovanú na  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  rozšíriť na spojitú funkciu s definičným oborom  $\mathbf{R}$ ). Skutočnosť, že 0 je neodstrániteľný bod nespojitosti funkcie  $\frac{1}{x^2}$ , z tohto hľadiska znamená, že funkciu  $\frac{1}{x^2}$  nemožno v bode 0 spojito dodefínovať (teda zväčšenie jej definičného oboru o bod nespojitosti je možné len za cenu straty spojitosti) <sup>47</sup>.

Na záver tohto odseku ukážeme, ako možno spojitost funkcie popísať pomocou pojmu oscilácie.

**.61 Definícia.** Nech je daná funkcia  $f$ . Ak  $\emptyset \neq M \subset D(f)$  a  $f$  je ohraničená na  $M$ , nazýva sa číslo

$$\omega(f, M) := \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)$$

*oscilácia funkcie  $f$  na množine  $M$* .

**Poznámka.** Pre  $\emptyset \neq N \subset M$  je  $\sup_{x \in N} f(x) \leq \sup_{x \in M} f(x)$ ,  $\inf_{x \in N} f(x) \geq \inf_{x \in M} f(x)$ , preto  $\omega(f, N) \leq \omega(f, M)$ . Z tejto úvahy vyplýva: ak  $f$  je ohraničená v niektorom okolí  $O(\gamma, a)$  bodu  $a \in D(f)$  (tj. na množine  $O(\gamma, a) \cap D(f)$ ), tak funkcia  $\Delta : [0, \gamma] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\Omega(\delta) = \omega(f, O(\delta, a) \cap D(f))$  je neklesajúca a nezáporná. Preto podľa dôsledku .30 existuje  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, O(\delta, a) \cap D(f))$ .

<sup>47</sup>V tejto úvahe sme sa obmedzili len na jeden bod nespojitosti, možno ju však vykonať aj všeobecne:

*Nech  $\mathcal{N}$  je množina všetkých bodov nespojitosti funkcie  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ , nech  $\mathcal{N} \cap M = \emptyset$ ; označme  $\mathcal{N}_0$  množinu všetkých odstrániteľných bodov nespojitosti. Potom funkcia  $f_1 : M \cup \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre } x \in M \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{pre } a \in \mathcal{N}_0 \end{cases}$  je spojitá.*

(-) Skôr než naznačíme dôkaz, mal by si čitateľ uvedomiť, že zdôvodnenie nie je na rozdiel od predchádzajúceho prípadu uvažujúceho len jeden bod odstrániteľnej nespojitosti až také bezprostredne zřejmé. Dodefínovanie funkcie  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  v jedinom bode totiž nezmení – čo sa týka existencie limít – situáciu v bodoch množiny  $M$  (každý bod z  $M$  má totiž okolie, na ktorom sa funkcie  $f$  a  $f_1$  zhodujú), v prípade dodefínovania funkcie  $f$  na množine  $\mathcal{N}_0$  (ktorá môže byť nekonečná), to nie je už také jasné na prvý pohľad. (-)

Myšlienka dôkazu je nasledovná: Ak  $a \in M \cup \mathcal{N}_0$  je hromadný bod množiny  $M \cup \mathcal{N}_0$ , tak je aj hromadný bod množiny  $M$  (pozri dôkaz lemy z poznámky 2 v paragrafe .45), preto existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f_1(a)$ . Ak zvolíme  $\varepsilon > 0$ , existuje okolie  $O(a)$  tak, že

$$(\forall x \in O(a) \cap M) \left( |f(x) - f_1(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (75)$$

Ak  $y \in \mathcal{N}_0 \cap O(a)$ , tak  $f_1(y) = \lim_{x \rightarrow y} f(x)$  a z nerovnosti (75) vyplýva  $|f_1(y) - f_1(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  (veta .24), čím sme dokázali výrok

$$\left( \forall x \in O(a) \cap (M \cup \mathcal{N}_0) \right) (|f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon). \spadesuit$$

*Takto dedefinovaná funkcia  $f_1$  už nemá odstrániteľné body nespojitosti.* (Sporom; predpokladajme, že  $a$  je odstrániteľný bod nespojitosti funkcie  $f_1$ , potom  $a$  je hromadný bod množiny  $M \cup \mathcal{N}_0$ , a teda aj hromadný bod množiny  $M$ . Z existencie konečnej  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$  potom vyplýva aj existencia konečnej  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , a teda  $a \in \mathcal{N}_0 \subset D(f_1)$ . To je ale spor, pretože funkcia  $f_1$  je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.)

Špeciálne platí: *ak  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$ , tak funkcia  $f_1$  už nemá body nespojitosti.* (Množina  $M \cup \mathcal{N}_0 = M \cup \mathcal{N}$  je totiž uzavretá (lema z poznámky 2 v paragrafe .45; prvky množiny  $M'$  ležia totiž buď v  $M$  alebo sú to body nespojitosti funkcie  $f$ ) a z lemy .45 vyplýva, že spojitá funkcia dedefinovaná na uzavretej množine nemá body nespojitosti.)

**Definícia.** Ak funkcia  $f$  je ohraničená v niektorom okolí bodu  $a \in D(f)$ , nazýva sa číslo

$$\omega(f, a) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, O(\delta, a) \cap D(f))$$

oscilácia funkcie  $f$  v bode  $a$ .

**.62 Cvičenie.** Ak funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je na intervale  $I$  ohraničená a bod  $a$  je vnútorný bod intervalu  $I$ , tak  $\omega(f, a) \leq \omega(f, I)$ .

**.63 Lema.** Funkcia  $f$  je v bode  $a \in D(f)$  spojitá práve vtedy, keď  $\omega(f, a) = 0$ .<sup>48</sup>

**Dôkaz** je založený na nasledujúcich úvahách:

“ $\Rightarrow$ ”: ak pre každé  $x \in O(\delta, a) \cap D(f)$  platí  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , tak – keďže  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  je ekvivalentné s nerovnosťami  $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$  – platí  $\sup_{x \in O(\delta, a) \cap D(f)} f(x) \leq f(a) + \varepsilon$ ,  $\inf_{x \in O(\delta, a) \cap D(f)} f(x) \geq f(a) - \varepsilon$ , a teda  $\omega(f, O(\delta, a) \cap D(f)) \leq 2\varepsilon$ ;

“ $\Leftarrow$ ”: ak  $\omega(f, O(\delta, a) \cap D(f)) \leq \varepsilon$ , tak pre všetky  $x \in O(\delta, a) \cap D(f)$  platí  $|f(x) - f(a)| \leq \sup_{x \in O(\delta, a) \cap D(f)} f(x) - \inf_{x \in O(\delta, a) \cap D(f)} f(x) = \omega(f, O(\delta, a) \cap D(f)) < \varepsilon$ .

Podrobnú realizáciu prenechávame na čitateľa.

**.64 Lema.** Nech  $f$  je funkcia definovaná na  $\mathbf{R}$ , nech  $\varepsilon > 0$ . Potom množina  $A_\varepsilon := \{x \in \mathbf{R} ; f \text{ je ohraničená v niektorom okolí bodu } x \text{ a } \omega(f, x) < \varepsilon\}$  je otvorená.

**Dôkaz.** Ak  $A_\varepsilon = \emptyset$ , je tvrdenie zrejme pravdivé, pretože  $\emptyset$  je otvorená množina.

Nech teraz  $A_\varepsilon \neq \emptyset$ , nech  $a \in A_\varepsilon$ . Keďže  $\varepsilon > \omega(f, a) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, O(\delta, a))$ , existuje  $\Delta > 0$  tak, že  $\omega(f, O(\Delta, a)) < \varepsilon$  (funkcia  $g(\delta) = \varepsilon - \omega(f, O(\delta, a))$  má v bode 0 kladnú limitu, preto je na niektorom okolí tohto bodu zdola ohraničená kladnou konštantou (lema .10(b)), teda pre niektoré  $\Delta > 0$  je iste  $g(\Delta) > 0$ ). Pre každé  $x \in O(\Delta, a)$  potom platí  $\omega(f, x) \leq \omega(f, O(\Delta, a)) < \varepsilon$  (cvičenie .62). To ale znamená, že  $O(\Delta, a) \subset A_\varepsilon$ , teda  $a$  je vnútorný bod množiny  $A_\varepsilon$ . Keďže táto úvaha platí pre každé  $a \in A_\varepsilon$ , je  $A_\varepsilon$  otvorená množina.

**.65 Dôsledok.** Nech  $f$  je funkcia definovaná na  $\mathbf{R}$ . potom množina  $\mathcal{S}$  všetkých bodov, v ktorých je  $f$  spojitá, je množina typu  $G_\delta$ ; množina  $\mathcal{N}$  všetkých bodov nespojitosti funkcie  $f$  je množina typu  $F_\sigma$ .

**Dôkaz.** Z lemy .63 vyplýva rovnosť  $\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ , kde  $A_{\frac{1}{n}}$  je množina  $A_\varepsilon$  z predchádzajúcej lemy pre  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . Keďže každá z množín  $A_{\frac{1}{n}}$  je otvorená, znamená to, že množina  $\mathcal{S}$  je typu  $G_\delta$ . Z rovnosti  $\mathcal{N} = \mathbf{R} \setminus \mathcal{S}$  vyplýva, že  $\mathcal{N}$  je potom typu  $F_\sigma$  (poznámka za definíciou .47).

**Príklad. 1.** Teraz už môžeme zodpovedať otázku z poznámky 2 za príkladom .59. Keďže množina  $\mathbf{Q}$  nie je typu  $G_\delta$  (príklad 2 za definíciou .47), nemôže existovať funkcia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , ktorá by bola spojitá len v bodoch množiny  $\mathbf{Q}$ .

**2.** Ukážeme teraz, že informáciu z dôsledku .65 už nemožno zlepšiť. Platí totiž nasledujúce tvrdenie.

**LEMA.** Nech  $M$  je množina typu  $G_\delta$ . Potom existuje funkcia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , ktorá je spojitá práve v bodoch množiny  $M$ .

**DÔKAZ.** Nech  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť otvorených množín taká, že  $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Nech  $B_n := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ , potom  $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$  a  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť otvorených množín (lema .46(c)) taká, že  $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \dots$ . Označme  $C_1 := \mathbf{R} \setminus B_1$ ,  $C_{n+1} := B_n \setminus B_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) a definujme funkciu  $f$  predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \\ \frac{1}{n} & \text{pre } x \in C_n \cap \mathbf{Q} \\ -\frac{1}{n} & \text{pre } x \in C_n \setminus \mathbf{Q} \end{cases} .$$

V našich ďalších úvahách využijeme nerovnosť

$$(\forall x \in B_k) \left( |f(x)| < \frac{1}{k} \right), \quad (76)$$

<sup>48</sup>trochu ležérnym vyjadrením keď  $\omega(f, a) = 0$  myslíme (podobne ako v prípade limit) keď  $\omega(f, a)$  existuje a rovná sa 0

ktorá vyplýva z rovnosti  $B_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ .<sup>49</sup>  $\Delta$   
 Nech  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , ukážeme, že  $f$  je spojitá v bode  $a$ , tj. že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in O(\delta, a))( |f(x)| < \varepsilon ).$$

Nech je teda dané  $\varepsilon > 0$ , nájdime  $N \in \mathbf{N}$  tak, aby platilo  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Keďže  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , platí aj  $a \in B_N$ . Pretože  $B_N$  je otvorená množina, existuje  $\delta > 0$  tak, že  $O(\delta, a) \subset B_N$ , podľa (76) potom platí

$$(\forall x \in O(\delta, a))( |f(x)| < \frac{1}{N} < \varepsilon ),$$

čo znamená, že naše  $\delta$  má požadovanú vlastnosť.  $\Delta$

Ak  $a \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , je iste  $f(a) \neq 0$ . Bod  $a$  má na výber z dvoch možností:

1. V každom okolí bodu  $a$  ležia prvky z  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ ; potom ale v každom okolí bodu  $a$  nadobúda funkcia  $f$  aj nulové hodnoty, a teda – keďže  $f(a) \neq 0$  – nemôže byť v bode  $a$  spojitá (ak totiž  $f(a) > 0$  a  $f$  by bola spojitá v bode  $a$ , tak podľa lemy .10(b) by  $f$  v niektorom okolí bodu  $a$  nadobúdala len *kladné* hodnoty; podobné úvahy sa vzťahujú na prípad  $f(a) < 0$ ).

2. Existuje  $\gamma > 0$  tak, že  $O(\gamma, a) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ . Potom každé okolie  $O(\delta, a)$  pre  $0 < \delta < \gamma$  obsahuje racionálne aj iracionálne čísla neležiace v množine  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , a funkcia  $f$  teda v každom z týchto okolí nadobúda kladné aj záporné hodnoty. Keďže  $f(a) \neq 0$ , nemôže byť  $f$  v bode  $a$  spojitá (zdôvodnenie je rovnaké ako v predchádzajúcom bode).

## 8 Vlastnosti spojitých funkcií definovaných na intervale

**.66 Veta.** *Nech  $f$  je spojitá funkcia definovaná na intervale  $I$ . Ak existujú body  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , tak, že  $f(a)f(b) < 0$ ,<sup>50</sup> tak pre niektoré  $c \in (a, b)$  platí  $f(c) = 0$ .*

**Dôkaz.** Predpokladajme  $f(a) < 0 < f(b)$  (v prípade  $f(a) > 0 > f(b)$  stačí potom už dokázané tvrdenie aplikovať na funkciu  $-f$ ), nech  $A := \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$ . Množina  $A$  je neprázdna ( $a \in A$ ) a zhora ohraničená ( $A \subset [a, b]$ ), preto existuje  $c := \sup A$ , pritom – keďže  $a \in A$  a číslo  $b$  je horné ohraničenie množiny  $A$  – platí  $c \in [a, b]$ . Ukážeme, že nemôže platiť 1.  $f(c) < 0$  ani 2.  $f(c) > 0$ ; odtiaľ už bude vyplývať rovnosť  $f(c) = 0$  a súčasne – keďže  $f(a) \neq 0$ ,  $f(b) \neq 0$  – aj inklúzia  $c \in (a, b)$ . V našich úvahách využijeme, že  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ , keďže  $f$  je spojitá v bode  $c$ .

1. Budeme dokazovať sporom; nech  $f(c) < 0$ , potom  $c < b$ . Z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  a predpokladu  $f(c) < 0$  vyplýva (lema .10(c)) existencia čísla  $\delta_1$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in O(\delta_1, c) \cap I)(f(x) < 0).$$

Pre číslo  $\delta := \min\{\delta_1, b - c\}$  potom platí  $\delta > 0$  a

$$(\forall x \in [c, c + \delta))(f(x) < 0).$$

To ale znamená, že  $A$  musí obsahovať všetky čísla z intervalu  $[c, c + \delta)$ , čo nie je možné, keďže  $c$  je horné ohraničenie množiny  $A$ . Z tohto sporu vyplýva, že nerovnosť  $f(c) < 0$  nemôže platiť.

2. Z nerovnosti  $f(c) > 0$  by vyplývalo  $c > a$ ; podobne ako v predchádzajúcom bode by z lemy .10(b) bolo možné odvodiť existenciu čísla  $\delta > 0$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in (c - \delta, c])(f(x) > 0),$$

z ktorej by vyplývalo, že interval  $(c - \delta, c]$  neobsahuje prvky množiny  $A$ . To je ale v spore s rovnosťou  $c = \sup A$ ; podľa druhej vlastnosti suprema totiž platí

$$(\forall \delta > 0)((c - \delta, c] \cap A \neq \emptyset).$$

<sup>49</sup>Inklúzia “ $\supset$ ” vyplýva z inklúzií  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B_k$ ,  $C_i \subset B_i \subset B_k$ ,  $i \geq k + 1$ . Naopak; ak  $x \in B_k$ , tak  $x$  buď leží v  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$  (a v takom prípade už netreba viacej dokazovať) alebo tam neleží. Ak  $x \in B_k$  neleží v  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , tak  $x \notin B_N$  pre niektoré  $N \in \mathbf{N}$ . Z inklúzie  $B_n \subset B_N$  pre  $n \geq N$  potom vyplýva  $(\forall n \geq N)(x \in B_n)$ , preto existuje  $m := \max \mathcal{I}$ , kde  $\mathcal{I} := \{n \in \mathbf{N}; x \in B_n\}$  (keďže  $k \in \mathcal{I}$ , je  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ ), zrejme  $m \geq k$ ; potom platí  $x \in B_m \setminus B_{m+1} = C_{m+1}$ .

<sup>50</sup>podmienka  $f(a)f(b) < 0$  je len elegantná skratka zápisu  $(f(a) < 0 \wedge f(b) > 0) \vee (f(a) > 0 \wedge f(b) < 0)$



**Poznámky. 1.** Alternatívny dôkaz uvedeného tvrdenia dostaneme, ak namiesto množiny  $A$  budeme uvažovať množinu  $B := \{x \in [a, b]; f(x) > 0\}$ , ktorá je neprázdna a zdola ohraničená. Za povšimnutie stojí, že číslo  $c$  s vlastnosťou  $f(c) = 0$  získané týmto postupom nemusí byť totožné s číslom  $c$ , ktoré sme našli v našom pôvodnom dôkaze (vhodný príklad si čitateľ dokáže iste zostrojiť sám).

**2.** Je treba si uvedomiť, že existencia čísla  $c$  vyplývala z vety o supréme. Keby sme namiesto množiny  $\mathbf{R}$  pracovali v našich úvahách s množinou  $\mathbf{Q}$  (pre ktorú – ako vieme – uvedená veta neplatí), nemuselo by už tvrdenie zodpovedajúce vete .66 byť pravdivé. Príslušná analógia pre  $\mathbf{Q}$  by mala podobu: *Nech  $I$  je interval v množine  $\mathbf{Q}$  (tj.  $I \subset \mathbf{Q}$  je neprázdna množina s vlastnosťou*

$$(\forall \alpha, \beta \in I)(\forall x \in \mathbf{Q})(\alpha < x < \beta \Rightarrow x \in I),$$

nech  $f : I \rightarrow \mathbf{Q}$  je spojitá funkcia, pričom pre niektoré  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , platí  $f(a)f(b) < 0$ . Potom  $f(c) = 0$  pre niektoré  $c \in I$ ,  $a < c < b$ . Nepravdivosť tohto tvrdenia dokazuje jednoduchý príklad  $I = \mathbf{Q}$ ,  $f(x) = x^2 - 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

**3.** Dôsledkom vety .66 je nasledujúce tvrdenie:

*Ak spojitá funkcia  $f$  definovaná na intervale  $I$  nemá v žiadnom bode  $x \in I$  hodnotu 0, tak  $f$  nadobúda na  $I$  buď len kladné alebo len záporné hodnoty.*

Špeciálne platí

*Ak  $a, b$ ,  $a < b$ , sú dva susedné nulové body spojitej funkcie  $f$  definovanej na intervale  $I$ , tak  $f$  na  $(a, b)$  nadobúda buď len kladné alebo len záporné hodnoty.*

**4.** Eleganťným doplnkom vety .66 zaručujúcej existenciu koreňa rovnice  $f(x) = 0$  je *metóda polenia intervalu*, umožňujúca nájsť koreň rovnice  $f(x) = 0$  s ľubovoľnou presnosťou:

Nech  $f$  je spojitá funkcia definovaná na intervale  $I$ , nech  $a_1, b_1 \in I$ ,  $a_1 < b_1$ ,  $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ . Označme  $I_1 := [a_1, b_1]$ , nech  $c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$ . Ak  $f(c_1) = 0$ , našli sme koreň rovnice  $f(x) = 0$ ; ak  $f(c_1) \neq 0$ , vyberme ten z intervalov  $I_{11} := [a_1, c_1]$ ,  $I_{12} := [c_1, b_1]$ , v koncových bodoch ktorého má funkcia  $f$  opačné znamienka (tj.  $I_{11}$  v prípade  $f(c_1) > 0$ ,  $I_{12}$  v prípade  $f(c_1) < 0$ ) označme ho  $I_2$  a jeho koncové body  $a_2 < b_2$ . Nech  $c_2 := \frac{a_2 + b_2}{2}$ . Ak  $f(c_2) = 0$ , je  $c_2$  koreň rovnice  $f(x) = 0$ ; ak  $f(c_2) \neq 0$ , vyberme ten z intervalov  $I_{21} := [a_2, c_2]$ ,  $I_{22} := [c_2, b_2]$ , v koncových bodoch ktorého ... atď.

Ak náš postup neskončí po konečnom počte krokov (čo je možné len tak, že pre niektoré  $n \in \mathbf{N}$  platí  $f(c_n) = 0$ ), dostaneme postupnosť  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  vložených intervalov, ktorých prienikom je jednoprvková množina  $\{c\}$ . Potom z nerovností  $a_n < 0 < b_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$  – keďže  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  – a zo spojitosti funkcie  $f$  v bode  $c$  vyplýva

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0,$$

teda  $c$  je koreň rovnice  $f(x) = 0$ , nerovnosti  $a_n \leq c \leq b_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , pritom umožňujú odhad čísla  $c$  zhora aj zdola. ♠

Dôležitým dôsledkom vety .66 je tvrdenie .68.

**.67 Definícia.** Hovoríme, že funkcia  $f$  definovaná na intervale  $I$  je *darbouxovská* (alebo že *má Darbouxovu vlastnosť*), ak  $f$  zobrazí každý interval  $J \subset I$  na degenerovaný alebo nedegenerovaný interval (tj. pre každý interval  $J \subset I$  je množina  $f(J)$  buď jednoprvková alebo je to nedegenerovaný interval).

**Príklad.** Dirichletova a Riemannova funkcia zrejme nie sú darbouxovské. ♠

Dôkaz nasledujúcej lemy (založený len na dôslednom používaní definície množina  $I \subset \mathbf{R}$  je *degenerovaný alebo nedegenerovaný*) interval práve vtedy, keď pre každé  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha < \beta < \gamma$ , platí: ak  $\alpha, \gamma \in I$ , tak aj  $\beta \in I$ ) prenechávame na čitateľa.

**Lema.** *Nech  $f$  je funkcia definovaná na intervale  $I$ . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(a)  $f$  je darbouxovská;

(b) pre každé  $a, b \in I$  také, že  $a < b$  a  $f(a) \neq f(b)$ , platí: ak  $y$  je prvok otvoreného intervalu  $J$  s koncovými bodmi  $f(a), f(b)$  (tj.  $J = (f(a), f(b))$  v prípade  $f(a) < f(b)$ ,  $J = (f(b), f(a))$  pre  $f(b) < f(a)$ ), tak pre niektoré  $c \in (a, b)$  je  $f(c) = y$ .

**Poznámka.** Štandardné slovné vyjadrenie vlastnosti (b) z predchádzajúcej lemy znie: *funkcia  $f$  nadobúda na intervale  $[a, b]$  všetky hodnoty medzi  $f(a)$  a  $f(b)$ .*

**.68 Veta.** *Spojité funkcia definovaná na intervale je darbouxovská.*

**Dôkaz.** Nech interval  $I$  je definičný obor spojitej funkcie  $f$ . Dokážeme, že  $f$  má vlastnosť (b) z lemy v paragrafe .67, tj. že na každom intervale  $[a, b] \subset I$  nadobúda  $f$  všetky hodnoty medzi  $f(a)$  a  $f(b)$ .

Nech teda  $a, b \in I$ ,  $a < b$ ,  $f(a) \neq f(b)$ , nech  $y$  je prvok otvoreného intervalu s koncovými bodmi  $f(a), f(b)$ . Definujme funkciu  $f_y : I \rightarrow \mathbf{R}$  predpisom  $f_y(x) = f(x) - y$ ; potom  $f_y$  je spojitá a  $f_y(a)f_y(b) < 0$ , preto podľa vety .66 pre niektoré  $c \in (a, b)$  platí  $f_y(c) = 0$ , tj.  $f(c) = y$ . Tým je naše tvrdenie dokázané.

**Poznámka.** Tvrdenie predchádzajúcej vety nemožno vo všeobecnosti “obrátiť”, tj. výrok *ak funkcia  $f$  definovaná na intervale je darbouxovská, tak je aj spojitá* je nepravdivý. Klasickým príkladom je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases},$$

ktorá nie je spojitá v bode 0, ale je darbouxovská (pri overovaní tejto skutočnosti stačí kontrolovať obrazy intervalov  $J \subset \mathbf{R}$  obsahujúcich bod 0; ak totiž  $0 \notin J$ , je funkcia  $f|_J$  spojitá (funkcia  $\sin \frac{1}{x}$  je elementárna funkcia s definičným oborom  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ), podľa predchádzajúcej vety je potom množina  $(f|_J)(J) = f(J)$  interval).

Ako ukazuje veta .70, postačujúcou podmienkou zaručujúcou platnosť takto “obráteného” tvrdenia vety .68 je monotónnosť funkcie  $f$ .

**Dôsledok.** *Spojitá funkcia  $f$  definovaná na intervale  $I$  je prostá práve vtedy, keď je rýdzomonotónna.*

**Dôkaz.** Implikácia “ $\Leftarrow$ ” (ktorá platí aj bez predpokladu spojitosti) by mala byť zrejma.

“ $\Rightarrow$ ” Dokážeme, že  $f$  je rýdzomonotónna na každom intervale  $[a, b] \subset I$ . Odtiaľ už bude vyplývať, že  $f$  je rýdzomonotónna, na základe tejto úvahy <sup>51</sup>:

Keby  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  bola prostá, bola rýdzomonotónna na každom intervale  $[a, b] \subset I$  a nebola rýdzomonotónna, existovali by čísla  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in I$ , pre ktoré by platilo

$$a_1 < b_1 \wedge f(a_1) > f(b_1), \quad a_2 < b_2 \wedge f(a_2) < f(b_2) \quad (77)$$

(existencia dvojice  $(a_1, b_1)$  vyplýva z predpokladu, že  $f$  nie je rastúca na  $I$  a z injektívnosti  $f$ ; existencia dvojice  $(a_2, b_2)$  z predpokladu, že  $f$  nie je klesajúca na  $I$  a z injektívnosti  $f$ ). Nech  $a := \min\{a_1, a_2\}$ ,  $b := \max\{b_1, b_2\}$ , potom  $a < b$  a  $f$  je podľa predpokladu rýdzomonotónna na  $[a, b]$ . To je ale – keďže  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [a, b]$  – v spore s (77).  $\Delta$

Zostáva dokázať, že  $f$  je rýdzomonotónna na každom intervale  $[a, b] \subset I$ . Nech teda  $a, b \in I$ ,  $a < b$ . Pretože  $f$  je prostá, je buď  $f(a) < f(b)$  alebo  $f(a) > f(b)$ .

Predpokladajme najprv  $f(a) < f(b)$ . Ukážeme, že  $f$  ja na  $[a, b]$  rastúca. Zvoľme  $c_1 \in (a, b)$ ; keďže  $f$  je prostá, je  $f(c) \neq f(a), f(c) \neq f(b)$ . Ukážeme, že musí platiť

$$f(a) < f(c_1) < f(b). \quad (78)$$

Z nerovnosti  $f(c_1) < f(a)$  by totiž vyplývala inklúzia  $(f(c_1), f(a)) \subset (f(c_1), f(b))$ , a funkcia  $f$  – ktorá je darbouxovská – by musela všetky hodnoty medzi  $f(c_1)$  a  $f(a)$  nadobúdať aj na intervale  $[a, c_1]$  aj na intervale  $[c_1, b]$ , čo je v spore s jej injektívnosťou. Rovnako možno ukázať, že nemôže platiť nerovnosť  $f(c_1) > f(b)$ .

Zvoľme teraz  $c_2 \in (a, b)$ ,  $c_2 > c_1$ . Zopakovaním predchádzajúcich úvah ( v ktorých trojicu  $a, c_1, b$  nahradíme trojicou  $c_1, c_2, b$ ) dostaneme nerovnosť

$$f(c_1) < f(c_2) < f(b).$$

Tým je dokázaná pravdivosť výroku

$$(\forall c_1, c_2 \in [a, b])(c_1 < c_2 \Rightarrow f(c_1) < f(c_2)), \quad (79)$$

čo znamená, že  $f$  je na  $[a, b]$  rastúca <sup>52</sup>.

Analogicky možno dokázať, že v prípade  $f(a) > f(b)$  je  $f$  na  $[a, b]$  klesajúca.  $\spadesuit$

:-) Pri čítaní dôkazu predchádzajúceho dôsledku zistíme, že sme vlastne nevyužívali spojitosť funkcie  $f$ , ale len jej Darbouxovu vlastnosť. Nahradením predpokladu  *$f$  je spojitá* predpokladom  *$f$  je darbouxovská* však –

<sup>51</sup>nejaké ďalšie uvažovanie je potrebné samozrejme len v prípade, že interval  $I$  nie je uzavretý a ohraničený; nechceli sme však dôkaz predlžovať rozlišovaním jednotlivých možností

<sup>52</sup>Čitateľ mohol práve získať pocit, že sme ho oklamali; doteraz sme totiž uvažovali  $c_1, c_2 \in (a, b)$ , a v (79) naraz píšeme  $c_1, c_2 \in [a, b]$ . Upozorňujeme, že pravdivosť (79) v prípadoch  $c_1 = a$ , resp.  $c_2 = b$ , vyplýva z (78).

napriek nášmu očakávaniu – nezískame všeobecnejšie tvrdenie; pre rýdzomonotónne funkcie je totiž (ako ukazuje veta .70) Darbouxova vlastnosť ekvivalentná so spojitosťou. (-:

**.69 Cvičenie.** Nech  $f$  je rastúca spojitá funkcia definovaná na intervale  $I$ . Potom pre každé  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , platí  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ ,  $f((a, b)) = (f(a), f(b))$ . Ak  $I = (\alpha, \beta)$ , kde  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$ , tak  $f(I) = (\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta} f(x))$ .

**.70 Veta.** Nech  $f$  je monotónna funkcia definovaná na intervale  $I$ . Potom  $f$  je spojitá práve vtedy, keď obor hodnôt  $f$  je buď interval alebo jednoprvková množina (tj. keď  $f(I)$  je degenerovaný alebo nedegenerovaný interval).

**Dôkaz.** Implikácia “ $\Rightarrow$ ” vyplýva z vety .68.

“ $\Leftarrow$ ” Ak  $f(I)$  je jednoprvková množina, je funkcia  $f$  konštantná, a teda spojitá.

Tvrdenie ak  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je monotónna a  $f(I)$  je interval, tak  $f$  je spojitá dokážeme nepriamo, tj. dokážeme tvrdenie ak  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je monotónna nespojitá funkcia, tak  $f(I)$  nie je interval. Naše úvahy obmedzíme na prípad  $f$  neklesajúca (v prípade  $f$  nerastúca potom stačí uvažovať funkciu  $-f$ ).

Ak  $f$  nie je spojitá, je niektoré číslo  $a \in I$  jej bod nespojitosti. Ak  $a$  je vnútorný bod intervalu  $I$ , tak platí

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) < f(a) \quad \text{alebo} \quad f(a) < \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

(-) Podľa vety .31 je totiž  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ; keďže z rovností  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  by vyplývala spojitosť funkcie  $f$  v bode  $a$ , musí byť buď  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq f(a)$  alebo  $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ . (-:

V prípade  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) < f(a)$  môžeme zvoliť  $\varepsilon > 0$  tak, že  $a - \varepsilon \in I$ , potom  $f(a - \varepsilon) \leq \lim_{x \rightarrow a-} f(x) < f(a)$  a z faktu, že  $f$  je rastúca, vyplýva  $f(x) \geq f(a)$  pre  $x \in I$ ,  $x > a$ ,  $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  pre  $x \in I$ ,  $x < a$ . Množina  $f(I)$  teda obsahuje prvky  $f(a - \varepsilon), f(a)$ , ale neobsahuje žiadne číslo z intervalu  $(\lim_{x \rightarrow a-} f(x), f(a))$ , teda  $f(I)$  nie je interval.

Podobne v prípade  $f(a) < \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $a + \varepsilon \in I$  a množina  $f(I)$  potom obsahuje čísla  $f(a), f(a + \varepsilon)$  (pritom  $f(a) < \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \leq f(a + \varepsilon)$ ), ale neobsahuje žiadne prvky intervalu  $(f(a), \lim_{x \rightarrow a+} f(x))$ , a teda  $f(I)$  nie je interval.

Práve uvedené úvahy možno použiť aj v prípade, že bod nespojitosti  $a \in I$  je krajný bod intervalu  $I$ . Ak  $a$  je totiž ľavý koncový bod intervalu  $I$ , tak (pozri poznámku 1 v paragrafe .58)  $f(a) < \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ; ak  $a$  je pravý koncový bod intervalu  $I$ , je  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) < f(a)$ .

**Dôsledok.** Inverzná funkcia  $f^{-1}$  k prostej spojitej funkcii  $f$  definovanej na intervale  $I$  je spojitá.

**Dôkaz.** Ak  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je prostá a spojitá, tak je rýdzomonotónna (dôsledok z paragrafu .68) a jej obor hodnôt – tj. definičný obor funkcie  $f^{-1}$  – je interval (veta .70; keďže  $f$  nie je konštantná, nemôže byť množina  $f(I)$  jednoprvková).  $f^{-1}$  je teda rýdzomonotónna funkcia (pretože je inverzná k rýdzomonotónnej funkcii) definovaná na intervale  $f(I)$  a jej obor hodnôt je interval  $I$ . Podľa vety .70 je potom  $f^{-1}$  spojitá.

**Poznámka. 1.** Predchádzajúce tvrdenie možno zovšeobecniť do tejto podoby:

Inverzná funkcia  $f^{-1}$  k rýdzomonotónnej funkcii  $f$  definovanej na intervale  $I$  je spojitá.

Dôkaz naznačíme pre prípad  $f$  rastúca<sup>53</sup>. Nech  $a \in D(f^{-1})$ , nech  $f^{-1}(a) = b$ . Predpokladajme, že  $b$  je vnútorný bod intervalu  $I$  (adaptáciu našich úvah na prípad krajných bodov prenechávame na čitateľa), potom pre niektoré  $\varepsilon_1 > 0$  platí  $[b - \varepsilon_1, b + \varepsilon_1] \subset I$ . Zvoľme  $\varepsilon > 0$ , nech  $\varepsilon_2 := \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$ . Keďže  $f$  je rastúca, je  $f(b - \varepsilon_2) < f(b) < f(b + \varepsilon_2)$ , preto existuje  $\delta > 0$  tak, že

$$f(b - \varepsilon_2) \leq f(b) - \delta < f(b) < f(b) + \delta \leq f(b + \varepsilon_2). \quad (80)$$

Ukážeme, že pre  $y \in O(\delta, a)$  platí  $f^{-1}(y) \in O(\varepsilon, f^{-1}(a))$ : nerovnosť  $a - \delta < y < a + \delta$  možno zapísať v tvare

$$f(b) - \delta < y < f(b) + \delta,$$

z (80) potom vyplýva

$$f(b - \varepsilon_2) < y < f(b + \varepsilon_2),$$

<sup>53</sup>čitateľovi odporúčame nakresliť si obrázok

odtiaľ – pretože  $f^{-1}$  je rastúca – dostávame

$$b - \varepsilon_2 < f^{-1}(y) < b + \varepsilon_2,$$

z čoho – ak využijeme, že  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon$  a  $f^{-1}(a) = b$  – už vyplýva

$$f^{-1}(a) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(a) + \varepsilon.$$

**2.** Informáciu obsiahnutú v dôsledku možno ešte doplniť:

LEMMA. *Nech  $f^{-1}$  je inverzná funkcia k spojitej rýdzomonotónnej funkcii  $f$  definovanej na intervale  $I$ , nech  $a \in \mathbf{R}^*$ . Potom platí*

- (a) ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , tak  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = a$ ;
- (b) ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , tak  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = a$ ;
- (c) ak  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = \infty$ ;
- (d) ak  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ , tak  $\lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = -\infty$ .

DÔKAZ. (a) Uvažujme prípad  $f$  rastúca; ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , platí buď  $a = \infty$  alebo je  $a$  pravý koncový bod intervalu  $I$ , pričom  $a \notin I$ . Zvoľme  $b \in I$ , nech  $f(b) = \beta$ . Pretože  $f$  je rastúca a spojitá, platí  $f([b, a)) = [f(b), \infty) = [\beta, \infty)$ . Pre inverznú funkciu  $f^{-1}$  potom platí

$$f^{-1}([\beta, \infty)) = [b, a). \quad (81)$$

Ak  $a \in \mathbf{R}$ , vyplýva z (81) rovnosť  $a = \sup_{x \in [\beta, \infty)} f^{-1}(x)$ . Keďže  $f^{-1}$  je rastúca funkcia, platí  $a = \sup_{x \in [\beta, \infty)} f^{-1}(x) = \sup_{x \in D(f^{-1})} f^{-1}(x)$ , z vety .29 potom vyplýva rovnosť  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = a$ .

Ak  $a = \infty$ , má (81) podobu  $f^{-1}([\beta, \infty)) = [b, \infty)$ ; to znamená, že  $f^{-1}$  je rastúca zhora neohraničená funkcia, preto (opäť podľa vety .29) je  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = \infty$ .

Postup v prípade  $f$  klesajúca ako aj dôkaz zvyšných tvrdení je analogický.

## 8.1 Definícia mocninových, exponenciálnych a logaritmických funkcií

**.71 Definícia mocninových funkcií s racionálnym exponentom.** *Mocninovú funkciu s exponentom  $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$  definujeme*

- pre  $\alpha \in \mathbf{N}$  indukciou: funkciu  $f_1$  definujeme na množine  $\mathbf{R}$  predpisom  $f_1(x) = x$  a pre  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , položíme  $f_n := f_1 \cdot f_{n-1}$

Z vety .55(a) vyplýva, že  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá; pritom (pozri ??) pre  $n$  nepárne je  $f_n$  rastúca,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ ; pre  $n$  párne je  $f_n$  klesajúca na  $(-\infty, 0]$ , rastúca na  $[0, \infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ .

- pre  $\alpha = -n$ , kde  $n \in \mathbf{N}$ , predpisom  $f_{-n}(x) = \frac{1}{f_n(x)}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

Funkcia  $f_{-n} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá (veta .55(a)), 0 je jej neodstrániteľný bod nespojitosti;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-n}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_{-n}(x) = 0$ ; pre  $n$  nepárne je  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_{-n}(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_{-n}(x) = \infty$ ; pre  $n$  párne je  $\lim_{x \rightarrow 0} f_{-n}(x) = \infty$ .

- pre  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n$  nepárne,  $n \geq 3$ , ako inverznú funkciu k rastúcej spojitej funkcii  $f_n$ .

Funkcia  $f_{\frac{1}{n}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je potom spojitá (dôsledok z paragrafu .70) a rastúca,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\frac{1}{n}}(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{\frac{1}{n}}(x) = \infty$  (poznámka 2 z paragrafu .70).

- pre  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n$  párne, ako inverznú funkciu k rastúcej spojitej funkcii  $f_n|_{[0, \infty)}$ .

Takto definovaná funkcia  $f_{\frac{1}{n}} : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá a rastúca,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{\frac{1}{n}}(x) = \infty$ .

- pre ostatné  $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$  predpisom  $f_\alpha := f_{\frac{1}{q}} \circ f_p$ , kde  $p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ ,  $q \in \mathbf{N}$  sú nesúdeliteľné čísla také, že  $\alpha = \frac{p}{q}$ .

Funkcia  $f_\alpha$  je spojitá (veta .55(b)), jej definičný obor, charakter prípadných bodov nespojitosti a limity v nevlastných bodoch sú jednoznačne určené funkciami  $f_{\frac{1}{q}}$  a  $f_p$ , rozbor jednotlivých prípadov (ako aj podrobné zdôvodnenie všetkých v tomto paragrafe vyslovených tvrdení o mocninových funkciách) prenechávame čitateľovi.

Funkčnú hodnotu funkcie  $f_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) v bode  $x$  označujeme znakom  $x^n$ , funkčnú hodnotu funkcie  $f_{\frac{1}{n}}$  znakom  $x^{\frac{1}{n}}$  alebo  $\sqrt[n]{x}$  (špeciálne pre  $n = 2$  znakom  $\sqrt{x}$ ). O funkcii  $f_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ ) budeme často hovoriť ako o *funkcii*  $x^\alpha$ .

**Poznámky. 1.** Mocninové funkcie s racionálnym exponentom sme mohli definovať už v kapitole o funkciách, vtedy by sme však pri definovaní funkcií  $f_{\frac{1}{n}}$  narazili na problém: keby sme napríklad – potom, čo sme odmocninu z čísla  $x \geq 0$  definovali ako číslo  $y \geq 0$  s vlastnosťou  $y^2 = x$  – chceli funkciu  $f_{\frac{1}{2}}$  definovať ako zobrazenie priradujúce každému nezápornému číslu  $x$  jeho druhú odmocninu  $\sqrt{x}$ , museli by sme dokázať, že pre každé  $x \geq 0$  číslo  $\sqrt{x}$  existuje a je jednoznačne určené. Dôkaz jednoznačnosti nepredstavuje nijakú komplikáciu, stačí využiť trichotómu usporiadania a “pravidlá pre násobenie nerovností”. Existenciu čísla  $\sqrt{x}$  (ktorá v našej definícii z paragrafu .71 vyplýva z vety .70 a rovnosti  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ ) možno dokázať na základe vety o supréme; číslo  $y := \sup\{z \in \mathbf{Q}; z^2 < x\}$  má totiž požadovanú vlastnosť.

Keďže spojitosť takto definovanej funkcie  $\sqrt{x}$  by vyžadovala ďalšie samostatné zdôvodnenie, je asi zrejmé, prečo sme uprednostnili vyčkávanie na vetu .70 a jej dôsledok, ktoré nám umožnili funkciu  $\sqrt{x}$  bez problémov definovať ako spojité zobrazenie  $[0, \infty)$  na  $[0, \infty)$ .

2. Treba si uvedomiť, že z rovnosti  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ , kde  $p_1, p_2 \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ ,  $q_1, q_2 \in \mathbf{N}$ , ešte nemusí vyplývať rovnosť  $f_{\frac{p_1}{q_1}} = f_{\frac{p_2}{q_2}}$ , kde  $f_{\frac{p_1}{q_1}} := f_{\frac{1}{q_1}} \circ f_{p_1}$ ,  $f_{\frac{p_2}{q_2}} := f_{\frac{1}{q_2}} \circ f_{p_2}$ , a z tohto hľadiska sa znovu zamyslieť nad definíciou mocnínovej funkcie s exponentom  $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$  (nie je však ťažké dokázať, že pre  $x > 0$  platí  $f_{\frac{p_1}{q_1}}(x) = f_{\frac{p_2}{q_2}}(x)$ ).

Odporúčame tiež čitateľovi preveriť si (štandardne používané) rovnosti  $(f_{\frac{1}{q}} \circ f_p)(x) = (f_p \circ f_{\frac{1}{q}})(x)$ , kde čísla  $p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ ,  $q \in \mathbf{N}$  sú nesúdeliteľné.

**.72 Definícia funkcie  $e^x$ .** Postup konštrukcie funkcie  $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , ktorej funkčnú hodnotu v bode  $x$  budeme označovať  $e^x$  (a o ktorej budeme spravidla hovoriť ako o *funkcii*  $e^x$ ) rozdelíme do týchto krokov:

1. “prirodzeným spôsobom” definujeme hodnoty  $e^x$  pre  $x \in \mathbf{Q}$ ; dokážeme, že takto definované zobrazenie  $\mathbf{Q}$  do  $\mathbf{R}$  je rastúce a platí  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ,  $(e^x)^y = e^{xy}$  <sup>54</sup>;
2. dodefinojeme hodnoty  $e^x$  pre  $x$  iracionálne predpisom  $e^x := \sup\{e^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < x\}$  a ukážeme, že takto definovaná funkcia  $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je rastúca;
3. ukážeme, že  $\exp$  je spojitá.

1. Pre  $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$  položíme  $\exp(x) := f_x(e)$ , kde  $f_x$  je mocninová funkcia s exponentom  $x$ , tj.  $\exp(x) = e^x$ ; v prípade  $x = 0$  definujeme  $\exp(0) := 1$ .

Dôkaz rovnosti  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$  a  $e^{xy} = (e^x)^y$  prenecháme na čitateľa.

Pretože pre  $x \in \mathbf{Q}$ ,  $x > 0$ , je funkcia  $f_x$  rastúca na  $[0, \infty)$ , vyplýva z nerovnosti  $e > 1$  (pozri príklad .33) nerovnosť  $e^x > 1^x = 1$ . Pre  $r, s \in \mathbf{Q}$ ,  $r > s$ , je preto  $\frac{e^r}{e^s} = e^{r-s} > 1$ , odtiaľ – keďže  $e^s > 0$  pre každé  $s \in \mathbf{Q}$  – vyplýva nerovnosť  $e^r > e^s$ , čo znamená, že funkcia  $\exp$  je na  $\mathbf{Q}$  rastúca.

2. Nech  $x < y$ .

a) Ak  $x, y \in \mathbf{Q}$ , je  $e^x < e^y$ , pretože funkcia  $\exp$  je rastúca na  $\mathbf{Q}$ .

b) Ak  $x \in \mathbf{Q}$ ,  $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , vyplýva z definície čísla  $e^y$  nerovnosť  $e^x \leq e^y$ . Keby platilo  $e^x = e^y$ , bolo by číslo  $e^x$  horným ohraničením množiny  $\{e^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < y\}$ , a teda pre všetky prvky  $u$  neprázdnej množiny  $(x, y) \cap \mathbf{Q}$  by platilo  $e^x \geq e^u$ , čo je ale v spore s faktom, že  $\exp|_{\mathbf{Q}}$  je rastúca funkcia. Tým je dokázaná nerovnosť  $e^x < e^y$ .

c) Ak  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ,  $y \in \mathbf{Q}$ , je – pretože  $\exp|_{\mathbf{Q}}$  je rastúca funkcia – číslo  $e^y$  horné ohraničenie množiny  $A := \{e^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < x\}$ , z definície čísla  $e^x$  potom vyplýva nerovnosť  $e^x \leq e^y$ . Keďže ale iste existuje číslo  $u \in \mathbf{Q}$  tak, že  $x < u < y$ , pričom  $e^u$  je z rovnakého dôvodu ako  $e^y$  horné ohraničenie množiny  $A$  a platí  $e^u < e^y$  (pretože  $\exp|_{\mathbf{Q}}$  je rastúca), nie je  $e^y$  najmenšie horné ohraničenie množiny  $A$ , preto  $e^x \neq e^y$ . Tým je nerovnosť  $e^x < e^y$  dokázaná.

d) Ak  $x, y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , existuje číslo  $u \in \mathbf{Q}$  tak, že  $x < u < y$ . Podľa b) a c) potom platí  $e^x < e^u < e^y$ , čo dokazuje nerovnosť  $e^x < e^y$  aj v tomto prípade.

3. Z vety .29(a) a dôsledkov .30(a) a .31 vyplýva, že spojitosť funkcie  $\exp$  v bode  $x$  bude dokázaná, ak overíme rovnosť  $\lim_{u \rightarrow x^-} e^u = \lim_{z \rightarrow x^+} e^z$ , tj.  $\alpha := \sup\{e^u; u < x\} = \inf\{e^z; z > x\} =: \beta$ , pritom už vieme (dôsledok .31), že platí  $\alpha \leq \beta$ .

Pre každé  $n \in \mathbf{N}$  existujú čísla  $u, z \in \mathbf{Q}$  tak, že  $u < x < z$  a  $u - z \leq \frac{1}{n}$  <sup>55</sup>. Potom

$$e^u < \alpha \leq \beta < e^z, \quad (82)$$

súčasne

$$e^z - e^u = e^u (e^{z-u} - 1) \leq e^x \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \quad (83)$$

<sup>54</sup>pripomeňme, že číslo  $(e^x)^y$  je funkčná hodnota mocnínovej funkcie s exponentom  $y$  v bode  $e^x$

<sup>55</sup>stačí položiť  $u := \max(A \cap (-\infty, x))$ ,  $z := \min(A \cap (x, \infty))$ , kde  $a := \left\{ \frac{k}{2n}; k \in \mathbf{Z} \right\}$ ; potom buď  $z - u = \frac{1}{2n}$  (ak  $x \notin A$ ) alebo  $z - u = \frac{1}{n}$  (ak  $x \in A$ )

(posledná nerovnosť vyplýva z nerovností  $e^u < e^x$  a  $e^0 = 1 < e^{z-u} \leq e^{\frac{1}{n}}$ , ktoré sú dôsledkom nerovností  $u < x$ ,  $0 < z - u \leq \frac{1}{n}$  a faktu, že  $\exp$  je rastúca funkcia). Z (82) vyplýva

$$0 \leq \beta - \alpha < e^z - e^u,$$

z (82) potom dostávame

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \left( 0 \leq \beta - \alpha < e^x \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right). \quad (84)$$

Keďže  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$  (príklad .26), je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ e^x \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right] = e^x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 0$ , z (84) na základe vety .25 (pre  $\mathcal{P} = \mathbf{R}$ ,  $M = \mathbf{N}$ ,  $f(n) \equiv 0$ ,  $g(n) \equiv \beta - \alpha$ ,  $h(n) = e^x \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ ) potom vyplýva rovnosť  $\beta - \alpha = 0$ . Tým je spojitost funkcie  $\exp$  v bode  $x$  dokázaná.  $\triangle$

Dokážeme ešte rovnosť

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad \text{pre } x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{Q} \quad (85)$$

( $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  ešte nemôžeme uvažovať z toho jednoduchého dôvodu, že zatiaľ sme nedefinovali umocňovanie na iracionálny exponent, a teda symbol  $(e^x)^y$  pre  $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  pre nás v tomto okamihu nemá zmysel). Iste existuje postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{Q}$  s limitou  $x$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y) = xy$  a

$$(e^x)^y = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{x_n})^y = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n y} = e^{xy},$$

pričom prvá rovnosť vyplýva zo spojitosti funkcie  $f_y \circ \exp$  (kde  $f_y$  je mocninová funkcia s exponentom  $y$ ), druhá z platnosti rovnosti  $(e^x)^y = e^{xy}$  pre  $x, y \in \mathbf{Q}$  a tretia zo spojitosti funkcie  $\exp$ .  $\triangle$

Keďže funkcia  $\exp$  je rastúca, existujú  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ . Z príkladu .32 (pre  $q = e$ ) a lemy .11(a) vyplýva rovnosť  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ ; použitím substitúcie  $t = -x$  potom

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

**.73 Definícia funkcie  $\ln$ .** Inverzná funkcia k spojitaj rastúcej funkcii  $\exp$  sa nazýva *prírodný logaritmus* a označuje sa  $\ln$ .  $\triangle$

Funkcia  $\ln$  je teda rastúca, jej definičný obor je interval  $(0, \infty)$ , oborom hodnôt je  $\mathbf{R}$ ; ďalej  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  (lema z poznámky 2 v paragrafe .70);  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$ ,  $\ln x < 0$  pre  $x \in (0, 1)$ ,  $\ln x > 0$  pre  $x \in (1, \infty)$ .

**.74 Definícia funkcie  $a^x$  pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .** *Exponenciálnu funkciu so základom  $a$*  ( $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ),  $\exp_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , ktorej funkčnú hodnotu v bode  $x$  budeme označovať  $a^x$  (a o ktorej budeme spravidla hovoriť ako o *funkcii  $a^x$* ) možno skonštruovať obdobne ako funkciu  $\exp$  v paragrafe .72 (v prípade  $a \in (0, 1)$  bude ovšem funkcia  $\exp_a|_{\mathbf{Q}}$  získaná v prvom kroku konštrukcie klesajúca a v druhom kroku položíme  $a^x := \inf\{a^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < x\}$ ); my však uprednostníme inú možnosť jej zavedenia a položíme

$$a^x := e^{x \ln a} \quad \triangle \quad (86)$$

Pre  $a \in (1, \infty)$  je funkcia  $a^x$  spojitá a rastúca ako kompozícia spojitých rastúcich funkcií  $e^x$  a  $x \ln a$  (tu využívame, že  $\ln a > 0$  pre  $a > 1$ ); pre  $a \in (0, 1)$  je funkcia  $a^x$  spojitá a klesajúca.  $\triangle$

Ukážme ešte, že rovnosťou (86) definovaná funkcia  $a^x$  je totožná s funkciou, ktorú by sme získali konštrukciou kopírujúcou postup z paragrafu .72:

- pre  $x \in \mathbf{Q}$  je  $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$  podľa (85);
- pre  $a \in (1, \infty)$  je funkcia  $a^x$  (definovaná v 86) spojitá a rastúca, preto pre  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  platí

$$a^x = \lim_{z \rightarrow x-} a^z = \sup\{a^z; z \in (-\infty, x)\} = \sup\{a^z; z \in (-\infty, x) \cap \mathbf{Q}\}$$

(odporúčame čitateľovi, aby si podrobne rozmyslel najmä dôkaz poslednej rovnosti, ktorá vypýva zo spojitosti funkcie  $a^x$ ); podobne v prípade  $a \in (0, 1)$  možno pre  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  dokázať rovnosť

$$a^x = \inf\{a^z; z \in (-\infty, x) \cap \mathbf{Q}\}.$$

**.75 Definícia funkcie  $\log_a$ .** Inverzná funkcia k rýdzomonotónnej spojitaj funkcii  $a^x$  ( $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ) sa nazýva *logaritmus pri základe  $a$*  a označuje sa  $\log_a$  (špeciálne v prípade  $a = 10$  sa používa názov *dekadický logaritmus* a označenie  $\log$ ).  $\triangle$

Pretože pre prosté funkcie  $f, g$  platí  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ , vyplýva z rovnosti  $\exp_a = f \circ g$ , kde  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = x \ln a$ , rovnosť

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (87)$$

**.76 Definícia mocnínovej funkcie s iracionálnym exponentom.** Mocninovú funkciu  $f_\alpha$  s exponentom  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  definujeme

- pre  $\alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}$  na množine  $[0, \infty)$  predpisom

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} e^{\alpha \ln x} & \text{pre } x > 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases} \quad (88)$$

(tj. ako funkciu  $e^{\alpha \ln x}$  spojito dodefinovanú v bode 0; pozri poznámku v paragrafe .60); táto funkcia je spojitá, rastúca a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = \infty$ ;

- pre  $\alpha \in \mathbf{R}^- \setminus \mathbf{Q}$  na množine  $(0, \infty)$  predpisom

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}; \quad (89)$$

táto funkcia je spojitá a klesajúca,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = 0$ .  $\triangle$

Elementárnym dôsledkom definície mocnínovej funkcie s iracionálnym exponentom je rovnosť  $(e^x)^y = e^{xy}$  pre  $x \in \mathbf{R}$ ,  $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , ktorá dopĺňa informáciu z (85); platí totiž

$$(e^x)^y = e^{y \ln e^x} = e^{yx}. \quad \triangle$$

Ukážeme ešte, že naša definícia mocniny s iracionálnym exponentom je v súlade s prirodzenou myšlienkou definovať symbol  $x^\alpha$  rovnosťou

$$x^\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha_n},$$

kde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  je postupnosť kladných racionálnych čísel s limitou  $\alpha$ . Ak totiž  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  má limitu  $\alpha$ , tak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\ln x})^{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha_n \ln x} = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$$

(druhá rovnosť vyplýva z (85), tretia zo spojitosti funkcie  $e^x$  v bode  $\alpha \ln x$ , štvrtá je definíciou symbolu  $x^\alpha$ ).

## 9 Vlastnosti spojitých funkcií na kompaktných množinách

**.77 Veta.** Spojitá funkcia  $f$  definovaná na kompaktnej množine  $K$ ,  $\emptyset \neq K \subset \mathbf{R}$  (teda špeciálne na uzavretom ohraničenom intervale) je ohraničená.

**Dôkaz.** Každý bod  $x \in K$  má okolie  $O(x)$  také, že  $f$  je ohraničená na  $O(x) \cap K$  (ak  $x$  je izolovaný bod množiny  $K$ , stačí zvoliť  $O(x)$  s vlastnosťou  $O(x) \cap K = \{x\}$ , v prípade, že  $x \in K$  je hromadný bod množiny  $K$ , vyplýva existencia okolia  $O(x)$  z rovnosti  $f(x) = \lim_{u \rightarrow x} f(u)$  a lemy .10(a)). Systém  $\{O(x); x \in K\}$  týchto okolí je otvorené pokrytie kompaktnej množiny  $K$ , preto existuje (definícia .49) jeho konečné podpokrytie  $\{O(x_1), \dots, O(x_n)\}$ ; pre množinu  $K$  teda platí  $K \subset \bigcup_{i=1}^n O(x_i)$ , preto

$$K = \bigcup_{i=1}^n (O(x_i) \cap K). \quad (90)$$

Keďže funkcia ohraničená na konečnom počte množín je ohraničená aj na ich zjednotení<sup>56</sup>, vyplýva z (90) a z ohraničenosti funkcie  $f$  na každej z množín  $O(x_1) \cap K, \dots, O(x_n) \cap K$  jej ohraničenosť na množine  $K$ .

**Poznámka.** Pre záujemcov uvádzame ešte dva ďalšie dôkazy uvedeného tvrdenia:

1. Sporom; nech spojitá funkcia  $f: K \rightarrow \mathbf{R}$  nie je ohraničená. Ak  $f$  nie je ohraničená zhora, platí

$$(\forall n \in \mathbf{N}) (\exists x \in K) (f(x) \geq n), \quad (91)$$

<sup>56</sup>Treba si všimnúť, že v tejto úvahe je podstatné, že  $K$  je zjednotením konečného počtu množín, na ktorých je  $f$  ohraničená (to je tiež dôvod, prečo požadujeme kompaktnosť množiny  $K$ ; tá totiž zaručuje existenciu konečných podpokrytí). Ak totiž  $\mathcal{P} := \{A_i; i \in I\}$  je nekonečný systém množín a funkcia  $f$  je ohraničená na každej z množín tohto systému, nemusí ešte platiť, že  $f$  je ohraničená aj na  $\bigcup_{i \in I} A_i$ ; stačí uvažovať napr.  $f(x) = x$ ,  $A_i = (-i, i)$ ,  $i \in \mathbf{N}$  (funkcia  $f$  je totiž neohraničená na  $\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ ); alebo položiť  $A_i := \left[-\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right)$ ,  $i \in \mathbf{N}$ , a za  $f$  zvoliť funkciu  $\frac{1}{x}$ , ktorá je neohraničená na množine  $(0, 1) = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ .

preto existuje postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$  taká, že  $f(x_n) \geq n$ ,<sup>57</sup> z tejto nerovnosti dostávame  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$  (veta .19). Keďže  $K$  je kompaktná, z  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  možno vybrať konvergentnú podpostupnosť  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  s limitou  $a \in K$  (poznámka v paragrafe .50); keďže  $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty$  je podpostupnosť postupnosti  $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ , musí platiť aj  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$ . To je ale v spore so spojitosťou funkcie  $f$  v bode  $a$ ; podľa vety .54 totiž z rovnosti  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$  vyplýva rovnosť  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ .

Podobne možno postupovať, ak  $f$  nie je ohraničená zdola.

**2.** V prípade, že množina  $K$  je uzavretý ohraničený interval<sup>58</sup>  $[a, b]$ , možno vychádzať z nasledujúcich dvoch úvah, použitých aj v našom prvom dôkaze vety .77:

1. ak  $x \in [a, b]$ , je funkcia  $f$  ohraničená v niektorom okolí bodu  $x$ ; to znamená, že existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $f$  je ohraničená na intervale  $[a, a + \varepsilon]$  v prípade  $x = a$ , na intervale  $(b - \varepsilon, b]$  v prípade  $x = b$ , resp. na intervale  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , ak  $x$  je vnútorný bod intervalu  $[a, b]$  (číslo  $\varepsilon > 0$  zrejme možno zvoliť tak, aby uvedené intervaly boli podmnožinou množiny  $[a, b]$ );

2. ak  $f$  je ohraničená na množine  $R$  aj na množine  $S$ , tak je ohraničená aj na  $R \cup S$ .

Teraz už môžeme začať vlastný dôkaz. Množina  $B := \{x \in (a, b] ; f \text{ je ohraničená na } [a, x]\}$  je neprázdna (podľa našej prvej úvahy platí pre niektoré  $\varepsilon > 0$  inklúzia  $a + \varepsilon \in B$ ) a zhora ohraničená ( $B \subset [a, b]$ ), preto existuje  $\beta := \sup B$ ; zrejme  $\beta \in (a, b]$ . Dokážeme rovnosť  $\beta = b$ . Sporom; nech  $\beta < b$ , z našej prvej úvahy vyplýva, že  $f$  je ohraničená na  $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$  pre niektoré  $\varepsilon > 0$ . Keďže  $\beta = \sup B$ , v intervale  $(b - \varepsilon, \beta]$  leží niektorý prvok  $x$  množiny  $B$ , teda  $f$  je ohraničená na  $[a, x)$ . Potom je ale  $f$  ohraničená aj na  $[a, x) \cup (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) = [a, \beta + \varepsilon)$ , čo znamená, že  $\beta + \varepsilon \in B$ ; to je ale spor s rovnosťou  $\beta = \sup B$ . Tým je rovnosť  $\beta = b$  dokázaná.

Rovnako, ako sme v práve skončenej úvahe z rovnosti  $\beta = \sup B$  odvodili ohraničenosť funkcie  $f$  na intervale  $[a, \beta + \varepsilon)$ , môžeme teraz z rovnosti  $b = \sup B$  a faktu, že pre niektoré  $\varepsilon > 0$  je  $f$  ohraničená na  $[b - \varepsilon, b]$ , odvodiť, že funkcia  $f$  je ohraničená na intervale  $[a, b]$ .

**.78 Veta.** *Spojité funkcia  $f$  definovaná na kompaktnej množine  $K$  má maximum a minimum.*

**Dôkaz.** Podľa vety .77 existujú čísla  $M := \sup_{x \in K} f(x)$ ,  $m := \inf_{x \in K} f(x)$ . Ďalej budeme postupovať sporom. Ak neexistuje  $\max_{x \in K} f(x)$ , znamená to, že pre každé  $x \in K$  je  $f(x) < M$ , teda  $M - f(x) > 0$ . Potom funkcia  $g : K \rightarrow \mathbf{R}$  definovaná predpisom  $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  je spojitá (veta .55(a)) na kompakte  $K$ , a podľa vety .77 aj ohraničená; existuje teda  $L > 0$  tak, že

$$(\forall x \in K) \left( 0 < \frac{1}{M - f(x)} < L \right).$$

Úpravou predchádzajúcej nerovnosti dostaneme

$$(\forall x \in K) \left( f(x) < M - \frac{1}{L} \right),$$

<sup>57</sup>Existenciu postupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  uvedených vlastností možno zaručiť aj bez použitia axiómy výberu. Z (91) vyplýva, že pre každé  $n \in \mathbf{N}$  je množina  $A_n := \{x \in K; f(x) \geq n\}$  neprázdna. Keďže  $A_n$  je zhora ohraničená (to vyplýva z inklúzie  $A_n \subset K$  a vety .50), existuje  $\alpha := \sup A_n$ , zopakovaním postupu dôkazu lemy .51 možno dokázať inklúziu  $\alpha \in K$ . Dokážeme, že  $\alpha \in A_n$ . Sporom, nech  $\alpha \notin A_n$ , tj. nech  $f(\alpha) < n$ . Potom existuje okolie  $O(\varepsilon, \alpha)$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in O(\varepsilon, \alpha) \cap K) (f(x) < n) \tag{92}$$

(ak  $\alpha$  je izolovaný bod množiny  $K$ , stačí za  $O(\varepsilon, \alpha)$  zvoliť okolie  $\mathcal{O}$  bodu  $\alpha$  také, že  $\mathcal{O} \cap K = \{\alpha\}$ ; v prípade, že  $\alpha$  je hromadný bod množiny  $K$ , vyplýva existencia okolia  $O(\varepsilon, \alpha)$  z nerovnosti  $\lim_{x \rightarrow \alpha} (n - f(x)) > 0$  a lemy .10(b)). Keďže  $\alpha = \sup A_n$ , v intervale  $(\alpha - \varepsilon, \alpha]$  leží aspoň jeden prvok množiny  $A_n$ . To je ovšem spor s (92), pretože pre každé  $x \in A_n$  platí  $f(x) \geq n$ .

Teraz by malo byť zrejme, že postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , kde  $x_n := \sup A_n$ , má vlastnosť  $f(x_n) \geq n$ .  $\Delta$

V prípade, že  $K$  je uzavretý ohraničený interval  $[a, b]$ , možno postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  požadovaných vlastností skonštruovať aj iným spôsobom (nasledujúca konštrukcia je po istých úpravách použiteľná aj vo všeobecnom prípade  $K$  je kompaktná množina), ktorý sa zakladá na tejto úvahe: pre každé  $n \in \mathbf{N}$  je množina  $B_n := \{x \in [a, b]; f(x) > n - 1\}$  neprázdna a obsahuje aspoň jedno racionálne číslo (neprázdnosť množiny  $B_n$  vyplýva z (91); ak  $\beta \in B_n$ , tak z nerovnosti  $\lim_{x \rightarrow \beta} (f(x) - (n - 1)) > 0$  vyplýva na základe lemy .10(b) existencia okolia  $O(\varepsilon, \beta)$  s vlastnosťou  $(\forall x \in O(\varepsilon, \beta) \cap [a, b]) (f(x) > n - 1)$ ; keďže v každom nedegenerovanom intervale leží aspoň jedno racionálne číslo, musí aj množina  $O(\varepsilon, \beta) \cap [a, b]$  – a teda aj jej nadmnožina  $B_n$  – obsahovať aj racionálne čísla).

Množinu  $\mathbf{Q}$  možno zoradiť do (nie nutne prostej) postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ; ak teraz položíme  $x_n := a_k$ , kde  $k := \min\{m \in \mathbf{N}; a_m \in B_n\}$ , tak týmto spôsobom definovaná postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  má požadovanú vlastnosť  $f(x_n) \geq n$ .  $\Delta$

Ak chceme takýmto spôsobom postupovať aj vo všeobecnom prípade  $K$  je kompaktná, možno použiť túto úvahe: ak  $a \in \mathbf{R}$  a  $K$  je kompaktná, tak v  $K$  existuje aspoň jeden a najviac dva prvky  $w$ , ktoré majú spomedzi prvkov množiny  $K$  najmenšiu vzdialenosť od bodu  $a$ , tj. množina  $V_a := \{w \in K; |w - a| = \min\{|x - a|; x \in K\}\}$  je neprázdna a konečná; každému prvku  $a_n \in \mathbf{Q}$  našej postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  možno teda jednoznačne priradiť číslo  $b_n$  predpisom  $b_n := \min V_{a_n}$ . V predchádzajúcich úvahách stačí potom namiesto  $x_n := a_n$  položiť  $x_n := b_n$ .

<sup>58</sup>nasledujúci dôkaz ovšem možno (po malých úpravách) použiť aj vo všeobecnom prípade  $K$  je kompaktná množina



čo znamená, že číslo  $M - \frac{1}{L}$  je horné ohraničenie funkcie  $f$ ; to je ale – pretože  $M - \frac{1}{L} < M$  – v spore s rovnosťou  $M = \sup_{x \in K} f(x)$ .  $\triangle$

V prípade dôkazu existencie čísla  $\min_{x \in K} f(x)$  možno postupovať analogicky alebo práve dokázané tvrdenie aplikovať na spojité funkciu  $-f$  a využiť rovnosť  $\min f = -\max(-f)$ .

**Poznámka.** Ani teraz nezostane čitateľ ušetrený alternatívnych dôkazov.

1. Nech  $M := \sup f$ . Potom

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\exists x \in K) \left( M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M \right),$$

existuje teda postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$  taká, že  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ ; <sup>59</sup> z týchto nerovností podľa vety .25 vyplýva, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$ . Keďže  $K$  je kompaktná, možno z  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  vybrať konvergentnú podpostupnosť  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  s limitou  $a \in K$ . Postupnosť  $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$  je podpostupnosť postupnosti  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ , preto (lema .38)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M. \quad (93)$$

Z rovnosti  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$  súčasne – keďže  $f$  je spojitá v bode  $a$  – vyplýva  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a)$  (veta .54); z (93) a vety .9 o jednoznačnosti limity potom vyplýva rovnosť  $f(a) = M$ , čím je existencia maxima funkcie  $f$  dokázaná.

2. Vety .77 a.78 možno odvodiť z nasledujúceho tvrdenia (prvú pomocou vety .50, druhú použitím lemy .51):

LEMA. *Ak  $f$  je spojitá funkcia definovaná na kompakte  $K$ , tak  $f(K)$  je kompaktná množina* <sup>60</sup>.

DÔKAZ. Využijeme ekvivalenciu z poznámky v paragrafe .50; dokážeme teda, že z každej postupnosti  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(K)$  možno vybrať konvergentnú postupnosť, ktorej limita tiež leží v  $f(K)$ .

Nech  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(K)$ , potom – pretože pre každé  $y \in f(K)$  možno nájsť aspoň jedno číslo  $x \in K$  s vlastnosťou  $f(x) = y$  – existuje postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$  tak, že  $f(x_n) = y_n$ . Pretože  $K$  je kompaktná, možno z  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  vybrať konvergentnú podpostupnosť  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  s limitou  $x \in K$  (poznámka z paragrafu .50). Zo spojitosti funkcie  $f$  v bode  $x$  potom vyplýva (veta .54), že  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ , teda  $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$  je konvergentná podpostupnosť postupnosti  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  a jej limita  $f(x)$  je zrejme prvkom množiny  $f(K)$ .  $\spadesuit$

V niektorých úvahách v budúcnosti budeme potrebovať, aby funkcie, s ktorými pracujeme, mali vlastnosť, ktorá je "trocha lepšia" ako spojitosť – aby boli *rovnomerne spojité*. Naším najbližším cieľom je dokázať, že spojité funkcie definované na kompaktnej množine už túto lepšiu vlastnosť majú.

**.79 Definícia.** Hovoríme, že funkcia  $f$  je *rovnomerne spojitá*, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D(f))(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon). \quad (94)$$

Hovoríme, že funkcia  $f$  je *rovnomerne spojitá na množine  $M$*  ( $\emptyset \neq M \subset D(f)$ ), ak je rovnomerne spojitá funkcia  $f|_M$ .

**Poznámky.** 1. Predovšetkým si treba uvedomiť, že z práve definovanej vlastnosti skutočne vyplýva spojitosť; jednoduchý dôkaz tvrdenia *ak funkcia  $f$  je rovnomerne spojitá, tak je aj spojitá* prenechávame na čitateľa.

2. Ukážeme, že obrátená implikácia vo všeobecnosti neplatí, tj. že existuje spojitá funkcia, ktorá nie je rovnomerne spojitá.

Klasickým príkladom je funkcia  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Keby táto funkcia bola rovnomerne spojitá, existovalo by podľa (94) k číslu  $\varepsilon = 1$  <sup>61</sup> číslo  $\delta > 0$  s vlastnosťou

$$(\forall x, y \in D(f))(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1). \quad (95)$$

Zvoľme špeciálne  $y = \delta$ . Potom pre všetky  $x \in (0, 2\delta)$  je  $|x - y| < \delta$ , a preto podľa (95) musí platiť

$$(\forall x \in (0, 2\delta))(|f(x) - f(\delta)| < 1), \quad \text{tj.} \quad (\forall x \in (0, 2\delta))(f(\delta) - 1 < f(x) < f(\delta) + 1),$$

čo znamená, že  $f$  je ohraničená na intervale  $(0, 2\delta)$ ; to je ale v spore s rovnosťou  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ .

Iným štandardným príkladom je funkcia  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ . Pretože pre  $a_n = \frac{2}{4n-1}$  je  $f(a_n) = -1$  a pre  $b_n = \frac{2}{4n+1}$  je  $f(b_n) = 1$ , platí

$$|f(a_n) - f(b_n)| = 2, \quad (96)$$

<sup>59</sup>podobne ako v dôkaze z poznámky 1 v paragrafe .77 aj v tomto prípade sa možno pri zdôvodňovaní existencie postupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  zaobísť bez axiómy výberu

<sup>60</sup>štandardné slovné vyjadrenie: *spojitý obraz kompaktu je kompaktný*

<sup>61</sup>ako čitateľ vzápätí zistí, v nasledujúcej úvahe nie je podstatné, že sme zvolili práve  $\varepsilon = 1$ , rovnako dobre by nám poslúžilo každé iné  $\varepsilon > 0$

súčasne – pretože  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$  – máme

$$(\forall \delta > 0) (\exists n \in \mathbf{N}) (|a_n - b_n| < \delta) . \quad (97)$$

Z (96) a (97) vyplýva pravdivosť tvrdenia

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\exists x, y \in \mathbf{R}) (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

(stačí položiť napr.  $\varepsilon = 1$ <sup>62</sup>), ktoré je negáciou výroku *funkcia f je rovnomerne spojitá*.

**3.** Hľadáme teraz, v čom je rovnomerná spojitosť lepšia od "obyčajnej" spojitosti.

Nech  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia, označme znakom  $V(x, y, \varepsilon, \delta)$  výrokovú formu

$$(\forall y \in M) (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \quad (98)$$

a porovnajme výroky

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall x \in M) (\exists \delta > 0) (V(x, y, \varepsilon, \delta)) \quad (99)$$

a

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in M) (V(x, y, \varepsilon, \delta)) , \quad (100)$$

z ktorých prvý hovorí, že funkcia  $f$  je spojitá, a druhý, že  $f$  je rovnomerne spojitá. Rozdiel medzi nimi (vyplývajúci zo zmeny poradia kvantifikátorov) možno popísať nasledovne:

Zvoľme  $\varepsilon > 0$  pevne. Potom  $\delta > 0$ , ktorého existenciu zaručuje (99), závisí na čísle  $x$ , teda s meniacim sa  $x$  sa číslo  $\delta > 0$ , pre ktoré je (99) pravdivé, môže meniť. Ak však platí (100), vieme nájsť  $\delta > 0$ , ktoré už *nezávisí na voľbe čísla  $x$* , teda také, ktoré vyhovuje všetkým prvkom  $x$  množiny  $M$ .

**4.** Všimnime si napokon, že obidve funkcie, ktoré sme uviedli v poznámke 2 ako "negatívne príklady", mali neodstrániteľný bod nespojitosti (príčom práve tento bod bol príčinou ich "negatívnosti"). Ako ukazuje nasledujúce tvrdenie, nie je to náhoda.

LEMA. *Každý bod nespojitosti rovnomerne spojitej funkcie je odstrániteľný.*

(-) Dôkaz možno založiť na myšlienkach použitých v poznámke 2<sup>63</sup>, my však uprednostníme nasledujúci dôkaz založený na Cauchyho-Bolzanovom kritériu. (-)

DÔKAZ. Nech  $f$  je rovnomerne spojitá funkcia, nech  $a \notin D(f)$  je hromadný bod množiny  $D(f)$ . Zvoľme  $\varepsilon > 0$ , potom podľa (94) existuje  $\delta > 0$  s vlastnosťou

$$(\forall x, y \in D(f)) (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) . \quad (101)$$

Nech  $P(a) := O(\frac{\delta}{2}, a) \setminus \{a\}$ , potom pre  $x, y \in D(f)$  ležiace v  $P(a)$  platí  $|x - y| < \delta$ ; z (101) teda vyplýva

$$(\forall x, y \in P(a) \cap D(f)) (|f(x) - f(y)| < \varepsilon) ;$$

to znamená, že  $P(a)$  má vlastnosť požadovnú v (63). Keďže táto úvaha platí pre každé  $\varepsilon > 0$ , vyplýva z Cauchyho-Bolzanovho kritéria z poznámky v paragrafe .43 existencia konečnej  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .  $\Delta$

Z práve dokázaného tvrdenia a z poznámok v paragrafe .60 vyplýva, že ku každej rovnomerne spojitej funkcii  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  existuje spojitá funkcia  $g$  definovaná na uzavretej množine  $M_1$  taká, že  $M \subset M_1$  a  $g|_M = f$ .

**.80 Veta.** *Spojité funkcia definovaná na kompakte je rovnomerne spojitá.*

**Dôkaz.** Sporom; nech  $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ , kde  $K \subset \mathbf{R}$  je kompaktná množina, je spojitá funkcia, ktorá nie je rovnomerne spojitá. Platí teda

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\exists x, y \in K) (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

(toto tvrdenie sme získali negáciou výroku (94)), odtiaľ vyplýva, že (ak špeciálne zvolíme  $\delta = \frac{1}{n}$ ) pre každé  $n \in \mathbf{N}$  je množina  $A_n := \{(x, y) \in K \times K; |x - y| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$  neprázdna. Ak z

<sup>62</sup>alebo zvoliť ľubovoľné iné  $\varepsilon \in (0, 2)$

<sup>63</sup>Stačí dokázať, že v prípade, že  $a \notin D(f)$  je hromadný bod množiny  $D(f)$ , vedie každý z predpokladov " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ", " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ", " $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  neexistuje" ku sporu. V prvých dvoch prípadoch stačí vhodne upraviť naše úvahy o funkcii  $\frac{1}{x}$  v bode 0; v treťom prípade použiť úvahu o funkcii  $\sin \frac{\pi}{x}$ , v ktorých postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  nahradíme postupnosťami  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ktorých existenciu zaručuje cvičenie 2 z paragrafu .40 a namiesto (96) použijeme tvrdenie

$$(\exists \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > N) (|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon) ,$$

ktoré vyplýva z nerovnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| > 0$  (cvičenie z paragrafu .40 a lema .13(e)) a lemy .10(b).

každej z množí  $A_n$  vyberieme jednu dvojicu a označíme ju  $(x_n, y_n)$ , dostaneme postupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$  také, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0 \quad (102)$$

(to vyplýva z nerovností  $-\frac{1}{n} \leq y_n - x_n \leq \frac{1}{n}$  a vety .25). Pretože  $K$  je kompaktný, možno z  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  vybrať konvergentnú podpostupnosť  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  s limitou  $a$ , pričom  $a \in K$  (implikácia (b) $\Rightarrow$ (a) z lemy .48). Podpostupnosť  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  zodpovedá vybraná postupnosť  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  z postupnosti  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ukážeme, že aj ona konverguje k  $a$ ; z rovností  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_{n_k} - x_{n_k}) = 0$  (druhá z nich vyplýva z (102) a lemy .38) totiž dostávame

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} (y_{n_k} - x_{n_k}) = a .$$

Z inklúzie  $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in A_{n_k}$  súčasne vyplýva

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall k \in \mathbf{N}) (|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon) , \quad (103)$$

čo znamená, že výrok  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$  je nepravdivý (z (103) totiž vyplýva jeho negácia). To je ale spor s predpokladom spojitosti funkcie  $f$ ; podľa vety .54 totiž z rovnosti  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$  vyplýva rovnosť  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$ , a teda aj rovnosť  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$ .

**Poznámky.** Ako sa dalo čakať, opäť uvedieme zopár ďalších dôkazov, v prvom z nich budeme tentokrát namiesto s podpostupnosťami pracovať s otvorenými pokrytiami.

1. Nech  $f$  je spojitá funkcia definovaná na kompakte  $K$ . Zvoľme  $\varepsilon > 0$  a hľadáme  $\delta > 0$  vyhovujúce podmienkam z (94). Pretože  $f$  je spojitá v každom bode množiny  $K$ , existuje pre každé  $a \in K$  okolie  $O(\delta_a, a)$  s vlastnosťou

$$(\forall z \in O(\delta_a, a) \cap K) (|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}) . \quad (104)$$

-: Nech  $\mathcal{O} := \{O(\delta_a, a); a \in K\}$  je systém všetkých takýchto okolí. Naším cieľom je nájsť  $\delta > 0$  tak, aby pre  $x, y \in K$  z nerovnosti  $|x - y| < \delta$  už vyplývalo, že v systéme  $\mathcal{O}$  vieme nájsť okolie  $O(\delta_a, a)$ , ktoré obsahuje súčasne  $x$  aj  $y$ ; z inklúzií  $x \in O(\delta_a, a) \cap K$ ,  $y \in O(\delta_a, a) \cap K$  totiž na základe (104) dostaneme

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(y) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (- :$$

Nahradíme teraz každé okolie  $O(\delta_a, a)$  okolím  $O(\frac{\delta_a}{2}, a)$  s polovičným polomerom <sup>64</sup>, takto vytvorený systém  $\{O(\frac{\delta_a}{2}, a); a \in K\}$  okolí je otvorené pokrytie kompaktu  $K$ , preto existuje jeho konečné podpokrytie

$$\mathcal{P} := \left\{ O\left(\frac{\delta_{a_1}}{2}, a_1\right), \dots, O\left(\frac{\delta_{a_n}}{2}, a_n\right) \right\} .$$

Ukážeme, že číslo

$$\delta := \min \left\{ \frac{\delta_{a_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{a_n}}{2} \right\}$$

vyhovuje našim požiadavkám:

Keďže  $\mathcal{P} := \left\{ \frac{\delta_{a_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{a_n}}{2} \right\}$  je konečná množina kladných čísel, je  $\delta > 0$  <sup>65</sup>. Nech teraz  $x, y \in K$ ,  $|x - y| < \delta$ .

Pretože  $\mathcal{P}$  je pokrytie množiny  $K$ , platí  $y \in O\left(\frac{\delta_{a_i}}{2}, a_i\right)$  pre niektoré  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tj.

$$|y - a_i| < \frac{\delta_{a_i}}{2} .$$

Pretože  $|x - y| < \delta$  a  $\delta \leq \frac{\delta_{a_i}}{2}$ , dostávame

$$|x - a_i| \leq |x - y| + |y - a_i| < \delta + \frac{\delta_{a_i}}{2} \leq \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i} ,$$

tj.

$$x \in O(\delta_{a_i}, a_i) ,$$

<sup>64</sup>zmysel tohto kroku sa ozrejmi čitateľovi o malú chvíľočku

<sup>65</sup>treba si uvedomiť, že - podobne ako v dôkaze vety .77 - využívame existenciu *konečného* podpokrytia  $\mathcal{P}$ , z ktorej vyplýva, že  $\delta$  je minimum (a teda aj infimum) *konečnej* množiny  $\mathcal{P}$ ; infimum *nekonečnej* množiny  $\mathcal{P}$  kladných čísel môže byť totiž aj číslo 0 (stačí zvoliť napr.  $\mathcal{P} := \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbf{N} \right\}$ )

teda  $x$  aj  $y$  ležia v  $O(\delta_{a_i}, a_i)$  <sup>66</sup>. Z (104) (pre  $a = a_i, z = x$ , resp.  $a = a_i, z = y$ ) potom vyplýva  $|f(x) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|f(y) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , a odtiaľ

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a_i)| + |f(y) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (105)$$

naše  $\delta$  teda skutočne vyhovuje požiadavkám z (104), čím je dôkaz skončený.

**2.** Predpokladajme, že  $K$  je uzavretý ohraničený interval  $[\alpha, \beta]$ . Ak je  $\varepsilon > 0$  dané, možno na dôkaz tvrdenia

$$(\exists \delta > 0) (\forall x, y \in [\alpha, \beta]) (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

použiť postup z poznámky 2 v paragrafe .77, v ktorom teraz úlohu množiny  $B$  bude hrať množina

$$\left\{ z \in (\alpha, \beta); (\exists \delta > 0) (V([\alpha, z], \delta)) \right\},$$

pričom  $V(I, \delta)$  (kde  $I \subset [\alpha, \beta]$  je interval a  $\delta > 0$ ) je výroková forma

$$(\forall x, y \in I) (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$$

a úvahy 1 a 2 budú mať podobu

1. pre každé  $a \in [\alpha, \beta]$  existuje  $\delta_a > 0$  tak, že  $V(O(\delta_a, a) \cap [\alpha, \beta], \delta_a)$  je pravdivý výrok ( $\delta_a$  stačí zvoliť rovnako ako v (104));

2. nech  $I, J \subset [\alpha, \beta]$  sú intervaly a  $\delta_1, \delta_2 > 0$  sú čísla také, že  $V(I, \delta_1)$  a  $V(J, \delta_2)$  sú pravdivé výroky; ak prienik  $I \cap J$  je nedegenerovaný interval dĺžky  $\delta_3$  a  $\delta_4 := \frac{1}{2} \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , tak platí  $V(I \cup J, \delta_4)$  (z nerovnosti  $|x - y| < \delta_4$  totiž vyplýva, že body  $x, y$  ležia buď obidva v  $I$  alebo obidva v  $J$ ).

## Part III

# Diferenciálny počet funkcií jednej reálnej premennej

## 10 Definícia vlastnej a nevlastnej derivácie v bode. Vety o derivácii súčtu, súčinu, zloženej a inverznej funkcie

**.81 Definícia.** Nech  $a \in \mathbf{R}$  je hromadný bod <sup>67</sup> definičného oboru  $D(f)$  funkcie  $f$ , pričom  $a \in D(f)$ . Ak existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (106)$$

označujeme ju  $f'(a)$  <sup>68</sup> a hovoríme, že *funkcia  $f$  má v bode  $a$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu*. Ak je uvedená limita konečná, nazýva sa číslo  $f'(a)$  *derivácia funkcie  $f$  v bode  $a$*  (hovoríme tiež, že funkcia  $f$  je *diferencovateľná v bode  $a$* ); ak je táto limita nevlastná, hovoríme o *nevlastnej derivácii funkcie  $f$  v bode  $a$* .

Ak v (106) nahradíme limitu pre  $x \rightarrow a$  jednostrannou limitou pre  $x \rightarrow a+$  (resp.  $x \rightarrow a-$ ), používame namiesto označenia  $f'(a)$  označenie  $f'_+(a)$  (resp.  $f'_-(a)$ ) a všetky pojmy definované v predchádzajúcom odstavci doplníme o slovo *sprava* (resp. *zľava*).

<sup>66</sup>keďže práve skončená časť dôkazu bola založená na fakte, že z inklúzie  $y \in O\left(\frac{\delta_{a_i}}{2}, a_i\right)$  a nerovnosti  $|x - y| < \delta$  už vyplýva, že  $x$  aj  $y$  ležia v tom istom okolí  $O(\delta_{a_i}, a_i)$ , malo by už byť zrejmé, prečo sme naše konečné podpokrytie nevyberali hneď z pokrytia  $\{O(\delta_a, a); a \in K\}$ , ale až z pokrytia  $\left\{O\left(\frac{\delta_a}{2}, a\right); a \in K\right\}$

<sup>67</sup>často sa pojem vlastnej a nevlastnej derivácie v bode  $a$  definuje za predpokladu, že  $a$  je vnútorný bod množiny  $D(f)$  (alebo za trocha všeobecnejšieho predpokladu, že existuje interval  $J$  tak, že  $a \in J \subset D(f)$ ).

<sup>68</sup>niekedy aj  $\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$  alebo  $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=a}$

**Poznámka.** Z častí (a) a (b) lemy .11, resp. z lemy .28 vyplývajú nasledujúce tvrdenia:

LEMA.(a) *Nech funkcia  $g$  je zúžením funkcie  $f$  na množinu  $M$ . Ak  $a \in M$  je hromadný bod množiny  $M$  a existuje  $f'(a)$ , tak existuje aj  $g'(a)$  a platí  $g'(a) = f'(a)$ .*

(b) *Nech sa funkcie  $f, g$  zhodujú na niektorom okolí  $\mathcal{O}$  bodu  $a \in D(f)$  (tj.  $D(f) \cap \mathcal{O} = D(g) \cap \mathcal{O}$  a  $(\forall x \in D(f) \cap \mathcal{O})(f(x) = g(x))$ ). Potom platí: ak existuje  $f'(a)$ , tak existuje aj  $g'(a)$  a  $g'(a) = f'(a)$ .*

(c) *Nech funkcia  $f$  je definovaná na množine  $M$  a bod  $a \in M$  je hromadný bod množín  $M_+ := M \cap (a, \infty)$ ,  $M_- := M \cap (-\infty, a)$ . Potom  $f'(a)$  existuje práve vtedy, keď  $f'_+(a) = f'_-(a)$ ; <sup>69</sup> pritom — ak  $f'(a)$  existuje — je  $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$ .*

**Príklad. 1.** Ak označíme  $f_1(x) := \sin x$ ,  $f_2(x) := \ln(1+x)$ ,  $f_3(x) := e^x$ , môžeme teraz tvrdenia (b), (c) a (d) vety .12 zapísať nasledovne:

(b)  $f'_1(0) = 1$  <sup>70</sup>; (c)  $f'_2(0) = 1$ ; (d)  $f'_3(0) = 1$ .

2. Funkcia  $\operatorname{sgn}$  má v bode 0 nevlastnú deriváciu  $+\infty$  (stačí vypočítať  $(\operatorname{sgn})'_+(0)$ ,  $(\operatorname{sgn})'_-(0)$  a použiť tvrdenie (c) predchádzajúcej lemy) <sup>71</sup>.

3. Funkcia  $\sqrt[3]{x}$  má v bode 0 deriváciu  $+\infty$ . ♠

Tvrdenia z nasledujúceho odstavca viackrát použijeme v našich ďalších úvahách.

**.82 Definícia.** Hovoríme, že funkcia  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  je *rastúca v bode  $a \in M$* , resp. *klesajúca v bode  $a \in M$* , ak existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  také, že

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f)) \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \right),$$

resp.

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f)) \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \right).$$

Hovoríme, že funkcia  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  má v bode  $a \in M$  *lokálne maximum*, ak existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  také, že

$$(\forall x \in M \cap \mathcal{P})(f(x) \leq f(a)). \quad (107)$$

Definíciu *lokálneho minima*, resp. *ostrého lokálneho maxima*, resp. *ostrého lokálneho minima* dostaneme, ak v (107) nerovnosť  $\leq$  nahradíme postupne nerovnosťami  $\geq$ ,  $<$ ,  $>$ . O lokálnych maximách a minimách hovoríme súhrnne ako o *lokálnych extrémoch*, o ostrých lokálnych maximách a ostrých lokálnych minimách ako o *ostrých lokálnych extrémoch*.

**Lema.** (a) *Ak je funkcia  $f$  v bode  $a$  diferencovateľná, tak je tam aj spojitá.*

(b) *Nech funkcia  $f$  má v bode  $a$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Ak  $f'(a) > 0$  alebo  $f'(a) = \infty$  (tj. ak  $f'(a) \succ 0$ ), tak  $f$  je v bode  $a$  rastúca.*

*Ak  $f'(a) \prec 0$ , je funkcia  $f$  v bode  $a$  klesajúca.*

(c) *Nech funkcia  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  nadobúda lokálny extrém v bode  $a \in M$ . Potom platí:*

(c<sub>1</sub>) *ak  $f$  nadobúda v  $a$  lokálne maximum (lokálne minimum) a existuje  $f'_+(a)$  <sup>72</sup>, tak  $f'_+(a) \leq 0$  ( $f'_+(a) \geq 0$ );*

(c<sub>2</sub>) *ak  $f$  nadobúda v  $a$  lokálne maximum (lokálne minimum) a existuje  $f'_-(a)$ , tak  $f'_-(a) \geq 0$  ( $f'_-(a) \leq 0$ );*

(c<sub>3</sub>) *ak  $a$  je hromadný bod množín  $M_+$  aj  $M_-$  (špeciálne: ak  $M$  je interval a  $a$  je jeho vnútorný bod) a existuje  $f'(a)$ , tak  $f'(a) = 0$ .*

**Dôkaz.** (a) Pretože  $a \in D(f)$  je hromadný bod množiny  $D(f)$  (definícia .81), treba dokázať rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  (lema z paragrafu .53), tá vyplýva z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left( f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

<sup>69</sup>tj. (podrobne): keď existujú  $f'_+(a)$ ,  $f'_-(a)$  a platí rovnosť  $f'_+(a) = f'_-(a)$

<sup>70</sup>alebo  $\left. \frac{d(\sin x)}{dx} \right|_{x=0} = 1$

<sup>71</sup>Tento príklad možno zovšeobecniť: ak  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) < f(a)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) > f(a)$ ), tak  $f'_-(a) = \infty$  (resp.  $f'_+(a) = \infty$ )

<sup>72</sup>predpoklad existencie  $f'_+(a)$  v sebe „automaticky“ zahŕňa podmienku  $a \in M$  je hromadný bod množiny  $M \cap (a, \infty)$  (špeciálne, ak  $M = [c, d]$ , tak predpokladáme, že  $a \in [c, d)$ )

(b) Stačí použiť tvrdenia (b) a (c) lemy .10(b) (v ktorých úlohu funkcie  $f$ , resp. bodu  $b$  bude teraz mať funkcia  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ , resp. bod  $f'(a)$ ).

(c) Nech  $f$  nadobúda v bode  $a$  lokálne maximum (postup v prípade lokálneho minima je rovnaký); existuje teda prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap M)(f(x) \leq f(a)) . \quad (108)$$

Dokážme teraz  $(c_1)$ : pre  $x \in \mathcal{P} \cap M$ ,  $x > a$  (tj. pre  $x \in \mathcal{P} \cap M_+$ ) z (108) dostávame  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$  a — keďže podľa predpokladu existuje  $f'_+(a)$ , z poslednej nerovnosti a vety .24 vyplýva

$$f'_+(a) \leq 0 .$$

Dôkaz tvrdenia  $(c_2)$  je obdobný.

$(c_3)$  Keďže sú splnené predpoklady z  $(c_1)$  aj  $(c_2)$ , platí  $f'_+(a) \leq 0$  a  $f'_-(a) \geq 0$ . Podľa lemy v poznámke z paragrafu .81 musí platiť  $f'_+(a) = f'_-(a)$ ; to je možné len vtedy, keď  $f'_+(a) = f'_-(a) = 0$ , tj. keď  $f'(a) = 0$ .

**Poznámky – k tvrdeniu (a): 1.** Obrátená implikácia neplatí; existujú teda funkcie, ktoré sú v niektorom hromadnom bode svojho definičného oboru spojité, ale nie sú tam diferencovateľné. Klasickým príkladom je funkcia  $f(x) = |x|$ , ktorá je spojitá v bode 0, ale — keďže  $f'_+(0) = 1$ ,  $f'_-(0) = -1$  — nie je diferencovateľná v bode 0 (lema z poznámky v paragrafe .81). Iným príkladom je funkcia  $g(x) = \begin{cases} x & , \text{ ak } x \in \mathbf{Q} \\ 2x & , \text{ ak } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ , ktorá je spojitá v bode 0, ale nie je tam diferencovateľná a nemá tam vlastné ani nevlastné jednostranné derivácie (neexistencia  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$  vyplýva z lemy .11(c), v ktorej položíme  $f(x) := \frac{g(x)}{x}$ ,  $M_1 := \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ ,  $M_2 := \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , podobne sa dokáže neexistencia  $g'_+(0)$ ,  $g'_-(0)$ ).

**2.** Z existencie nevlastnej derivácie v bode  $a$  už spojitost' v tomto bode vyplývať nemusí<sup>73</sup>; napr. funkcia  $\text{sgn}$  má v bode 0 — ktorý je jej bodom nespojitosti — nevlastnú deriváciu  $+\infty$  (príklad 2 z paragrafu .81).

– **k tvrdeniu (c): 1.** Toto tvrdenie možno dokázať aj na základe bodu (b); dokážeme napr.  $(c_3)$ . Nepriamo: keby platilo  $f'(a) > 0$ , bola by funkcia  $f$  rastúca v bode  $a$ , odtiaľ by vyplývalo, že v každom prstencovom okolí bodu  $a$  sú body s funkčnými hodnotami väčšími než  $f(a)$  (tie by ležali v množine  $M_+$ ) aj body s funkčnými hodnotami menšími než  $f(a)$ ; to ale znamená, že v bode  $a$  nemôže mať  $f$  lokálny extrém; podobne by sa postupovalo v prípade  $f'(a) < 0$ .

**2.** Predpoklad  $a$  je hromadný bod množiny  $M_+$  aj množiny  $M_-$  (tj. špeciálne  $a$  je vnútorný bod intervalu  $M$ ) je v tvrdení  $(c_3)$  podstatný: funkcia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  s predpisom  $f(x) = x$  má v bode 0 lokálne minimum, ale  $f'(0) = 1$ .

**.83 Veta** (o derivácii skalárneho násobku, súčtu, súčinu a podielu). *Nech funkcie  $f, g : M \rightarrow \mathbf{R}$  sú diferencovateľné v bode  $a \in M$ , nech  $k \in \mathbf{R}$ . Potom*

- (a)  $(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$ ;
- (b)  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ;
- (c)  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ;
- (d) ak  $g(a) \neq 0$ , tak  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ .

**Dôkaz.** (c)

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{x - a} + \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= g(a)f'(a) + f(a)g'(a) ; \end{aligned}$$

<sup>73</sup>to zrejme súvisí s faktom, že limita  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \right)$ , na výpočet ktorej sme v dôkaze lemy .82(a) mohli použiť vetu o limite súčinu, je v prípade  $f'(a) = \infty$  (alebo  $f'(a) = -\infty$ ) neurčitým výrazom typu  $\infty \cdot 0$  (alebo  $-\infty \cdot 0$ ).

prítom rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$  vyplýva z lemy .82(a).

(d) Stačí dokázať rovnosť  $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$ , z nej a z tvrdenia (c) bude už vyplývať tvrdenie (d):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( -\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\ &= -\frac{1}{g^2(a)} g'(a), \end{aligned}$$

prítom rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \left(-\frac{1}{g(x)g(a)}\right) = -\frac{1}{g^2(a)}$  vyplýva opäť z lemy .82(a) (a samozrejme z tvrdení (c) a (d) vety .15).

**Poznámky. 1.** Tvrdenie (b) možno zrejme matematickou indukciou rozšíriť nasledovne: *ak funkcie  $h_1, \dots, h_n$  definované na množine  $M$  sú diferencovateľné v bode  $a$ , tak*

$$\left(\sum_{i=1}^n h_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^n h_i'(a).$$

**2.** Tvrdenia (a) a (b) možno doplniť ešte touto informáciou (ktorej dôkaz prenechávame na čitateľa):

(a') *ak  $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  a funkcia  $f$  má v bode  $a$  nevlastnú deriváciu, tak aj funkcia  $k \cdot f$  má v bode  $a$  nevlastnú deriváciu;*

(b') *ak funkcia  $g : M \rightarrow \mathbf{R}$  je v bode  $a \in M$  diferencovateľná a  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  tam má nevlastnú deriváciu  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), tak  $(f+g)'(a) = \infty$  (resp.  $(f+g)' = -\infty$ ).*

**.84 Veta** (o derivácii zloženej funkcie, *reťazcové pravidlo*). *Nech funkcia  $f$  je diferencovateľná v bode  $a$ , funkcia  $g$  v bode  $f(a)$ . Ak  $a \in D(g \circ f)$  je hromadný bod množiny  $D(g \circ f)$ ,<sup>74</sup> tak je v bode  $a$  diferencovateľná aj funkcia  $g \circ f$  a platí*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a)). \quad (109)$$

**Dôkaz.** Predpokladajme najprv, že  $f'(a) \neq 0$ . Potom je funkcia  $f$  buď rastúca alebo klesajúca v bode  $a$  (lema .82(b)); iste teda existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f))(f(x) \neq f(a)).$$

Keďže  $\mathcal{P} \cap D(g \circ f) \subset \mathcal{P} \cap D(f)$ , platí aj

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(g \circ f))(f(x) \neq f(a)) \quad (110)$$

a pre  $x \in \mathcal{P} \cap D(g \circ f)$  môžeme preto písať

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (111)$$

Z (111) a z rovností

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= f'(a), \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} &= \left| f(x) = y \right| = {}^{75} \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a)) \end{aligned}$$

potom (veta .15(c)<sup>76</sup>, lema .11(b)) vyplýva

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

<sup>74</sup>pozri poznámku pod čiarou k tvrdeniu vety .17

<sup>75</sup>táto rovnosť vyplýva z vety .17 o limite zloženej funkcie: použili sme substitúciu  $y = f(x)$ , z lemy .82(a) dostávame  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ; keďže vonkajšia zložka, ktorou je v tomto prípade funkcia  $\frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}$ , nie je definovaná v bode  $f(a)$ , je splnená podmienka (b) vety .17

<sup>76</sup>keďže definičné obory súčiniteľov na pravej strane rovnosti (111) (tj. množiny  $D(g \circ f) \cap \{x \in D(f); f(x) \neq f(a)\}$  a  $D(f) \setminus \{a\}$ ) nemusia byť totožné, využívame poznámku z paragrafu .15

čo sme chceli dokázať.  $\triangle$

Nech teraz  $f'(a) = 0$ , rovnosť (109), ktorú dokazujeme, má potom tvar

$$(g \circ f)'(a) = 0. \quad (112)$$

Označme  $D_1 := \{x \in D(g \circ f); f(x) \neq f(a)\}$ ,  $D_2 := \{x \in D(g \circ f); f(x) = f(a)\}$  a rozlíšme tri prípady <sup>77</sup>:

1. Ak  $a$  nie je hromadný bod množiny  $D_1$ , tak existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  tohto bodu neobsahujúce prvky z  $D_1$ . Keďže takéto  $\mathcal{P}$  spĺňa podmienku (110), môžeme teraz zopakovať postup, ktorý sme použili pre  $f'(a) \neq 0$ , čím je v tomto prípade dôkaz skončený.

2. Ak  $a$  nie je hromadný bod množiny  $D_2$ , tak pre niektoré jeho prstencové okolie  $\mathcal{R}$  platí

$$(\forall x \in \mathcal{R} \cap D(g \circ f))(f(x) = f(a)),$$

odtiaľ vyplýva

$$(\forall x \in \mathcal{R} \cap D(g \circ f), x \neq a) \left( \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = 0 \right),$$

preto

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = 0,$$

čo sme chceli dokázať (pozri (112)).

3. Ak  $a$  je hromadný bod množiny  $D_1$  aj množiny  $D_2$ , označme  $F : D(g \circ f) \setminus \{a\}$  funkciou s predpisom

$$F(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a};$$

nech

$$F_1 := F|_{D_1}, \quad F_2 := F|_{D_2}.$$

Keďže pre  $x \in D_2 \setminus \{a\}$  je  $F(x) = 0$ , platí

$$\lim_{x \rightarrow a} F_2(x) = 0. \quad (113)$$

Pre  $x \in D_1$  možno použiť rovnosť (111), z ktorej (rovnako ako v prípade  $f'(a) \neq 0$ ) odvodíme rovnosť

$$\lim_{x \rightarrow a} F_1(x) = f'(a) \cdot g'(f(a)) = 0. \quad (114)$$

Z (113) a (114) vyplýva podľa lemy .11(d)

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0,$$

čo je dokazovaná rovnosť (112).  $\spadesuit$

Nasledujúce tvrdenie možno vydedukovať z geometrickej interpretácie: Keďže grafy prostej funkcie  $f$  a inverznej funkcie  $f^{-1}$  sú súmerné podľa priamky  $y = x$ , je aj dotyčnica  $t$  ku grafu funkcie  $f$  v bode  $(b, f(b))$  súmerná podľa tejto priamky s dotyčnicou  $t'$  ku grafu funkcie  $f^{-1}$  v súmernom bode  $(a, f^{-1}(a))$ , kde  $a = f(b)$  (pokiaľ tieto dotyčnice existujú). Orientované uhly  $\alpha$ , resp.  $\alpha'$ , zvierané priamkou  $t$ , resp.  $t'$ , a kladnou časťou osi  $Ox$  teda spĺňajú rovnosť  $\alpha' - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \alpha$ , odtiaľ  $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , preto — pokiaľ  $\alpha \in D(\text{tg})$  a  $\text{tg } \alpha \neq 0$  — platí  $\text{tg } \alpha' = \text{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ . Pokiaľ  $\alpha = 0$  (resp.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  alebo  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ), je priamka  $t$  rovnobežná s osou  $Ox$  (resp. s osou  $Oy$ ), a  $t'$  je teda rovnobežná s  $Oy$  (resp. s  $Ox$ ).

**.85 Veta** (o derivácii inverznej funkcie) *Nech prostá funkcia  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná v bode  $f^{-1}(a)$ , kde  $a \in f(M)$ . Ak inverzná funkcia  $f^{-1}$  je v bode  $a$  spojitá, tak tam má aj vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, pričom platí*

$$(a) \text{ ak } f'(f^{-1}(a)) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \text{ tak } (f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))};$$

$$(b) \text{ ak } f'(f^{-1}(a)) = 0 \text{ a } f \text{ je v bode } f^{-1}(a) \text{ rastúca, tak } (f^{-1})'(a) = \infty;$$

$$(c) \text{ ak } f'(f^{-1}(a)) = 0 \text{ a } f \text{ je v bode } f^{-1}(a) \text{ klesajúca, tak } (f^{-1})'(a) = -\infty.$$

<sup>77</sup>to, že nastane práve jedna z nasledujúcich možností, vyplýva z tvrdenia ak  $D = D_1 \cup D_2$  a bod  $a$  je hromadný bod množiny  $D$ , tak  $a$  je hromadný bod množiny  $D_1$  alebo hromadný bod množiny  $D_2$



**Dôkaz.** Keďže bod  $b := f^{-1}(a)$  je hromadný bod množiny  $M$  (definícia .81) a funkcia  $f$  je prostá a spojitá v bode  $b$  (lema .82(a)), je bod  $a = f(b)$  hromadný bod množiny  $D(f^{-1}) = f(M)$  (dôkaz tohto tvrdenia prenechávame na čitateľa).

Tvrdenie (a) potom vyplýva z výpočtu

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} = \left| f^{-1}(x) = y \right| \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow f^{-1}(a)} \frac{y - f^{-1}(a)}{f(y) - a} = \\ &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f(y) - f(b)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f(y) - f(b)}{y - b}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{f'(b)} = \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(a))},\end{aligned}$$

pričom rovnosť (1) je dôsledkom vety .17 o limite zloženej funkcie <sup>78</sup>.

V prípade (b) bude zápis výpočtu  $(f^{-1})'(a)$  rovnaký až po rovnosť (2), ktorú teraz nahradí rovnosť

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f(y) - f(b)}{y - b}} = \infty,$$

vyplývajúca z vety .18(b): podľa predpokladu je totiž  $\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = 0$  a — pretože  $f$  je v bode  $b = f^{-1}(a)$  rastúca — funkcia  $\frac{f(y) - f(b)}{y - b}$  je v niektorom prstencovom okolí bodu  $b$  kladná.

Postup v prípade (c) je obdobný. ♠

Postačujúcu podmienku spojitosti inverznej funkcie formuluje dôsledok z paragrafu .70 <sup>79</sup>, z ktorého vyplýva nasledujúce tvrdenie.

**Dôsledok.** *Inverzná funkcia  $f^{-1}$  k prostej spojitaj funkcii definovanej na intervale  $I$  a diferencovateľnej v bode  $b := f^{-1}(a)$  má v bode  $a (= f(b))$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, pričom platí (a), (b), (c) z predchádzajúcej vety.*

**Poznámky. 1.** Ukážeme, že predpoklad  $f^{-1}$  je v bode  $a$  spojitá nemožno vo vete o derivácii inverznej funkcie vynechať:

Uvažujme funkciu  $f : \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$  danú predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in \mathbf{R} \setminus (\{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\} \cup \mathbf{N}) \\ \frac{1}{x}, & \text{ak } x \in \mathbf{N} \end{cases};$$

táto funkcia je prostá,  $f'(0) = 1$ ,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in \mathbf{R} \setminus (\{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\} \cup \mathbf{N}) \\ \frac{1}{x}, & \text{ak } x \in \{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\} \end{cases},$$

ale  $(f^{-1})'(0)$  neexistuje (vyplýva to z lemy .11(c); ak totiž označíme  $F$  funkciu definovanú na  $\mathbf{R} \setminus (\mathbf{N} \cup \{0\})$  predpisom  $F(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ , tak pre  $F_1 := F|_{\{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}}$ , resp.  $F_2 := F|_{\{-\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}}$  platí  $\lim_{x \rightarrow 0} F_1(x) = \infty$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow 0} F_2(x) = 1$ ).

**2.** V tvrdení vety o derivácii inverznej funkcie možno ešte doplniť nasledujúci bod:

(d) *ak  $f'(f^{-1}(a)) = 0$  a funkcia  $f$  v bode  $b := f^{-1}(a)$  nie je ani rastúca ani klesajúca, tak  $(f^{-1})'(a)$  neexistuje.*

(Ak totiž  $f$  nie je v bode  $b$  rastúca ani klesajúca, je  $b$  hromadným bodom množín  $M_1 := \{y \in D(f) \setminus \{b\}; \frac{f(y) - f(b)}{y - b} > 0\}$  a  $M_2 := \{y \in D(f) \setminus \{b\}; \frac{f(y) - f(b)}{y - b} < 0\}$ ; ak teraz funkcia  $F : D(f^{-1}) \setminus \{a\}$  je daná predpisom  $F(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a}$ , tak pre  $F_1 := F|_{f(M_1)}$ , resp.  $F_2 := F|_{f(M_2)}$  dostaneme zopakovaním postupu z dôkazu vety o derivácii inverznej funkcie rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} F_1(x) = \infty$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow a} F_2(x) = -\infty$ )

**Cvičenie.** Dokážte nasledujúce tvrdenie dopĺňajúce vetu .85:

Ak prostá spojitá funkcia  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  je v bode  $b := f^{-1}(a)$  (kde  $a \in f(M)$ ) spojitá a má tam nevlastnú deriváciu, tak  $(f^{-1})'(a) = 0$ .

<sup>78</sup>funkcia  $y = f^{-1}(x)$ , predstavujúca substitúciu, je podľa predpokladu spojitá v bode  $a$ , preto  $\lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$ , oprávnenie na použitie vety .17 vyplýva zo splnenia jej podmienky (b)

<sup>79</sup>a tiež poznámka 1 v tom istom paragrafe

# 11 Derivácia ako funkcia. Derivácie vyšších rádov. Derivácie elementárnych funkcií

**.86 Definícia.** Ak je daná funkcia  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ , nazýva sa funkcia, definovaná na množine  $D$  všetkých tých  $x \in M$ , v ktorých je funkcia  $f$  diferencovateľná, a priradujúca každému prvku  $x \in D$  hodnotu  $f'(x)$ , *derivácia funkcie*  $f$  a označuje sa  $f'$ .

Ak  $D = M$ , nazýva sa funkcia  $f$  *diferencovateľná*. Ak je navyše funkcia  $f'$  spojité, nazýva sa  $f$  *spojito diferencovateľná*.

Funkcia  $f$  sa nazýva *diferencovateľná* (resp. *spojito diferencovateľná*) na množine  $M$  ( $\emptyset \neq M \subset D(f)$ ), ak je diferencovateľná (resp. spojito diferencovateľná) funkcia  $f|_M$ .

*Derivácie vyšších rádov* funkcie  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  definujeme indukciou: pre  $n = 0$  položíme

$$f^{(0)} := f$$

a pre  $n \in \mathbf{N}$  potom definujeme

$$f^{(n)} := \left( f^{(n-1)} \right)' .$$

Takto definovaná funkcia  $f^{(n)}$  sa nazýva *n-tá derivácia funkcie*  $f$ . Ak  $a \in D(f^{(n)})$ , hovoríme, že *funkcia*  $f$  *je v bode*  $a$  *n-krát diferencovateľná* (alebo, že *má n-tú deriváciu v bode*  $a$ ). Ak funkcia  $f^{(n-1)}$  má v bode  $a$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, hovoríme, že  $f$  má v bode  $a$  *vlastnú alebo nevlastnú n-tú deriváciu*. Ak  $D(f^{(n)}) = M$ , hovoríme, že *funkcia*  $f$  *je n-krát diferencovateľná*. Pojmy *n-krát spojito diferencovateľnej funkcie* a *funkcie n-krát diferencovateľnej* (resp. *n-krát spojito diferencovateľnej na množine*  $M$ ) sú pre  $n > 1$  definované analogicky ako pre  $n = 1$ .

Namiesto označení  $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, \dots$  používame aj označenia  $f', f'', f''', f^{IV}, f^V, f^{VI}, \dots$

80.

**.87 Lema** (Leibnizova formula). *Nech funkcie*  $f : M \rightarrow \mathbf{R}, g : M \rightarrow \mathbf{R}$  *sú*

(i) *(n - 1)-krát diferencovateľné* ( $n \in \mathbf{N}$ ) <sup>81</sup>

a

(ii) *majú n-tú deriváciu v bode*  $a$ .

*Potom je v bode*  $a$  *n-krát diferencovateľná aj funkcia*  $fg$  *a platí*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a) \quad 82. \quad (115)$$

**Dôkaz.** Použijeme indukciu.

1° Pre  $n = 1$  je naše tvrdenie totožné s vetou .83(c).

2° Nech teraz platí (i) a (ii) pre  $n = i + 1$ , t.j. nech funkcie  $f, g : M \rightarrow \mathbf{R}$  sú  $i$ -krát diferencovateľné a majú  $(i + 1)$ -vú deriváciu v bode  $a$ . Z prvého z týchto predpokladov vyplýva, že pre  $n = i$  je (i) a (ii) splnené v každom bode  $x \in M$ , preto (podľa indukčného predpokladu)

$$(fg)^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} f^{(k)}(x)g^{(i-k)}(x) . \quad (116)$$

Z predpokladov pre  $n = i + 1$  ďalej vyplýva, že každá z funkcií  $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(i)}, g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(i)}$  je definovaná na  $M$  a diferencovateľná v bode  $a$ , preto (tvrdenia (a) a (c) vety .83) platí

$$\left( \binom{i}{k} f^{(k)} g^{(i-k)} \right)' (a) = \binom{i}{k} f^{(k)}(a)g^{(i+1-k)}(a) + \binom{i}{k} f^{(k+1)}(a)g^{(i-k)}(a) ,$$

<sup>80</sup>namiesto označenia  $f^{(n)}$  sa používa aj symbol  $\frac{d^n f}{dx^n}$  alebo  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$

<sup>81</sup>tento predpoklad v prípade  $n = 1$  neobsahuje žiadnu informáciu o funkciách  $f, g$  a je vtedy totožný s predpokladom *nech funkcie*  $f, g$  *sú definované na množine*  $M$

<sup>82</sup>pripomeňme, že  $f^{(0)} := f, g^{(0)} := g, \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , pričom  $0! := 1, (n + 1)! := n!(n + 1)$

odtiaľ, z (116) a z poznámky za vetou .83 potom dostávame

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(i+1)}(a) &= \left( (fg)^{(i)} \right)'(a) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \left( f^{(k)} g^{(i-k)} \right)'(a) = \\
 &= \left[ \binom{i}{0} f(a) g^{(i+1)}(a) + \binom{i}{0} f^{(1)}(a) g^{(i)}(a) \right] + \\
 &+ \left[ \binom{i}{1} f^{(1)}(a) g^{(i)}(a) + \binom{i}{1} f^{(2)}(a) g^{(i-1)}(a) \right] + \dots + \\
 &+ \left[ \binom{i}{i-1} f^{(i-1)}(a) g^{(2)}(a) + \binom{i}{i-1} f^{(i)}(a) g^{(1)}(a) \right] + \\
 &+ \left[ \binom{i}{i} f^{(i)}(a) g^{(1)}(a) + \binom{i}{i} f^{(i+1)}(a) g(a) \right].
 \end{aligned}$$

Na dokončenie nášho dôkazu teraz stačí s využitím rovnosti

$$\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$$

sčítat vždy druhý sčítanec jednej hranatej zátvorky s prvým sčítancom nasledujúcej hranatej zátvorky a na úpravu prvého sčítanca v prvej a druhého sčítanca v poslednej hranatej zátvorke použiť rovnosti

$$\binom{i}{0} = \binom{i+1}{0} = \binom{i+1}{i+1} = \binom{i}{i} = 1.$$

**.88 Derivácie základných elementárnych funkcií** uvádzame v nasledujúcej tabuľke (rovnosť  $(f(x))' = g(x)$ ,  $x \in D$ , pritom znamená, že funkcia  $g$  definovaná na množine  $D$  predpisom  $g(x)$ , je deriváciou elementárnej funkcie s predpisom  $f(x)$ ; pokiaľ množina  $D$  nie je uvedená, je ňou definičný obor elementárnej funkcie s predpisom  $g(x)$ ).

- |  |   |
|--|---|
| <p>(2) <math>(x)' \equiv 1, x \in \mathbf{R}</math></p> <p>(4) <math>(e^x)' = e^x</math></p> <p>(6) <math>(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)</math></p> <p>(8) <math>(\sin x)' = \cos x</math></p> <p>(10) <math>(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}</math></p> <p>(12) <math>(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math></p> <p>(14) <math>(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}</math></p> <p>(16) <math>(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x</math></p> | <p>(1) <math>(\operatorname{const})' \equiv 0, x \in \mathbf{R}</math></p> <p>(3) <math>(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\})</math></p> <p>(5) <math>(a^x)' = a^x \ln a</math></p> <p>(7) <math>(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x \in (0, \infty)</math></p> <p>(9) <math>(\cos x)' = -\sin x</math></p> <p>(11) <math>(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}</math></p> <p>(13) <math>(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math></p> <p>(15) <math>(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}</math></p> <p>(17) <math>(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x</math></p> |
|--|---|

Venujme niekoľko poznámok odvodeniu týchto rovností.

Vzťahy (1) a (2) možno ľahko dokázať na základe definície derivácie.

Rovnosť (4) vyplýva z tvrdenia (d) vety .12 (ktorého dôkaz obsiahnutý v príkladoch .33, .34 a v cvičení .35 sa zakladá na definícii exponenciálnej a logaritmickej funkcie v paragrafoch .72 a .73) na základe nasledujúceho výpočtu

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} e^a \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = \left| x - a = y \right| = {}^{83} e^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\
 &= e^a.
 \end{aligned}$$

---

<sup>83</sup>oprávnenie k použitiu substitúcie  $x - a = y$  je dané splnením podmienky (a) (aj splnením podmienky (b)) z vety .17 o limite zloženej funkcie

(5) vyplýva zo (4) na základe vety o derivácii zloženej funkcie: nech  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , resp.  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia s predpisom  $f(x) = x \ln a$ , resp.  $g(x) = e^x$ . Potom  $f'(x) = \ln a$  (veta .83(a) a rovnosť (2) z našej tabuľky),  $g'(x) = e^x$ . Keďže  $a^x = (g \circ f)(x)$ , je podľa vety .84

$$(a^x)' = g'(f(x))f'(x) = e^{f(x)}f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a .$$

(6) možno odvodiť zo (4) na základe vety o derivácii inverznej funkcie <sup>84</sup>: ak funkcia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je daná predpisom  $f(x) = e^x$ , tak  $f'(x) = e^x = f(x)$  a  $\ln x = f^{-1}(x)$ , preto (veta .85)

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x} .$$

(7) potom vyplýva zo (6) na základe rovnosti  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  (pozri (87)) a vety .83(a).

Rovnosť (8) vyplýva z vety .12(b), zo spojitosti funkcie  $\cos$  a <sup>85</sup> zo súčtových vzorcov (dôkaz všetkých uvedených skutočností zatiaľ ešte stále presahuje naše možnosti) nasledovne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \\ &= (\cos a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \left| \frac{x-a}{2} = y \right| = (\cos a) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \\ &= \cos a . \end{aligned}$$

Odvodenie rovnosti (9) založené na súčtových vzorcoch, spojitosti funkcie  $\sin$  a vete .12(b) je obdobné.

Vzťahy (10) a (11) vyplývajú z (8) a (9) na základe vety .83(d) o derivácii podielu.

(12) vyplýva z (8) podľa vety o derivácii inverznej funkcie: ak označíme  $f := \sin \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , tak  $f'(x) = \cos x$ ,  $x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  (tvrdenie (a) lemy z poznámky v paragrafe .81) a  $\arcsin x = f^{-1}(x)$ , preto pre  $x \in (-1, 1)$  (pre tieto  $x$  je totiž  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ ) dostávame

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

súčasne podľa tvrdenia (b) vety .85 je  $(f^{-1})'(1) = \infty$ ,  $(f^{-1})'(-1) = \infty$ , preto  $1, -1 \notin D((f^{-1})')$ .

Odvodenie rovností (13), (14), (15) je obdobné.

Vzťahy (16) a (17) vyplývajú zo (4) a rovností  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

Dôkaz rovnosti (3) bude pre  $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0, 1\}$  založený na identite <sup>86</sup>

$$A^r - B^r = (A - B) (A^{r-1} + A^{r-2}B + \dots + A^{r-k}B^{k-1} + \dots + AB^{r-2} + B^{r-1}) , \quad (117)$$

kde  $A, B \in \mathbf{R}$ ,  $r \in \mathbf{N}$ .

Začnime prípadom  $\alpha = n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ), pre  $a \neq 0$  dostávame

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = na^{n-1} , \quad (118)$$

pričom posledná rovnosť vyplýva zo spojitosti limitovanej funkcie v bode  $a$ .

Pre  $\alpha = -n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) a  $a \neq 0$  je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( -\frac{1}{x^n a^n} \cdot \frac{x^n - a^n}{x - a} \right) = -\frac{1}{a^{2n}} na^{n-1} = -na^{-n-1} . \quad (119)$$

V prípade  $\alpha = \frac{p}{q}$ , kde  $p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  a  $q \in \mathbf{N}$  sú nesúdeliteľné, platí pre  $a \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^p)^{\frac{1}{q}} - (a^p)^{\frac{1}{q}}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{x^p - a^p}{x - a} \right)^{\frac{1}{q}} .$$

<sup>84</sup>samosrejme, možno tiež využiť tvrdenie (c) vety .12 (dokázané v príklade .34 na základe niektorých faktov o funkcii  $\ln$  odvodených v paragrafe .73):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \left( 1 + \frac{x-a}{a} \right)}{\frac{x-a}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} .$$

<sup>85</sup>ešte presnejšie: zo spojitosti funkcie  $f(x) = \cos \frac{x+a}{2}$  v bode  $a$

<sup>86</sup>pri dokazovaní (3) pre prípad  $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0, 1\}$  možno postupovať aj nasledovne: v prípade  $\alpha \in \mathbf{N}$  použiť matematickú indukciu (a pritom využiť rovnosť (2) a tvrdenie (c) vety .83); pomocou vety .85 potom dokázať (3) pre  $\alpha = \frac{1}{n}$  a napokon pomocou vety .84 pre  $\alpha = \frac{p}{q}$ ; aj pri tomto postupe však treba dôkaz rovnosti (3) v bode 0 robiť niekedy samostatne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} a^{\frac{p}{q}} + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-3} \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^2 + \cdots + x^{\frac{p}{q}} \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \\ & = p a^{p-1} \frac{1}{q \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}, \end{aligned}$$

prítom v prvej rovnosti sme použili (117) (kde sme položili  $r = q$ ,  $A = x^{\frac{p}{q}}$ ,  $B = a^{\frac{p}{q}}$ ), druhá rovnosť vyplýva zo spojivosti v bode  $a$  každého zo sčítancov v menovateli druhého zlomku a z už dokázaných vzťahov (118), resp. (119)<sup>87</sup>.

Pre  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  a  $a \neq 0$  vyplýva rovnosť (3) zo vzťahov (.72) a (89) (ktorými je v tomto prípade mocninová funkcia  $x^\alpha$  definovaná) a zo (4).

Dôkaz vzťahu (3) v bode  $x = 0$  (pokiaľ  $0 \in D((x^\alpha)')$ ) prenechávame na čitateľa.

## 12 Vety o strednej hodnote

**.89 Veta** (Rolleho veta o strednej hodnote). *Nech funkcia  $f$  je spojitá na intervale  $[a, b]$  a má v každom bode  $x \in (a, b)$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Ak  $f(a) = f(b)$ , tak pre niektoré  $c \in (a, b)$  platí  $f'(c) = 0$ .*

**Dôkaz.** Pretože uzavretý ohraničený interval  $[a, b]$  je kompaktná množina (veta .50), existuje podľa vety .78  $\max_{x \in [a, b]} f(x)$  aj  $\min_{x \in [a, b]} f(x)$ ; nech  $f(c_1) := \max_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $f(c_2) := \min_{x \in [a, b]} f(x)$ . Ak aspoň jeden z bodov  $c_1, c_2$  je vnútorným bodom intervalu  $[a, b]$ , tak v ňom — keďže globálny extrém na  $[a, b]$  je aj lokálnym extrémom — musí mať podľa tvrdenia (c3) lemy .82 funkcia  $f$  nulovú deriváciu.

Ak  $c_1$  ani  $c_2$  nie sú vnútorné body intervalu  $[a, b]$ , vyplýva z predpokladu  $f(a) = f(b)$  rovnosť  $\max_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ ; to znamená, že  $f$  je konštantná na  $[a, b]$ , a rovnosť  $f'(c) = 0$  platí teda pre každé  $c \in (a, b)$ .

**Poznámka.** Na podobných myšlienkach je založený dôkaz nasledujúcej vety.

**VETA.** *Ak  $I$  je interval a funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná, tak jej derivácia je darbouxovská.*

**DÔKAZ.** Nech  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , nech  $f'(a) < f'(b)$  (postup v prípade  $f'(a) > f'(b)$  je rovnaký), nech  $d \in (f'(a), f'(b))$ , chceme dokázať (lema z paragrafu .67), že pre niektoré  $c \in (a, b)$  platí  $f'(c) = d$ .

Spojité funkcia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  daná predpisom  $g(x) = f(x) - dx$  nadobúda na  $[a, b]$  globálne maximum. Pretože  $g'(a) = f'(a) - d < 0$  a  $g'(b) = f'(b) - d > 0$ , je funkcia  $g$  klesajúca v bode  $a$  a rastúca v bode  $b$  (lema .82(b)), preto globálne maximum nemôže nadobúdať ani v  $a$  ani v  $b$ , nadobúda ho teda v niektorom vnútornom bode  $c$  intervalu  $[a, b]$ . Z lemy .82(c) potom vyplýva

$$0 = g'(c) = f'(c) - d,$$

tj.

$$f'(c) = d,$$

čo sme chceli dokázať. ♠

Nasledujúce tvrdenie, ktoré odvodíme z Rolleho vety, má názornú geometrickú interpretáciu: ak graf spojitej funkcie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  má v každom bode s výnimkou bodov  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  dotyčnicu, potom niektorá z týchto dotyčníc je rovnobežná so spojnicou krajných bodov grafu funkcie  $f$ .

**.90 Veta** (Lagrangeova veta o strednej hodnote). *Nech funkcia  $f$  je spojitá na intervale  $[a, b]$  a má v každom jeho vnútornom bode vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Potom pre niektoré  $c \in (a, b)$  platí rovnosť*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tj.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

<sup>87</sup>inou možnosťou je použitie substitúcie  $x^{\frac{p}{q}} = y$ ; ak označíme  $A := a^{\frac{p}{q}}$ , dostaneme (pozri tiež posledný odstavec poznámky 2 v paragrafe .71)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p - \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p}{x - a} = \left|x^{\frac{1}{q}} = y\right| = \lim_{y \rightarrow A} \frac{y^p - A^p}{y^q - A^q} = \lim_{y \rightarrow A} \frac{\frac{y^p - A^p}{y - A}}{\frac{y^q - A^q}{y - A}} = \frac{pA^{p-1}}{qA^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}.$$

**Dôkaz.** Nech  $F := f + g$ , pričom  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia s predpisom

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad (120)$$

potom  $F$  je spojitá, má v každom bode  $x \in (a, b)$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu (veta .83(b) a poznámka 2 za ňou) a platí  $F(a) = F(b)$  ( $= f(a)$ ). Funkcia  $F$  teda spĺňa všetky predpoklady Rolleho vety o strednej hodnote, preto existuje  $c \in (a, b)$  tak, že

$$F'(c) = 0.$$

Keďže funkcie  $F$  a  $g$  sú v bode  $c$  diferencovateľné, vyplýva z rovnosti  $f = F + g$  vzťah

$$f'(c) = F'(c) + g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

čím je náš dôkaz skončený.

**Poznámka.** Z predchádzajúcej vety vyplýva, že neexistuje spojitá funkcia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , ktorá by mala v každom bode  $c \in (a, b)$  nevlastnú deriváciu.

**Cvičenie. 1.** Ak  $f$  je spojitá funkcia definovaná na intervale  $I$  a pre každý vnútorný bod  $x$  tohto intervalu platí  $f'(x) = 0$ , tak funkcia  $f$  je konštantná.

**2.** Nech  $f, g$  sú spojité funkcie definované na intervale  $I$ . Ak v každom vnútornom bode  $x$  tohto intervalu existujú konečné  $f'(x), g'(x)$  a platí  $f'(x) = g'(x)$ , tak sa funkcie  $f$  a  $g$  líšia o konštantu (tj.  $(\exists k \in \mathbf{R})(\forall x \in I)(f(x) - g(x) = k)$ ).

**.91 Veta** (Cauchyho veta o strednej hodnote). Nech funkcie  $f, g$  sú spojité na  $[a, b]$ , pričom  $f$  má v každom bode  $x \in (a, b)$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu a  $g$  je diferencovateľná na  $(a, b)$ . Potom pre niektoré  $c \in (a, b)$  platí rovnosť

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)). \quad (121)$$

Ak sú navyše splnené podmienky

(i)  $g(b) \neq g(a)$ ;

(ii)  $(\forall x \in (a, b))(g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0)$ ,

tak (121) možno prepísať do podoby

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (122)$$

**Dôkaz.** Funkcia  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  daná predpisom

$$F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

je spojitá a má v každom bode  $x \in (a, b)$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu (veta .83 a poznámka 2 za ňou), preto podľa vety .90 existuje  $c \in (a, b)$ , pre ktoré platí rovnosť

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a},$$

tj. (keďže  $F(b) = F(a) = 0$ )

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0,$$

čím je dokázaný vzťah (121).

Nech teraz platí aj (i) a (ii). Ak chceme z (121) odvodiť rovnosť (122), potrebujeme, aby boli splnené nerovnosti

$$g(b) \neq g(a), \quad g'(c) \neq 0. \quad (123)$$

---

<sup>88</sup>grafom funkcie  $g$  je priamka rovnobežná so spojnicou krajných bodov grafu funkcie  $f$

Prvá z nich je totožná s predpokladom (i), druhú dokážeme nepriamo: keby  $g'(c) = 0$ , vyplývala by z (121) rovnosť

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = 0,$$

čo ale nie je možné, pretože  $g(b) - g(a) \neq 0$  (predpoklad (i)) a  $f'(c) \neq 0$  (to vyplýva z rovnosti  $g'(c) = 0$  a predpokladu (ii)).

(122) teraz vyplýva z (121) a (123).

**Poznámky.** 1. Veta .91 zostane v platnosti, ak podmienky (i) a (ii) nahradíme podmienkou

(ii')  $(\forall x \in (a, b))(g'(x) \neq 0)$ ;

z predpoklaov o funkcii  $g$  a z (ii') totiž vyplýva (i) (nepriamo: keby  $g(b) = g(a)$ , existoval by podľa vety .89 bod  $c \in (a, b)$ , pre ktorý by platilo  $g'(c) = 0$ ) aj (ii) (keďže pre každé  $x \in (a, b)$  je výrok  $g'(x) = 0$  nepravdivý, je pre každé  $x \in (a, b)$  pravdivá každá implikácia tvaru  $g'(x) = 0 \Rightarrow V(x)$ , kde  $V$  je výroková forma definovaná na  $(a, b)$ ; teda aj implikácia  $g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$ ).

2. Priam klasickým príkladom chybného uvažovania je nasledujúci "dôkaz" Cauchyho vety:

"Nech sú splnené predpoklady vety .91 (vrátane predpokladov (i) a (ii')). Potom funkcie  $f$  aj  $g$  splňajú predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote, teda pre niektoré  $c \in (a, b)$  platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

prítom — keďže  $g(b) \neq g(a)$  — vyplýva z druhej z týchto rovností nerovnosť  $g'(c) \neq 0$ . Ak teraz vydělíme prvú z uvedených rovností druhou, dostaneme (121)."

Hľadanie chyby prenechávame na čitateľa.

## 13 Vyšetřovanie priebehu funkcií

### 13.1 Monotónnosť

Znakom  $\text{int } I$ <sup>89</sup> budeme v nasledujúcich úvahách označovať množinu všetkých vnútorných bodov intervalu  $I$  (teda ak  $I$  je interval  $[a, b]$ , resp.  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, b)$ , tak  $\text{int } I$  je vždy interval  $(a, b)$ ).

**.92 Veta.** Nech spojité funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  má v každom vnútornom bode intervalu  $I$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Potom

(a)  $f$  je neklesajúca (resp. nerastúca) práve vtedy, keď platí

$$(\forall x \in \text{int } I)(f'(x) \geq 0) \quad (\text{resp.} \quad (\forall x \in \text{int } I)(f'(x) \leq 0)) \quad ; \quad (124)$$

(b)  $f$  je rastúca (resp. klesajúca) práve vtedy, keď platí (124) a množina  $M := \{x \in I; f'(x) = 0\}$  neobsahuje žiadny nedegenerovaný interval (tj. špeciálne: ak pre všetky  $x \in \text{int } I$  platí  $f'(x) > 0$ , resp.  $f'(x) < 0$ ).

**Dôkaz.** V (a) aj (b) dokážeme vždy prvé z dvojice uvedených tvrdení (dôkaz tvrdení uvedených v zátvorkách je rovnaký).

(a) " $\Rightarrow$ " Nech  $c \in \text{int } I$ . Ak  $f$  je neklesajúca, tak platí

$$(\forall x \in I \setminus \{c\}) \left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \right),$$

z vety .24 potom vyplýva nerovnosť  $f'(c) \geq 0$ .

" $\Leftarrow$ " Nech  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . Keďže funkcia  $f$  splňa na intervale  $[x, y]$  všetky predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (veta .90), platí pre niektoré  $c \in (x, y) \subset \text{int } I$  rovnosť

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

<sup>89</sup>int je skratka slova *interior* (=vnútro)

Z nerovností  $x > y$  a  $f'(c) \geq 0$  (druhá z nich vyplýva z nášho predpokladu (124)<sup>90</sup>) potom vyplýva  $f(y) \geq f(x)$ . Keďže táto úvaha platí pre každé  $x, y \in I$ ,  $x < y$ , je  $f$  neklesajúca.

(b) " $\Rightarrow$ " Ak  $f$  je rastúca, tak je aj neklesajúca a z implikácie " $\Rightarrow$ " v (a) potom vyplýva (124). Ďalej postupujeme nepriamo: Ak  $M$  obsahuje nedegenerovaný interval  $J$ , je podľa cvičenia 1 z paragrafu .90 funkcia  $f$  na  $J$  konštantná, čo — keďže  $J$  je nedegenerovaný interval — znamená, že  $f$  nie je rastúca.

" $\Leftarrow$ " Ak je splnená podmienka (124), je funkcia  $f$  podľa časti (a) neklesajúca. Ďalej budeme dokazovať sporom: Keby  $f$  bola neklesajúca a nebola rastúca, existoval by nedegenerovaný interval  $J$ , na ktorom by  $f$  bola konštantná. Pre každý bod intervalu  $J$  by potom platilo  $f'(x) = 0$ , odtiaľ by vyplývala inklúzia  $J \subset M$ , čo je spor.

**Poznámka. 1.** Tvrdenie ak spojité funkcia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  má v každom bode  $x \in (a, b)$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, pričom  $f'(x) > 0$ , tak  $f$  je rastúca možno dokázať aj trochu odlišným postupom, založenom na leme .82(b) (ktorá formuluje postačujúcu podmienku pre rast funkcie v bode) a nasledujúcich tvrdeniach<sup>91</sup>.

LEMA 1. Ak funkcia  $f : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$  je rastúca v každom bode  $x \in [c, d]$ , tak  $f(c) < f(d)$ .

DÔKAZ. Stačí dokázať rovnosť  $d = \sup B$ , kde  $B := \{x \in [c, d]; f(x) > f(c)\}$  (keďže  $f$  je rastúca v bode  $c$ , platí inklúzia  $[c, c + \varepsilon) \subset B$  pre niektoré  $\varepsilon > 0$ , teda  $B \neq \emptyset$ , ďalšie úvahy sú obdobné ako v poznámke 2 z paragrafu .77) a potom z tejto rovnosti a faktu, že  $f$  je rastúca v bode  $d$ , odvodiť (opäť podobne ako v poznámke 2 z paragrafu .77) nerovnosť  $f(c) < f(d)$ .

DÔSLEDOK. Ak funkcia  $f$  je rastúca v každom bode intervalu  $I$ , tak  $f$  je rastúca.

LEMA 2. Ak funkcia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  je rastúca na intervale  $(a, b)$  a spojité v bodoch  $a, b$ , tak  $f$  je rastúca.

DÔKAZ. Treba dokázať nerovnosti

$$(\forall c \in (a, b))(f(a) < f(c) < f(b)) .$$

Nech teda  $c \in (a, b)$ , zvolíme  $d \in (a, c)$ , potom — keďže  $f$  rastie na  $(a, b)$  — je

$$f(d) < f(c) . \tag{125}$$

Z dôsledku .30(a) (pre  $M = (a, b)$ ) a spojitosti funkcie  $f$  v bode  $a$  vyplýva nerovnosť

$$f(a) = \inf_{x \in (a, b)} f(x) \leq f(d) ,$$

z (125) potom dostávame  $f(a) < f(c)$ . Dôkaz nerovnosti  $(\forall c \in (a, b))(f(c) < f(b))$  je rovnaký. ♠

Keďže dokazovanie nerovností  $f'(x) > 0$  pre  $x \in \text{int } I$  môže byť niekedy technicky náročnejšie ako dôkaz nerovnosti  $f''(x) > 0$  pre  $x \in \text{int } I$ , môže byť v niektorých prípadoch výhodnejšie použiť namiesto vety .92 dôsledok 1 z nasledujúceho odseku.

**.93 Lema.** Nech spojité funkcia  $g : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$  má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode  $x \in (c, d)$ . Potom

(a) ak

$$(\forall x \in (c, d))(g'(x) > 0) \tag{126}$$

a

$$g(c) = 0 ,$$

tak platí nerovnosť

$$(\forall x \in (c, d))(g(x) > 0) ;$$

<sup>90</sup>keďže  $c$  je podľa vety .90 prvkom množiny  $K := \{x \in \text{int } I; f'(x) \in \mathbf{R}\}$ , možno podmienku (124) nahradiť predpokladom  $(\forall x \in K)(f'(x) \geq 0)$

<sup>91</sup>Na základe obdobných úvah možno dokázať aj tvrdenie ak funkcia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  je spojité funkcia a pre každé  $x \in (a, b)$  je  $f'_+(x) > 0$ , tak  $f$  je rastúca. Vtedy ovšem namiesto lemy 1 a jej dôsledku treba použiť tieto tvrdenia:

LEMA 1'. Ak pre každé  $x \in [c, d]$  platí  $f'_+(x) > 0$ , tak

$$(\forall x \in (c, d))(f(x) > f(c)) .$$

DÔKAZ. Stačí dokázať rovnosť  $d = \sup \{z \in (c, d); (\forall x \in (c, z))(f(x) < f(z))\}$ ; pri jej odvodení založenom na podobných myšlienkach ako dôkaz z poznámky 2 v paragrafe .77 použijete fakt, že z nerovnosti  $f'_+(\xi) > 0$  vyplýva existencia čísla  $\varepsilon > 0$  s vlastnosťou  $(\forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) \cap D(f))(f(x) > f(\xi))$ .

DÔSLEDOK'. Ak pre každé  $x \in (a, b)$  platí  $f'_+(x) > 0$ , tak  $f$  je na intervale  $(a, b)$  rastúca.



(b) ak platí (126) a

$$g(d) = 0 ,$$

tak  $g(x) < 0$  pre všetky  $x \in [c, d]$ .

**Dôkaz.** (a) vyplýva z elementárneho tvrdenia ak  $g : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$  je rastúca funkcia a  $g(c) = 0$ , tak  $g(x) > 0$  pre  $x \in (c, d]$  a vety .92, v prípade (b) je situácia obdobná.

**Dôsledok 1.** Nech funkcia  $f$  je  $(n-1)$ -krát ( $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ ) spojite diferencovateľná na intervale  $[c, d]$  a má vlastnú alebo nevlastnú  $n$ -tú deriváciu v každom bode  $x \in (c, d)$ .

(a) Ak

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \quad (127)$$

a

$$(\forall x \in (c, d)) (f^{(n)}(x) \succ 0) , \quad (128)$$

tak  $f$  je na  $[c, d]$  rastúca <sup>92</sup>.

(b) Ak platí (128) a

$$f'(d) = f''(d) = \dots = f^{(n-1)}(d) = 0 , \quad (129)$$

tak  $f$  je na  $[c, d]$  rastúca, ak  $n$  je nepárne, a je na  $[c, d]$  klesajúca, ak  $n$  je párne.

**Dôkaz.** (a) Dôkaz je založený na viacnásobnom použití tvrdenia (a) predchádzajúcej lemy.

Z (128) a predpokladu  $f^{(n-1)}(c) = 0$  vyplýva podľa uvedenej lemy (aplikovanej na funkciu  $g = f^{(n-1)}$ ) nerovnosť

$$(\forall x \in (c, d)) (f^{(n-1)}(x) > 0) ; \quad (130)$$

z (130) a predpokladu  $f^{(n-2)}(c) = 0$  dostávame na základe tej istej lemy (tentokrát použitej na funkciu  $g = f^{(n-2)}$ )

$$(\forall x \in (c, d)) (f^{(n-2)}(x) > 0)$$

atď. Po konečnom počte krokov tak dostaneme nerovnosť

$$(\forall x \in (c, d)) (f'(x) > 0) ,$$

z ktorej už podľa vety .92(b) vyplýva, že  $f$  rastie na intervale  $[c, d]$ .  $\triangle$

Dôkaz tvrdenia (b) je obdobný a zakladá sa na tvrdení (b) lemy .93 (pritom práve zo skutočnosti, že nerovnosti  $g'(x) \succ 0$  a  $g(x) < 0$  v uvedenom tvrdení sú opačné, vyplýva rozlišovanie prípadov  $n+1$  nepárne a  $n+1$  párne v dokazovanom tvrdení).

**Poznámka.** Ak predpoklad (128) nahradíme predpokladom

$$(\forall x \in (c, d)) (f^{(n)}(x) \prec 0) , \quad (131)$$

treba v znení dôsledku 1 slovo *rastúca* nahradiť slovom *klesajúca* a naopak.  $\spadesuit$

Z dôsledku 1 vyplýva na základe tej istej úvahy, ktorú sme použili na dôkaz lemy .93, nasledujúce tvrdenie.

**Dôsledok 2.** Nech funkcia  $f$  je  $(n-1)$ -krát ( $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ ) spojite diferencovateľná na intervale  $[c, d]$  a má vlastnú alebo nevlastnú  $n$ -tú deriváciu v každom bode  $x \in (c, d)$ .

(a) Ak platí (127), (128) a

$$f(c) = 0 ,$$

tak

$$(\forall x \in (c, d]) (f(x) > 0) .$$

(b) Ak platí (129), (128) a

$$f(d) = 0 ,$$

tak

$$(\forall x \in [c, d)) (f(x) < 0) , \quad \text{ak } n \text{ je nepárne} ,$$

a

$$(\forall x \in [c, d)) (f(x) > 0) , \quad \text{ak } n \text{ je párne} .$$

---

<sup>92</sup>ako čitateľ z dôkazu zistí, podmienku (128) možno v (a) aj (b) nahradiť dvojicou podmienok  $(\forall x \in (c, d)) (f^{(n+1)}(x) \succeq 0)$  a množina  $M := \{x \in [c, d]; f^{(n+1)}(x) = 0\}$  neobsahuje žiadny nedegenerovaný interval

## 13.2 Lokálne a globálne extrémny.

Pojem lokálneho extrémny sme definovali v paragrafe .82, kde sme tiež dokázali nutnú podmienku existencie lokálneho extrémny (časť (c<sub>3</sub>) tvrdenia (c)). Keďže globálny extrém funkcie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  je aj jej lokálnym extrémom, vyplýva z tejto nutnej podmienky nasledujúci postup.

**.94 Hľadanie globálnych extrémny.** Ak  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá funkcia, stačí namiesto  $\max_{x \in [a, b]} f(x)$  (ktorého existenciu zaručuje veta .78) nájsť  $\max_{x \in K} f(x)$ , kde  $K := \{a, b\} \cup D_1 \cup D_2$ , pričom  $D_2 := \{x \in (a, b); f'(x) = 0\}$  a  $D_1$  je množina tých  $x \in (a, b)$ , v ktorých  $f$  nemá vlastnú ani nevlastnú deriváciu; z lemy .82(c<sub>3</sub>) totiž vyplýva — keďže v bode  $x \in (a, b)$ , pre ktorý platí  $f'(x) \succ 0$  alebo  $f'(x) \prec 0$ , nemôže  $f$  nadobúdať lokálny extrém — rovnosť

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in K} f(x) .$$

Pokiaľ je množina  $K$  konečná,  $K = \{a, x_1, x_2, \dots, x_n, b\}$ , je teda maximom funkcie  $f$  na  $[a, b]$  najväčšie z čísel  $f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b)$ .

Postup v prípade lokálneho maxima je obdobný. ♠

Ukážme teraz na príklade menej známeho dôkazu nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom možnosť použitia diferenciálneho počtu pri hľadaní globálnych extrémny na *neohraničenom* intervale.

**Príklad.** Dokážeme tvrdenie ak  $a_1, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) sú kladné čísla, tak

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} , \quad (132)$$

príčom rovnosť nastane len v prípade  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$  (ďalšie dôkazy tejto nerovnosti nájde čitateľ v príklade z paragrafu .98).

Použijeme indukciu:

1° Pre  $n = 2$  má (132) tvar

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} , \quad a_1 > 0, a_2 > 0 ,$$

tj.

$$2\sqrt{a_1 a_2} \leq a_1 + a_2 , \quad a_1 > 0, a_2 > 0 ; \quad (133)$$

postupnými úpravami, z ktorých prvou je umocnenie obidvoch strán na druhú, dostávame

$$\begin{aligned} 4a_1 a_2 &\leq a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 , \\ 0 &\leq a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 , \\ 0 &\leq (a_1 - a_2)^2 . \end{aligned} \quad (134)$$

Posledná z týchto nerovností je zrejme pravdivá, a teda — keďže naše úpravy boli ekvivalentné (umocňovanie na druhú predstavovalo v tomto prípade ekvivalentnú úpravu vzhľadom na náš predpoklad  $a_1 > 0, a_2 > 0$ ) — platí aj (133). Keďže v (134) nastane rovnosť len v prípade  $a_1 = a_2$ , platí to isté aj o (133). Tým je naše tvrdenie pre prípad  $n = 2$  dokázané.

2° Nech sú teraz dané čísla  $a_1, \dots, a_{n+1} > 0$ , chceme dokázať nerovnosť

$$\sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} ,$$

tj.

$$\frac{(n+1) \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_{n+1}}}{a_1 + \cdots + a_{n+1}} \leq 1 \quad (135)$$

a zistiť, kedy nastane rovnosť.

Podľa indukčného predpokladu je

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} ,$$

tj.

$$\frac{n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{a_1 + \cdots + a_n} \leq 1 , \quad (136)$$

príčom rovnosť platí len v prípade  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ .

Nech  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia s predpisom

$$f(x) = \frac{(n+1) \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n x}}{a_1 + \cdots + a_n + x} ;$$

na dôkaz (135) zrejme stačí dokázať nerovnosť

$$(\forall x > 0)(f(x) \leq 1);$$

vyšetříme preto pomocou prvej derivácie priebeh funkcie  $f$ :

Pre  $x > 0$  platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n} \left( \frac{n+1 \sqrt[n+1]{x}}{a_1 + \dots + a_n + x} \right)' = \\ &= (n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n} \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{x^n}} (a_1 + \dots + a_n + x) - n+1 \sqrt[n+1]{x}}{(a_1 + \dots + a_n + x)^2} = \\ &= \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}}{(a_1 + \dots + a_n + x)^2} \cdot \frac{(a_1 + \dots + a_n + x) - (n+1)x}{(n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{x^n}}, \end{aligned}$$

preto pre  $x > 0$  platí  $f'(x) > 0$ , resp.  $f'(x) < 0$  práve vtedy, keď

$$a_1 + \dots + a_n + x - (n+1)x > 0, \quad \text{tj.} \quad 0 < x < \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

resp.

$$a_1 + \dots + a_n + x - (n+1)x < 0, \quad \text{tj.} \quad x > \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Podľa vety .92(b) teda funkcia  $f$  rastie na  $(0, \alpha]$  a klesá na  $[\alpha, \infty)$ , kde  $\alpha := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ ; v bode  $\alpha$  preto  $f$  nadobúda ostré globálne maximum, platí teda

$$(\forall x \in (0, \infty), x \neq \alpha)(f(x) < f(\alpha)), \quad (137)$$

prítom

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n} \alpha}{a_1 + \dots + a_n + \alpha} = \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n} \sqrt[n+1]{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}}{(a_1 + \dots + a_n) \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \\ &= \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n} \sqrt[n+1]{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}}{n+1 \sqrt[n+1]{n} \left(\frac{n+1}{n}\right) (a_1 + \dots + a_n)} = \frac{n+1 \sqrt[n+1]{n^n} \sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}}{n+1 \sqrt[n+1]{(a_1 + \dots + a_n)^n}} = \\ &= \sqrt[n+1]{\frac{n^n (a_1 \dots a_n)}{(a_1 + \dots + a_n)^n}} = \left( \frac{n \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_1 + \dots + a_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \leq 1, \end{aligned}$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z indukčného predpokladu (136). Keďže funkcia  $x^{\frac{n}{n+1}}$  je rastúca (a teda prostá), bude rovnosť  $f(\alpha) = 1$  platíť len v prípade  $\frac{n \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_1 + \dots + a_n} = 1$ , tj. (opäť podľa indukčného predpokladu) pre  $a_1 = \dots = a_n$ .

Z (137) a nerovnosti

$$f(\alpha) \leq 1 \quad (138)$$

už vyplýva (135), prítom (ako tiež vidno z (137) a (138)) rovnosť v (135) nastane len v prípade

$$a_{n+1} = \alpha \wedge f(\alpha) = 1,$$

tj. (keďže rovnosť  $f(\alpha) = 1$  platíť len pre  $a_1 = \dots = a_n$ ) pre

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \wedge a_1 = \dots = a_n,$$

táto podmienka je ale ekvivalentná s požiadavkou

$$a_1 = \dots = a_n = a_{n+1},$$

čo sme chceli dokázať. ♠

V nasledujúcich tvrdeniach sformulujeme postačujúce podmienky existencie lokálneho extrému; dôkaz prvej z nich prenechávame na čitateľa.

**.95 Lema.** *Nech  $a$  je vnútorný bod definičného oboru funkcie  $f$ .*

(a) *Ak existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $f$  rastie (resp. neklesá) na  $(a - \varepsilon, a)$  a klesá (resp. nerastie) na  $[a, a + \varepsilon)$ , tak  $f$  má v bode  $a$  ostré lokálne maximum (resp. lokálne maximum).*

(b) *Ak existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $f$  klesá (resp. nerastie) na  $(a - \varepsilon, a)$  a rastie (resp. neklesá) na  $[a, a + \varepsilon)$ , tak  $f$  má v bode  $a$  ostré lokálne minimum (resp. lokálne minimum).*

**Poznámka.** Uvedené tvrdenie nemožno "obrátiť": napr. vzo skutočnosti, že funkcia  $f$  nadobúda vo vnútornom bode svojho definičného oboru ostré lokálne minimum, nemusí ešte vyplývať, že  $f$  by musela byť neklesajúca vľavo od  $a$  a nerastúca vpravo od  $a$ . Protipríkladom je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases},$$

ktorá

- je diferencovateľná:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$$

(hodnotu  $f'(0)$  sme našli priamo na základe definície:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) \right] = 0,$$

pri tom posledná rovnosť vyplýva z vety .14, pri výpočte  $f'(x)$  pre  $x \neq 0$  sme použili vety .83 a .84);

- má v bode 0 ostré globálne minimum: z nerovnosti  $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , vyplýva  $2 + \sin \frac{1}{x} > 0$  pre  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , preto

$$(\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}) (f(x) > 0 = f(0));$$

ale

- neexistuje  $\varepsilon > 0$ , pre ktoré by platilo, že  $f$  neklesá na  $(-\varepsilon, 0]$  a nerastie na  $[0, \varepsilon)$ ; to vyplýva z vety .92(a) a skutočnosti, že pre ľubovoľné  $\varepsilon > 0$  nadobúda  $f'$  na každom z intervalov  $(-\varepsilon, 0)$ ,  $(0, \varepsilon)$  kladné aj záporné hodnoty (pre  $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = -1$ , preto (podľa lemy .10) pre  $n$  "dostatočne veľké" — tj. pre  $x_n$  "blízke k 0" — sú hodnoty  $f'(x_n)$  záporné; podobne možno dokázať existenciu kladných funkčných hodnôt v intervale  $(0, \varepsilon)$  a kladných aj záporných hodnôt derivácie v intervale  $(-\varepsilon, 0)$ ).

**Dôsledok.** *Ak funkcia  $f'$  zmení v bode  $a$  znamienko z kladného na záporné (tj. existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $O(a, \varepsilon) \subset D(f')$ ,  $(\forall x \in (a - \varepsilon, a)) (f'(x) > 0)$ ,  $(\forall x \in (a, a + \varepsilon)) (f'(x) < 0)$ ), tak  $f$  má v bode  $a$  lokálne maximum.*

**Dôkaz.** Tvrdenie vyplýva z predchádzajúcej lemy a vety .92(b) <sup>93</sup>.  $\triangle$

Formuláciu (a dôkaz) analogickej postačujúcej podmienky existencie lokálneho minima prenechávame na čitateľa.  $\spadesuit$

Ďalšie postačujúce podmienky existencie lokálneho extrému (ktoré — ako čitateľ z dôkazov zistí — zaručujú, že funkcia  $f'$  zmení v bode  $a$  znamienko) možno odvodiť z lemy .95 a dôsledku 1 z paragrafu .93.  $\spadesuit$

**.96 Veta.** *Nech funkcia  $f$  je  $n$ -krát ( $n \in \mathbf{N}$ ) diferencovateľná na niektorom okolí  $\mathcal{O}$  bodu  $a$  (tj.  $\mathcal{O} \subset D(f^{(m)})$ ) a má vlastnú alebo nevlastnú  $(n + 1)$ -vú deriváciu v bode  $a$  a nech*

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0, \quad f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Potom

- (a) *ak  $n + 1$  je párne a  $f^{(n+1)}(a) < 0$  (resp.  $f^{(n+1)}(a) > 0$ ), tak  $f$  má v bode  $a$  ostré lokálne maximum (resp. ostré lokálne minimum);*
- (b) *ak  $n + 1$  je nepárne, tak  $f$  nenadobúda v bode  $a$  lokálny extrém.*

<sup>93</sup>pri tom spojitosť funkcie  $f$  na intervaloch  $(a - \varepsilon, a]$  a  $[a, a + \varepsilon)$  (čo je jeden z predpokladov, ktoré — keďže vetu .92(b) používame na týchto intervaloch — treba splniť) vyplýva z nášho predpokladu  $O(a, \varepsilon) \subset D(f')$  (tj. z diferencovateľnosti funkcie  $f$  v každom bode  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ) a lemy .82(a)

**Dôkaz.** (a) Predpokladajme  $f^{(n+1)}(a) < 0$  (postup pre  $f^{(n+1)}(a) > 0$  je rovnaký). Podľa lemy .82(b) potom funkcia  $f^{(n)}$  v bode  $a$  klesá, preto — keďže podľa predpokladu je  $f^{(n)}(a) = 0$  — existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset \mathcal{O}$  a

$$(\forall x \in (a - \varepsilon, a))(f^{(n)}(x) > 0) ; \quad (139)$$

$$(\forall x \in (a, a + \varepsilon))(f^{(n)}(x) < 0) . \quad (140)$$

Z (139) a predpokladov

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0 \quad (141)$$

vyplýva podľa tvrdenia (b) dôsledku 1 z paragrafu .93 (pre  $c = a - \varepsilon$ ,  $d = a$  <sup>94</sup>), že — keďže  $n$  je nepárne — funkcia  $f$  rastie na  $[a - \varepsilon, a]$ .

Podobne možno z (141) a (140) odvodiť (ak pre  $c = a$ ,  $d = a + \varepsilon$  použijeme analógiu tvrdenia (a) dôsledku 1 z odseku .93, ktorá vznikne nahradením predpokladu (128) predpokladom (131)), že  $f$  klesá na intervale  $[a, a + \varepsilon]$ . Preto podľa lemy .95 má  $f$  v bode  $a$  ostré lokálne maximum.

(b) Rovnakými úvahami ako v časti (a) možno dokázať, že v prípade  $f^{(n+1)}(a) > 0$  (resp.  $f^{(n+1)}(a) < 0$ ) funkcia  $f$  rastie (resp. klesá) na niektorom okolí bodu  $a$ , a preto v tomto bode nemôže nadobúdať lokálny extrém.

### 13.3 Konvexnosť a konkávnosť. Inflexné body

**.97 Definícia.** Hovoríme, že funkcia  $f$  je *konvexná na intervale*  $I \subset D(f)$ , ak

$$(\forall x, y, z \in I, x < z < y) \left( f(z) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) \right) \quad (142)$$

(tj. ak na každom intervale  $[x, y] \subset I$  všetky body grafu funkcie  $f_1 := f|_{[x, y]}$  ležia pod alebo na spojnici krajných bodov tohto grafu <sup>95</sup>).

Definíciu funkcie *konkávnej*, resp. *rýdzo konvexnej*, resp. *rýdzo konkávnej na intervale*  $I$  dostaneme, ak v (142) nerovnosť  $\leq$  nahradíme postupne nerovnosťami  $\geq$ ,  $<$ ,  $>$ .

**Poznámky. 1a)** Každý vnútorný bod  $z$  intervalu  $[x, y]$  možno jednoznačne zapísať v tvare

$$z = x + q(y - x) , \quad (143)$$

kde  $q \in (0, 1)$ . Ak označíme  $p := 1 - q$ , bude mať (143) podobu

$$z = px + qy, \quad \text{kde } p, q \in (0, 1), p + q = 1 .$$

Výrok (142) môžeme potom prepísať <sup>96</sup> nasledovne

$$(\forall x, y \in I, x < y) (\forall p, q \in (0, 1), p + q = 1) (f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y)) . \quad (144)$$

**1b)** Aj v prípade  $y < x$  možno každý vnútorný bod  $z$  intervalu  $[y, x]$  zapísať jednoznačne v tvare  $z = px + qy$ , kde  $p, q \in (0, 1), p + q = 1$ . Ak zopakujeme úvahy z predchádzajúcej poznámky pre interval  $[y, x]$ , zistíme, že (144) zostane v platnosti, ak v ňom predpoklad  $x < y$  nahradíme predpokladom  $x > y$ ; preto (144) možno nahradiť výrokom

$$(\forall x, y \in I, x \neq y) (\forall p, q \in (0, 1), p + q = 1) (f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y)) . \quad (145)$$

<sup>94</sup>pritom spojitosť  $(n - 1)$ -vej derivácie (čo je jeden z predpokladov lemy .93) vyplýva z diferencovateľnosti funkcie  $f^{(n-1)}$  a lemy .82(a)

<sup>95</sup>táto spojnica je grafom lineárnej funkcie, ktorej predpisom je práve pravá strana nerovnosti (142)

<sup>96</sup>keďže

$$(px + qy) - x = (p - 1)x + qy = -qx + qy = q(y - x) ,$$

tak

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} ((px + qy) - x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (q(y - x)) = (f(y) - f(x))q ,$$

preto

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}((px + qy) - x) = f(x) + (f(y) - f(x))q = \\ &= pf(x) + qf(y) \end{aligned}$$

2. Úvahy z poznámok 1a) a 1b) možno zovšeobecniť úplnou indukciou, dostaneme tak toto tvrdenie.

LEMA (Jensenova nerovnosť). Ak funkcia  $f$  je konvexná na intervale  $I$ , tak pre každé  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , platí

$$\begin{aligned} & (\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I) (\forall p_1, p_2, \dots, p_n \in (0, 1); p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1) \\ & \left( f \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \right). \end{aligned} \quad (146)$$

Ak  $f$  je na  $I$  rýdzo konvexná, tak platí (146), pričom rovnosť nastane len pre  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

DŮKAZ. Nech  $f$  je rýdzo konvexná na  $I$  (postup v prípade konvexnej funkcie  $f$  je rovnaký). Označme  $V(n)$  výrok platí (146), pričom rovnosť nastane len pre  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  a dokazujeme indukciou.

DŮkaz tvrdenia  $V(2)$ , ktorý je založený na úvahách použitých v poznámkach 1a) a 1b), prenechávame na čitateľa. Predpokladajme teraz, že platí  $V(2), V(3), \dots, V(n)$ ; zvolíme  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$ , nech  $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1} \in (0, 1)$ ,  $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$ . Potom

$$\begin{aligned} f \left( \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i \right) &= f \left( p_1 x_1 + \dots + p_{n-1} x_{n-1} + (p_n + p_{n+1}) \left( \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1} \right) \right) \leq \\ &\stackrel{(1)}{\leq} p_1 f(x_1) + \dots + p_{n-1} f(x_{n-1}) + (p_n + p_{n+1}) f \left( \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1} \right) \leq \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \sum_{i=1}^{n-1} p_i f(x_i) + (p_n + p_{n+1}) \left( \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} f(x_n) + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} f(x_{n+1}) \right) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i), \end{aligned}$$

pričom nerovnosť (1) vyplýva z  $V(n)$ , v ktorom úlohu  $n$ -tíc  $[p_1, p_2, \dots, p_n]$  a  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  mali teraz  $n$ -tice  $[p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n + p_{n+1}]$  a  $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1}]$ , a (2) vyplýva z  $V(2)$ , kde v úlohe dvojíc  $[p_1, p_2]$  a  $[x_1, x_2]$  teraz boli  $[\frac{p_n}{p_n + p_{n+1}}, \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}}]$  a  $[x_n, x_{n+1}]$ .

Z  $V(n)$  tiež vyplýva, že na mieste nerovnosti (1) bude znak = len vtedy, keď

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1}, \quad (147)$$

podobne z  $V(2)$  vyplýva, že nerovnosť (2) možno nahradiť rovnosťou práve vtedy, keď

$$x_n = x_{n+1}. \quad (148)$$

Rovnosť

$$f \left( \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) \quad (149)$$

teda nastane práve vtedy, keď bude platiť (147) aj (148). Ak do (147) dosadíme  $x_{n+1} = x_n$ , dostaneme

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n,$$

odtiaľ a z (148) potom vyplýva, že (149) platí len v prípade  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}$ .

**.98 Veta.** Nech spojitá funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná v každom vnútornom bode intervalu  $I$ <sup>97</sup>. Ak funkcia  $f'$  je rastúca, resp. klesajúca, resp. neklesajúca, resp. nerastúca na int  $I$ , tak  $f$  je na  $I$  rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna, resp. konvexná, resp. konkávna.

**DŮkaz.** Predpokladajme, že  $f'$  je neklesajúca na int  $I$  (dŮkaz v ostatných prípadoch je rovnaký). Dokážeme, že platí (144). Zvolme teda  $x, y \in I$ ,  $x < y$ ,  $p, q \in (0, 1)$ ,  $p + q = 1$  a označme

$$V := pf(x) + qf(y) - f(px + qy).$$

Naším cieľom je dokázať nerovnosť  $V \geq 0$ .

Platí

$$V = pf(x) + qf(y) - (p + q)f(px + qy) = q[f(y) - f(px + qy)] - p[f(px + qy) - f(x)]. \quad (150)$$

<sup>97</sup>teda pre definičný obor  $D(f')$  derivácie funkcie  $f$  iste platí int  $I \subset D(f')$

Na vyjadrenie rozdielu funkčných hodnôt v prvej a j druhej hranatej zátvorke použijeme teraz Lagrangeovu vetu (odsek .90) o strednej hodnote (najprv na intervale  $[z, y]$ , kde  $z := px + qy$ , potom na intervale  $[x, z]$ ; oprávnenie k použitiu tejto vety dávajú predpoklady nášho tvrdenia). Existujú teda  $c_1 \in (z, y)$ ,  $c_2 \in (x, z)$  tak, že

$$\begin{aligned} f(y) - f(px + qy) &= f'(c_1)[y - (px + qy)] = f'(c_1)[(1 - q)y - px] = f'(c_1)p(y - x), \\ f(px + qy) - f(x) &= f'(c_2)[(px + qy) - x] = f'(c_2)q(y - x). \end{aligned}$$

Po dosadení týchto vyjadrení do (150) dostaneme

$$V = pqf'(c_1)(y - x) - pqf'(c_2)(y - x) = pq(y - x)(f'(c_1) - f'(c_2)). \quad (151)$$

Pretože  $c_2 \in (x, z)$ ,  $c_1 \in (z, y)$ , je  $c_2 < c_1$ ; z predpokladu, že  $f'$  je na int  $I$  neklesajúca, potom vyplýva nerovnosť  $f'(c_2) \leq f'(c_1)$ , tj.

$$f'(c_1) - f'(c_2) \geq 0. \quad (152)$$

Z (151), (152) a nerovností  $y > x$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$  už vyplýva, že  $V \geq 0$ , čo sme chceli dokázať. ♠

Postačujúce podmienky pre monotónnosť funkcie  $f'$  vyplývajú z vety .92, z nej a z predchádzajúceho tvrdenia možno odvodiť nasledujúci dôsledok.

**Dôsledok.** *Nech spojité funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je dvakrát diferencovateľná v každom vnútornom bode intervalu  $I$ . Ak pre všetky  $x \in \text{int } I$  platí  $f''(x) > 0$ , resp.  $f''(x) < 0$ , resp.  $f''(x) \geq 0$ , resp.  $f''(x) \leq 0$ , je  $f$  na intervale  $I$  rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna, resp. konvexná, resp. konkávna.*

**Príklad. 1a)** Dokážeme teraz nerovnosť

$$(\forall x, y > 0, x \neq y) \left( (x + y) \ln \left( \frac{x + y}{2} \right) < x \ln x + y \ln y \right), \quad (153)$$

ktorú využijeme v časti 1b).

Nech  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia s predpisom  $f(x) = x \ln x$ , potom

$$f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x},$$

preto

$$(\forall x \in (0, \infty)) (f''(x) > 0),$$

funkcia  $f$  je teda podľa vety .98 rýdzo konvexná.

Zvoľme  $x, y > 0$ ,  $x \neq y$ ; pre  $p = q = \frac{1}{2}$  potom z (145), kde (pretože naša funkcia  $f$  je rýdzo konvexná) namiesto neostrej nerovnosti  $\leq$  píšeme  $<$ , vyplýva

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x) + f(y)),$$

tj.

$$\left(\frac{x + y}{2}\right) \ln \left(\frac{x + y}{2}\right) < \frac{1}{2}(x \ln x + y \ln y),$$

odtiaľ už vyplýva nerovnosť (153).

**1b)** Nech  $a, b$  sú kladné čísla, nech  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . *Priemerom rádu  $x$  z čísel  $a, b$  nazveme číslo*

$$s(x) := \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(špeciálne pre  $x = 1$  dostávame aritmetický a pre  $x = -1$  harmonický priemer). Dokážeme, že

$$s(0) := \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \sqrt{ab} \quad (154)$$

(tj. funkciu  $s$  možno spojitely dedefinovať v bode 0, pričom hodnotou  $s(0)$  bude geometrický priemer čísel  $a, b$ );

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \min\{a, b\}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = \max\{a, b\}, \quad (155)$$

a napokon, že pre  $a \neq b$  je funkcia  $s$  (ktorú už chápeme ako spojitely dedefinovanú v bode 0) rastúca na  $\mathbf{R}$  (zrejme pre  $a = b$  je funkcia  $s$  konštantná,  $s(x) \equiv a$ ). Jednoduchým dôsledkom našich úvah bude známa nerovnosť medzi harmonickým, geometrickým a aritmetickým priemerom, ktorá má v prípade  $a, b > 0$ ,  $a \neq b$ , podobu

$$s(-1) < s(0) < s(1),$$

tj.

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Dokážme najprv (154): pre  $x \neq 0$  platí

$$s(x) = e^{\sigma(x)}, \quad \text{kde} \quad \sigma(x) = \frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right), \quad (156)$$

prítom

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sigma(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \ln \left[ 1 + \left( \frac{a^x - 1}{2} + \frac{b^x - 1}{2} \right) \right] \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln \left[ 1 + \left( \frac{a^x - 1}{2} + \frac{b^x - 1}{2} \right) \right]}{\left( \frac{a^x - 1}{2} + \frac{b^x - 1}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} \right) \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \\ &= \ln \sqrt{ab} \end{aligned}$$

(výpočet sme založili na poznámke z odseku .35), preto podľa vety o limite zloženej funkcie <sup>98</sup>

$$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sigma(x)} = | \sigma(x) = t | = \lim_{t \rightarrow \ln \sqrt{ab}} e^t = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab},$$

čím je rovnosť (154) dokázaná.

V našich ďalších úvahách predpokladajme, že  $a \leq b$  (postup pre  $a \geq b$  by bol rovnaký <sup>99</sup>) a pokračujme dôkazom tvrdenia (155). Platí

$$\left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) = \left[ b^x \left( \left( \frac{a}{b} \right)^x + 1 \right) \right]^{\frac{1}{x}} = b \left( 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}},$$

prítom — keďže  $\frac{a}{b} \in (0, 1]$  — je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{b} \right)^x = 0$ , preto (opäť podľa vety o limite zloženej funkcie, resp. podľa poznámky z odseku .35)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^x \right)}{\left( \frac{a}{b} \right)^x} \left( \frac{a}{b} \right)^x \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

z týchto výpočtov vyplýva

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( b \cdot e^{\ln \left( 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}}} \right) = b \cdot e^0 = b = \max\{a, b\},$$

čím je prvá rovnosť z (155) dokázaná. Dôkaz druhej rovnosti je podobný.

Dokážme teraz, že pre  $a \neq b$  — tj. (keďže predpokladáme, že  $a \leq b$ ) pre  $a < b$  — pre  $a < b$ ; je funkcia  $s$  (spojite dodefinovaná v bode 0) rastúca na  $(-\infty, 0]$  a na  $[0, \infty)$ , odtiaľ už bude zrejmé vyplývať, že  $s$  rastie na  $\mathbf{R}$ . Podľa vety .92(b) stačí dokázať, že pre všetky  $x \neq 0$  je  $s'(x) > 0$ . Z rovnosti (156) podľa vety o derivácii zloženej funkcie dostávame

$$s'(x) = e^{\sigma(x)} \sigma'(x) \quad \text{pre} \quad x \neq 0; \quad (157)$$

prítom (podľa viet o derivácii podielu a zloženej funkcie)

$$\sigma'(x) = \frac{\frac{1}{a^x + b^x} \frac{1}{2} (a^x \ln a + b^x \ln b) - \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)}{x^2} = \frac{a^x \ln a + b^x \ln b - (a^x + b^x) \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)}{x^2 (a^x + b^x)} > 0,$$

posledná nerovnosť vyplýva z (153) (kde sme dvojicu  $[x, y]$  nahradili dvojicou  $[a^x, b^x]$ ; z nášho predpokladu  $a < b$  vyplýva nerovnosť  $a^x \neq b^x$  pre  $x \neq 0$ ). Z nerovnosti  $\sigma'(x) > 0$  pre  $x \neq 0$  vyplýva už podľa (157) nerovnosť  $s'(x) > 0$  pre  $x \neq 0$ , ktorú sme chceli dokázať.

**1c)** Zopakovaním myšlienok z častí 1a) a 1b) možno dokázať toto tvrdenie:

Nech  $a_1, \dots, a_n$  sú kladné čísla, nech pre  $p_1, \dots, p_n \in (0, 1)$  platí  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Pre  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  označme

$$s(x) = \left( \sum_{i=1}^n p_i a_i^x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

<sup>98</sup>oprávnenie k jej použitiu dáva splnenie podmienky (c) (pozri vetu .12(a))

<sup>99</sup>alebo trochu inak: keďže z dvoch reálnych čísel musí byť jedno menšie alebo najvyššie rovné druhému, zvolíme označenie tak, aby platilo  $a \leq b$ ; takáto úvaha sa spravidla vyjadruje formuláciou *bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $a \leq b$*



Potom

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n};$$

(2) ak  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ , je funkcia  $s$  (spojite dodefinovaná v bode 0) konštantná na  $\mathbf{R}$ ; ak pre niektoré  $i \neq j$  platí  $a_i \neq a_j$ , tak funkcia  $s$  (spojite dodefinovaná v bode 0) je rastúca.

Ak v tomto tvrdení zvolíme špeciálne  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ , bude opäť  $s(-1)$  harmonický,  $s(0)$  geometrický a  $s(1)$  aritmetický priemer čísel  $a_1, \dots, a_n$  a z tvrdenia (2) bude vyplývať nerovnosť

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \quad \text{pre } a_1, a_2, \dots, a_n > 0, \quad (158)$$

pričom v uvedenom vzťahu platia rovnosti len v prípade  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

2. Uvedme ešte jeden dôkaz nerovností (158). Keďže  $\ln$  je rýdzo konkávna funkcia (pre všetky  $x > 0$  totiž platí  $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ), vyplýva z Jensenovej nerovnosti z paragrafu .97 (kde zvolíme  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ ) nerovnosť

$$\ln \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n = \ln \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, \quad (159)$$

pričom nerovnosť  $\geq$  možno nahradiť rovnosťou len v prípade  $a_1 = \dots = a_n$ . Z (159) potom (keďže  $e^x$  je rastúca funkcia) vyplýva

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = e^{\ln \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)} \geq e^{\ln \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

pričom rovnosť  $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$  platí len pre  $a_1 = \dots = a_n$ .

Dôkaz prvej nerovnosti v (158) je podobný; z rýdzej konkávnosti funkcie  $\ln$  vyplýva

$$\ln \left( \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{a_n} = \ln \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \dots a_n}},$$

preto

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}},$$

odtiaľ (keďže z nerovností  $a \geq b > 0$  vyplýva  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ ) dostávame

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

pričom rovnosť opäť platí len pre  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . ♠

Nasledujúce úvahy vyslovíme len pre rýdzo konvexné funkcie, formuláciu (a dôkaz) pre prípad rýdzo konkávných, resp. konvexných a konkávných funkcií prenechávame na čitateľa.

**.99 Lema.** Nech funkcia  $f$  je rýdzo konvexná na intervale  $I$ . Potom funkcia  $F_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  daná predpisom

$$F_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

je rastúca.

**Dôkaz.** (-: Toto tvrdenie možno ľahko vydedukovať z geometrickej interpretácie rýdzej konvexnosti:

- ak  $a < x < y$ , leží bod  $X := [x, f(x)]$  pod spojnicou bodov  $A := [a, f(a)]$  a  $Y := [y, f(y)]$ , preto smernica priamky  $AX$  (ktorou je práve číslo  $F_a(x)$ ) je menšia než smernica priamky  $AY$ ;
- úvaha v prípade  $x < y < a$  je obdobná;
- ak  $x < a < y$ , leží bod  $A$  pod spojnicou bodov  $X$  a  $Y$ , preto opäť smernica priamky  $XA$  musí byť menšia než smernica priamky  $AY$ . :-)

Ak  $x, y \in I$ ,  $a < x < y$ , vyplýva z definície rýdzej konvexnosti nerovnosť

$$f(x) < f(a) + \frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a),$$

z ktorej dostávame

$$f(x) - f(a) < \frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a),$$

a — keďže  $x - a > 0$  — platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(a)}{y - a},$$

tj.

$$F_a(x) < F_a(y).$$

V prípade  $x < y < a$  je postup rovnaký.

Ak  $x < a < y$ , vyplýva opäť z definície rýdzej konvexnosti nerovnosť

$$f(a) < f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(a - x),$$

z ktorej postupnými úpravami dostaneme

$$f(a) - f(x) < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(a - x),$$

$$(f(a) - f(x))(y - x) < (f(y) - f(x))(a - x); \quad (160)$$

ak teraz do (160) dosadíme podľa rovnosti

$$y - x = (y - a) + (a - x),$$

$$(f(y) - f(x)) = (f(y) - f(a)) + (f(a) - f(x)),$$

dostaneme

$$(f(a) - f(x))(y - a) + (f(a) - f(x))(a - x) < (f(y) - f(a))(a - x) + (f(a) - f(x))(a - x)$$

a po odčítaní výrazu  $(f(a) - f(x))(a - x)$  od oboch strán máme

$$(f(a) - f(x))(y - a) < (f(y) - f(a))(a - x),$$

tj.

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} < \frac{f(y) - f(a)}{y - a},$$

čo je dokazovaná nerovnosť

$$F_a(x) < F_a(y).$$

**Veta.** (a) *Nech funkcia  $f$  je rýdzo konvexná na intervale  $I$ . Potom  $f$  má v každom vnútornom bode  $a$  intervalu  $I$  konečné jednostranné derivácie, pričom*

$$f'_-(a) \leq f'_+(a) \quad (161)$$

a platí

$$(\forall x \in I, x < a)(f(x) > f(a) + f'_-(a)(x - a)), \quad (162)$$

$$(\forall x \in I, x > a)(f(x) > f(a) + f'_+(a)(x - a)), \quad (163)$$

(tj. „napravo“ (resp. „naľavo“) od  $a$  leží graf funkcie  $f$  nad dotyčnicou ku grafu  $f$  v bode  $a$  sprava (resp. zľava); špeciálne, ak pre  $x \in \text{int } I$  existuje  $f'(a)$ , ležia body grafu funkcie  $f$  zodpovedajúce hodnotám  $x \neq a$  nad dotyčnicou v bode  $a$ ).

*Funkcie  $f'_-$  a  $f'_+$  sú na  $\text{int } I$  rastúce a platí*

$$(\forall a, b \in \text{int } I, b < a)(f'_+(b) < f'_-(a)). \quad (164)$$

(b) *Ak funkcia  $f$  je na intervale  $I$  rýdzo konvexná, tak množina  $M$  tých bodov  $x \in I$ , v ktorých  $f$  nie je diferencovateľná, je najviac spočítateľná.*

(c) *Nech funkcia  $f : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná v každom bode  $a \in (c, d)$ , pričom*

$$(\forall x \in (c, d), x \neq a)(f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)) \quad (165)$$

(tj. nech pre každý bod  $a \in (c, d)$  platí, že body grafu funkcie  $f$  zodpovedajúce hodnotám  $x \neq a$  ležia nad dotyčnicou ku grafu funkcie  $f$  v bode  $a$ ).

*Potom  $f$  je rýdzo konvexná funkcia.*

**Dôkaz.** (a) Podľa predchádzajúcej lemy je funkcia  $F_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , rastúca, preto podľa tvrdenia z poznámky 1 v odseku .31 existujú konečné  $\lim_{x \rightarrow a^-} F_a(x) = f'_-(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} F_a(x) = f'_+(a)$  a platí  $f'_-(a) \leq f'_+(a)$ .

Podľa poznámky 2 z odseku .31 je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = F_a(x) < \lim_{y \rightarrow a^-} F_a(y) = f'_-(a) \quad \text{pre } x \in I, x < a,$$

tj.

$$(\forall x \in I, x < a) \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_-(a) \right),$$

z tejto nerovnosti už vyplýva (162). Dôkaz nerovnosti (163) je obdobný.

Dokážme teraz (164). Nech  $a, b \in \text{int } I$ ,  $b < a$ ; zvolme  $z \in (b, a)$ .

(-: Nasledujúce úvahy majú opäť jednoduchú geometrickú interpretáciu. Označme  $A := [a, f(a)]$ ,  $B := [b, f(b)]$ ,  $Z := [z, f(z)]$ ; keďže  $f$  je rýdzo konvexná funkcia a  $b < z < a$ , je smernica  $s_{BZ}$  priamky  $BZ$  menšia než smernica  $s_{ZA}$  priamky  $ZA$ ; smernica  $s_{B+}$  dotýčnice v bode  $B$  sprava je ale menšia než  $s_{BZ}$  (to je geometrický obsah tvrdenia (162)), smernica  $s_{ZA}$  je naopak menšia než smernica  $s_{A-}$  dotýčnice v bode  $A$  zľava (pozri (163)) a tá je podľa (161) menšia alebo rovná smernici  $s_{A+}$  dotýčnice v bode  $A$  sprava, teda

$$s_{B+} < s_{BZ} < s_{ZA} < s_{A-} \leq s_{A+}. \quad \text{: -)}$$

Z rýdzej konvexnosti funkcie  $f$  vyplýva (pozri dôkaz lemy pre prípad  $x < a < y$ , v ktorom trojicu  $[x, a, y]$  nahradíme trojicou  $[b, z, a]$ )

$$\frac{f(z) - f(b)}{z - b} < \frac{f(a) - f(z)}{a - z}. \quad (166)$$

Z (162) (kde namiesto dvojice  $[a, x]$  teraz uvažujeme dvojicu  $[b, z]$ ) vyplýva

$$\frac{f(z) - f(b)}{z - b} > f'_+(b), \quad (167)$$

podobne podľa (163) (pre  $x = z$ ) platí

$$\frac{f(a) - f(z)}{a - z} < f'_-(a). \quad (168)$$

Z (167), (166) a (168) potom vyplýva

$$f'_+(b) < \frac{f(z) - f(b)}{z - b} < \frac{f(a) - f(z)}{a - z} < f'_-(a),$$

čím je nerovnosť (164) dokázaná.

Podľa (161) platí

$$f'_-(b) \leq f'_+(b), \quad f'_-(a) \leq f'_+(a),$$

odtiaľ a z (164) dostávame

$$f'_-(b) \leq f'_+(b) < f'_-(a) \leq f'_+(a),$$

z týchto nerovností už vyplýva, že funkcie  $f'_-$  a  $f'_+$  rastú na  $\text{int } I$ .

(b) Stačí dokázať, že množina  $M_1$  tých  $x \in \text{int } I$ , v ktorých funkcia  $f$  nie je diferencovateľná, je najviac spočítateľná (množina  $M$  je totiž zjednotením  $M_1$  s najviac dvojprvkovou množinou). Náš dôkaz bude založený na tomto pomocnom tvrdení.

LEMA. Ak funkcia  $f$  je rýdzo konvexná na intervale  $I$  a funkcia  $f'_-$  je spojitá v bode  $a \in \text{int } I$ , tak  $f$  je v bode  $a$  diferencovateľná.

DÔKAZ. Podľa (161) a (164) (kde dvojicu  $[b, a]$  nahradíme dvojicou  $[a, x]$ ) platí

$$(\forall x \in \text{int } I, x > a) (f'_-(a) \leq f'_+(a) \leq f'_-(x)). \quad (169)$$

Pretože  $f'_-$  je podľa predpokladu spojitá v bode  $a$ , je

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'_-(x) = f'_-(a).$$

Keďže  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'_-(a) = f'_-(a)$  a  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'_+(a) = f'_+(a)$ , vyplýva z nerovností (169) podľa vety .24

$$f'_-(a) \leq f'_+(a) \leq f'_-(a),$$

tj.

$$f'_-(a) = f'_+(a),$$

čo znamená (tvrdenie (c) poznámky v odstavci .81), že  $f$  je v bode  $a$  diferencovateľná.  $\triangle$

Z tejto lemy vyplýva inklúzia  $M_1 \subset \mathcal{N}$ , kde  $\mathcal{N}$  je množina všetkých bodov nespojitosti funkcie  $g := f'_-|_{\text{int } I}$ . Keďže  $g$  je rastúca funkcia, je  $\mathcal{N}$  spočítateľná množina (časť (b) príkladu .58).

(c) (-: Presvedčenie o správnosti tohto tvrdenia možno opäť získať z geometrickej interpretácie: Ak  $y, a, z \in I$ ,  $y < a < z$ , a  $Y := [y, f(y)]$ ,  $A := [a, f(a)]$ ,  $Z := [z, f(z)]$ , tak bod  $A$  leží na dotyčnici ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A$  a body  $Y$  a  $Z$  ležia nad touto dotyčnicou, preto  $A$  musí ležať pod spojnicou bodov  $Y$  a  $Z$ . :-)

Chceme dokázať tvrdenie (pozri definíciu rýdzej konvexnosti)

$$(\forall y, a, z \in I, y < a < z) \left( f(a) < f(y) + \frac{f(z) - f(y)}{z - y}(a - y) \right),$$

tj. <sup>100</sup>

$$(\forall y, a, z \in I, y < a < z) \left( f(a) < \frac{z - a}{z - y}f(y) + \frac{a - y}{z - y}f(z) \right). \quad (170)$$

Zvoľme teda  $y, a, z \in I, y < a < z$ , potom iste platí  $a \in \text{int } I$  a z (165) vyplýva (ak za  $x$  zvolíme najprv  $y$  a potom  $z$ )

$$\begin{aligned} f(y) &> f(a) + f'(a)(y - a), \\ f(z) &> f(a) + f'(a)(z - a). \end{aligned}$$

Ak prvú z týchto nerovností vynásobíme kladným číslom  $\frac{z-a}{z-y}$  a druhú kladným číslom  $\frac{a-y}{z-y}$  a získané nerovnosti sčítame, dostaneme nerovnosť z (170).

**Dôsledok 1.** Ak  $f$  je rýdzo konvexná funkcia definovaná na intervale  $I$ , tak  $f$  je spojitá v každom vnútornom bode tohto intervalu.

**Dôkaz.** Nech  $a$  je vnútorný bod intervalu  $I$ , potom funkcie  $f_+ := f|_{I \cap [a, \infty)}$  a  $f_- := f|_{I \cap (-\infty, a]}$  sú podľa tvrdenia (a) predchádzajúcej vety diferencovateľné v bode  $a$ , preto (lema .82(a))

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \left( = \lim_{x \rightarrow a} f_+(x) \right) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a);$$

tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

a funkcia  $f$  je teda v bode  $a$  spojitá (tvrdenie (b) lemy z paragrafu .53).

(Pre záujemcov uvádzame ešte jeden dôkaz neodvolávajúci sa na predchádzajúcu vetu.

Nech  $a$  je vnútorný bod intervalu  $I$ ; zvolíme  $\varepsilon > 0$  tak, aby pre body  $b := a - \varepsilon, c := a + \varepsilon$  platilo  $b, c \in I$  (to sa dá, pretože  $a$  je vnútorný bod intervalu  $I$ ).

Nech

$$f(x) = g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a), \quad h(x) = g(a) + \frac{g(c) - g(a)}{c - a}(x - a).$$

:-) Z geometrickej interpretácie rýdzej konvexnosti vyplýva, že na intervale  $[b, c]$  leží graf funkcie  $g$  medzi spojnicou bodov  $(a, g(a))$  a  $(b, g(b))$  (ktorá je grafom funkcie  $f$ ) a priamkou spájajúcou bod  $(a, f(a))$  s bodom  $(c, g(c))$  (čo je graf funkcie  $h$ ). (-:

Pre  $x \in [a, c]$  platí  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , z vety .25 potom vyplýva <sup>101</sup> – keďže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g(a)$  – rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$ , rovnako možno dokázať aj rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = g(a)$ . )

**Dôsledok 2.** Nech  $f : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná funkcia. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (a) funkcia  $f$  je rýdzo konvexná;
- (b) funkcia  $f'$  je rastúca;
- (c) pre každé  $a \in (c, d)$  platí (165).

**.100 Definícia.** Hovoríme, že bod  $a \in \mathbf{R}$  je *inflexný bod funkcie*  $f$ , ak existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset D(f)$ , pričom funkcia  $f$  má v bode  $a$  vlastnú alebo nevlastnú deriváciu a je rýdzo konvexná na jednom z intervalov  $(a - \varepsilon, a]$ ,  $[a, a + \varepsilon)$  a rýdzo konkávna na druhom z nich.  $\triangle$

<sup>100</sup>pretože

$$f(y) + \frac{f(z) - f(y)}{z - y}(a - y) = f(y) \left( 1 - \frac{a - y}{z - y} \right) + f(z) \frac{a - y}{z - y} = f(y) \frac{z - a}{z - y} + f(z) \frac{a - y}{z - y}$$

<sup>101</sup>Keďže používame “jednostrannú verziu” uvedenej vety, zopakujme pre istotu ešte raz štandardné úvahy umožňujúce aplikáciu viet o limitách v prípade jednostranných limit: označíme  $I_+ := I \cap [a, \infty)$ ,  $f_1 := f|_{I_+}$ ,  $g_1 := g|_{I_+}$ ,  $h_1 := h|_{I_+}$ . Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g(a)$ , platí aj  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} h_1(x) = g(a)$  (lema .11(a)), funkcie  $f_1, g_1, h_1$  teda spĺňajú predpoklady vety .25 (pre  $M = I_+, \mathcal{P} = (b, c) \setminus \{a\}$ ), podľa ktorej  $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = g(a)$ , podľa definície limity sprava to znamená, že  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$ .

Z vety .98 vyplýva toto tvrdenie:

Nech funkcia  $g : I \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná v každom vnútornom bode intervalu  $I$ . Ak  $a \in \text{int } I$ , pričom existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset I$  a funkcia  $g'$  rastie na jednom z intervalov  $(a - \varepsilon, a]$ ,  $[a, a + \varepsilon)$  a klesá na druhom z nich, tak  $a$  je inflexný bod funkcie  $g$ .

Postačujúce podmienky na to, aby funkcia rástla na jednom z intervalov  $(a - \varepsilon, a]$ ,  $[a, a + \varepsilon)$  a klesala na druhom z nich, sú sformulované v dôsledku 1 z odseku .95 a tvrdení (a) vety .96; tvrdenie (b) tejto vety stanovuje postačujúcu podmienku na to, aby funkcia na  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  rástla, resp. klesala. Ak uvedené tvrdenia prepíšeme pre prípad  $f = g'$ , dostaneme nasledujúcu vetu.

**Veta.** (a) Ak funkcia  $g''$  zmení v bode  $a$  znamienko <sup>102</sup>, tak  $a$  je inflexný bod funkcie  $g$ .

(b) Nech funkcia  $g$  je  $(n + 1)$ -krát ( $n \in \mathbf{N}$ ) diferencovateľná na niektorom okolí  $\mathcal{O}$  bodu  $a$  a má v bode  $a$  vlastnú alebo nevlastnú  $(n + 2)$ -hú deriváciu, pričom

$$g''(a) = g'''(a) = \dots = g^{(n+1)}(a) = 0, \quad g^{(n+2)}(a) \neq 0.$$

Potom  $a$  je inflexný bod funkcie  $g$  práve vtedy, keď  $n$  je nepárne.

## 14 L'Hospitalovo pravidlo

.101 Pasáž o l'Hospitalovom pravidle, ktoré umožňuje za istých predpokladov previesť výpočet neurčitého výrazu  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  typu  $\frac{0}{0}$  alebo  $\frac{\infty}{\infty}$  na výpočet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , uveďme jednoduchou lemov, ktorú v blízkej budúcnosti využijeme a ktorá dokumentuje, že môže existovať vzťah medzi  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  a podielom  $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ .

LEMA. Nech funkcie  $f, g$  definované na množine  $M$  sú diferencovateľné v bode  $a \in M$ , pričom  $f(a) = g(a) = 0$  a  $g'(a) \neq 0$ . Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

DŮKAZ. Toto tvrdenie vyplýva z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(ako je zrejmé, predpoklad  $f(a) = g(a) = 0$  sme využili hneď v prvej z uvedených rovností, podmienka  $g'(a) \neq 0$  nám umožnila v poslednej rovnosti použiť vetu o limite podielu). ♠

Sformulujeme teraz prvé l'Hospitalovo pravidlo, umožňujúce v istých situáciách výpočet limit neurčitých výrazov typu  $\frac{0}{0}$ .

.102 **Veta** (prvé l'Hospitalovo pravidlo). Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod intervalu  $I$ , nech diferencovateľné funkcie  $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  spĺňajú nasledujúce predpoklady:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ;
- (ii)  $(\forall x \in I \setminus \{a\})(g(x) \neq 0)$ ;
- (iii)  $(\forall x \in I \setminus \{a\})(g'(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0)$ .

Potom platí: ak existuje (vlastná alebo nevlastná)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , tak existuje aj  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (171)$$

**Poznámka.** Zrejme uvedená formulácia zahŕňa prípad jednostranných limit (ak  $a \in \mathbf{R}$  je krajný bod intervalu  $I$ , resp.  $a = \infty$  alebo  $a = -\infty$ ) aj obojstranných limit (ak  $a$  je vnútorný bod intervalu  $I$ ).

<sup>102</sup>tj. ak existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $O(a, \varepsilon) \subset D(g'')$ , pričom na jednom z intervalov  $(a - \varepsilon, a)$ ,  $(a, a + \varepsilon)$  nadobúda funkcia  $g''$  len kladné a na druhom z nich len záporné hodnoty

<sup>103</sup>keďže funkcie  $f, g$  sú v bode  $a$  diferencovateľné a  $f(a) = g(a) = 0$ , platí aj rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , teda  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  je neurčitým výrazom typu  $\frac{0}{0}$

**Dôkaz** je v prípade  $a \in \mathbf{R}$  založený na Cauchyho vete o strednej hodnote (pozri rovnosť (122) vo vete .91; jej použitie umožňujú predpoklady (ii) a (iii) nášho tvrdenia). Funkcie  $F, G : I \rightarrow \mathbf{R}$  dané predpisom

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in I \setminus \{a\} \\ 0, & \text{ak } x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ak } x \in I \setminus \{a\} \\ 0, & \text{ak } x = a \end{cases}$$

(tj. funkcie  $f$  a  $g$  spojitě dodefinované v bode  $a$ ) spĺňajú predpoklady vety .91 na každom uzavretom intervale s koncovými bodmi  $a, x$ , kde  $x \in I \setminus \{a\}$ ; preto (keďže  $F(a) = G(a) = 0$ )

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (172)$$

pričom  $c$  "leží medzi  $x$  a  $a$ ".

Nech  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}^*$ ; keďže chceme dokázať rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ , zvolíme okolie  $\mathcal{O}$  bodu  $L$  a hľadáme prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  tak, aby platilo

$$(\forall x \in \mathcal{P}_1 \cap I) \left( \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{O} \right). \quad (173)$$

Pretože  $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , k okoliu  $\mathcal{O}$  iste existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}_1$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall c \in \mathcal{P}_1 \cap D) \left( \frac{f'(c)}{g'(c)} \in \mathcal{O} \right), \quad (174)$$

kde  $D \subset I$  je definičný obor funkcie  $\frac{f'}{g'}$ . Ukážeme, že toto  $\mathcal{P}_1$  vyhovuje našim požiadavkám. Podľa (172) je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (175)$$

pre niektoré  $c$  "medzi  $x$  a  $a$ ", pre  $x$  a  $c$  vystupujúce v (175) teda platí implikácia

$$x \in \mathcal{P}_1 \cap I \implies c \in \mathcal{P}_1 \cap D \quad (176)$$

(pričom inklúzia  $c \in D$  vyplýva zo znenia vety .91). Tvrdenie (173) teraz vyplýva z (176), (175) a (174).  $\triangle$

Zostáva dokázať naše tvrdenie ešte pre  $a = \infty$  a  $a = -\infty$ . V prípade  $a = \infty$  na výpočet  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  použijeme substitúciu  $x = \frac{1}{t}$  a už dokázanú verziu prvého l'Hospitalovho pravidla v bode 0 (postup pre  $a = -\infty$  je rovnaký):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left| x = \frac{1}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \stackrel{l'Hosp}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \left| t = \frac{1}{x} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

(podrobné zdôvodnenie správnosti jednotlivých krokov prenechávame na čitateľa).  $\spadesuit$

Na výpočet limit neurčitých výrazov typu  $\frac{\infty}{\infty}$  možno za istých predpokladov použiť druhé l'Hospitalovo pravidlo.

**.103 Veta** (druhé l'Hospitalovo pravidlo). *Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod intervalu  $I$ , nech diferencovateľné funkcie  $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  spĺňajú predpoklady*

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty;$$

$$(ii) (\forall x \in I \setminus \{a\}) (g'(x) = 0 \implies f'(x) \neq 0).$$

*Potom platí: ak existuje (vlastná alebo nevlastná)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , tak existuje aj  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  a*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Dôkaz** urobíme pre prípad  $a \in \mathbf{R}$  je ľavý koncový bod intervalu  $I$  alebo  $a = -\infty$  (v tomto prípade budeme teda z existencie jednostrannej limity  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  odvodzovať existenciu limity  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ ); dôkaz v prípade, že  $a \in \mathbf{R}$  je pravý koncový bod intervalu  $I$  alebo  $a = \infty$ , je rovnaký; ak  $a \in \mathbf{R}$  je vnútorný bod intervalu  $I$ , je rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  dôsledkom rovností  $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , ktoré vyplývajú z už dokázaných jednostranných verzií našej vety, a rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , ktorá vyplýva z predpokladu existencie limity  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .  $\triangle$

Nech teda  $a \in \mathbf{R}$  je ľavý koncový bod intervalu  $I$  alebo  $a = -\infty$ . Keďže podľa predpokladu (i) je  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ , existuje prstencové okolie  $\mathcal{T}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{T} \cap I)(g(x) \neq 0). \quad (177)$$

Z (177) a predpokladu (ii) vyplýva, že na každom uzavretom intervale s koncovými bodmi  $x$  a  $x_1$ , kde  $x \neq x_1$  a  $x, x_1 \in \mathcal{T} \cap I$ , môžeme použiť Cauchyho vetu o strednej hodnote<sup>104</sup>, podľa ktorej existuje  $c$  ležiace "medzi  $x$  a  $x_1$ " tak, že

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (178)$$

odtiaľ a z rovnosti

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \left(1 + \frac{g(x)}{g(x_1)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}$$

potom dostávame, že pre každé  $x, x_1 \in \mathcal{T} \cap I$ ,  $x \neq x_1$ , existuje  $c$  ležiace "medzi  $x$  a  $x_1$ ", pre ktoré platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}. \quad (179)$$

Predpokladajme najprv, že  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$  a dokazujeme rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

(-: Náš postup bude nasledujúci: pre  $x$  a  $x_1$  ležiace blízko k  $a$  leží aj  $c$  blízko k  $a$ , a keďže  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , líši sa výraz  $\frac{f'(c)}{g'(c)}$  málo od  $L$ ; ak teraz zvolíme  $x_1$  pevné, vyplýva z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x_1)}{g(x)}$  (tie sú dôsledkom rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ ), že pre  $x$  ležiace blízko k  $a$  sa výraz  $\left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)$  líši málo od čísla 1 a podiel  $\frac{f(x_1)}{g(x)}$  málo od nuly, a teda pre takéto  $x$  pravá strana rovnosti (179) leží blízko k číslu  $L$ . :-)

Zvoľme teda  $\varepsilon$ -okolie čísla  $L$  a hľadáme prstencové okolie  $\mathcal{U}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{U} \cap I) \left(L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon\right).$$

Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall c \in \mathcal{P} \cap D) \left(L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c)}{g'(c)} < L + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (180)$$

kde  $D \subset I$  je definičný obor funkcie  $\frac{f'}{g'}$ . Vyberme  $x_1 \in \mathcal{P}$  pevne; pretože  $c$  vystupujúce v (178) leží "medzi  $x$  a  $x_1$ ", platí implikácia

$$x, x_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I \implies c \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap D \subset \mathcal{P} \cap D \quad (181)$$

(pritom inklúzia  $c \in D$  vyplýva zo znenia Cauchyho vetu o strednej hodnote; pripomeňme tiež, že (178) platí pre  $x, x_1 \in \mathcal{T} \cap I$ ). Z (178), (181) a (180) dostávame

$$(\forall x \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I) \left(L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} < L + \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (182)$$

<sup>104</sup>keby  $a$  bol vnútorný bod intervalu  $I$ , mohli by sme Cauchyho vetu použiť na každom uzavretom intervale  $J \subset \mathcal{T} \cap I$ ; požadovali by sme teda, aby koncové body  $x$  a  $x_1$  intervalu  $J$  ležali na rovnakú stranu od bodu  $a$  (tj. aby bod  $a$  neležal "medzi  $x$  a  $x_1$ "); keďže v ďalšom zvolíme bod  $x_1$  pevne, platili by naše úvahy len pre body  $x$  ležiace na tú istú stranu od  $a$  ako  $x_1$ ; to je dôvod, prečo náš dôkaz robíme pre prípad jednostrannej limity

Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0$  (to vyplýva z predpokladu  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ ), je  $\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) = 1$ , preto existuje prstencové okolie  $\mathcal{R}$  bodu  $a$ , pre ktoré platí

$$(\forall x \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T} \cap I) \left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)} > 0\right) \quad {}^{105}. \quad (183)$$

Z (179), (182) a (183) potom dostávame (ak všetky členy v nerovnosti (182) vynásobíme výrazom  $1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}$ <sup>106</sup> a potom pripočítame podiel  $\frac{f(x_1)}{g(x)}$ )

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{T} \cap I) \left(h_1(x) < \frac{f(x)}{g(x)} < h_2(x)\right), \quad (184)$$

kde

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}, \\ h_2(x) &= \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Pretože  $\lim_{x \rightarrow a} h_1(x) = L - \frac{\varepsilon}{2}$ , existuje prstencové okolie  $\mathcal{S}_1$  bodu  $a$  tak, že platí

$$(\forall x \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{T} \cap I) \left(\left|h_1(x) - L - \frac{\varepsilon}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

a teda aj

$$(\forall x \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{T} \cap I) (L - \varepsilon < h_1(x)), \quad (185)$$

podobne z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} h_2(x) = L + \frac{\varepsilon}{2}$  vyplýva existencia prstencového okolia  $\mathcal{S}_2$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{T} \cap I) (h_2(x) < L + \varepsilon). \quad (186)$$

Z (184), (185), (186) dostávame

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{T} \cap I) \left(L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon\right),$$

a  $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{T}$  je teda hľadané prstencové okolie bodu  $a$ .  $\triangle$

Postup v prípade  $L = \infty$  je obdobný (prípade  $L = -\infty$  si čitateľ už iste rád premyslí sám); zvolíme  $K \in \mathbf{R}$ , potom existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall c \in \mathcal{P} \cap D) \left(K + 1 < \frac{f'(c)}{g'(c)}\right),$$

odtiaľ dostávame

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{T} \cap I) \left(h(x) < \frac{f(x)}{g(x)}\right), \quad (187)$$

kde  $\mathcal{T}$ , resp.  $\mathcal{R}$ , je prstencové okolie bodu  $a$ , pre ktoré platí (177), resp. (183), a

$$h(x) = (K + 1) \left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}. \quad (188)$$

Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = K + 1$ , existuje prstencové okolie  $\mathcal{S}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \cap I) (h(x) > K),$$

z (187) a (188) potom vyplýva, že  $\mathcal{U} := \mathcal{P} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$  je prstencové okolie bodu  $a$ , pre ktoré platí

$$(\forall x \in \mathcal{U} \cap I) \left(\frac{f(x)}{g(x)} > K\right).$$

<sup>105</sup>funkcia (premennej  $x$ )  $1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}$  je definovaná pre tie  $x \in I$ , pre ktoré  $g(x) \neq 0$ , teda iste pre všetky  $x \in \mathcal{T} \cap I$ , preto sa v (183) — a v (185) a (186) — vyskytuje prstencové okolie  $\mathcal{T}$

<sup>106</sup>keďže pre  $x \in \mathcal{R} \cap I$  je tento výraz kladný, zostanú pre  $x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{T} \cap I$  aj po vynásobení nerovnosti z (182) zachované



**.104 Príklady. 1.** Použitím l'Hospitalovho pravidla nájdeme teraz niekoľko limit, ktorých znalosť sa nám v budúcnosti môže hodiť.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$  pre  $\alpha, \beta > 0$ .

Limitovaný výraz napíšeme v tvare

$$\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \left( \frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha$$

a na výpočet  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}$  použijeme druhé l'Hospitalovo pravidlo (overenie predpokladov (i) a (ii) na intervale  $(0, \infty)$  prenechávame samozrejme na čitateľa):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} \stackrel{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\beta}{\alpha} x^{\beta/\alpha - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{x^{\beta/\alpha}} = 0$$

(posledná rovnosť vyplýva z predpokladu  $\alpha, \beta > 0$  a rovnosti  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\gamma = \infty$  pre  $\gamma > 0$ ).

Podľa vety o limite zloženej funkcie potom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha = \left| \frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} = t \right| = \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \ln^\alpha x = 0$  pre  $\alpha, \beta > 0$ .

Postup bude obdobný; limitovaný výraz prepíšeme na tvar

$$x^\beta \ln^\alpha x = \left( x^{\beta/\alpha} \ln x \right)^\alpha$$

a na výpočet  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\beta/\alpha} \ln x$  (čo je neurčitý výraz typu  $0 \cdot \infty$ ) skúsime použiť druhé l'Hospitalovo pravidlo (a preto limitovaný súčin najprv zapíšeme v tvare podielu):

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\beta/\alpha} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\beta/\alpha}} \stackrel{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\beta}{\alpha} x^{-\beta/\alpha - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{\alpha}{\beta} x^{\beta/\alpha} \right) = 0.$$

Z vety o limite zloženej funkcie potom opäť vyplýva

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \ln^\alpha x = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln x}{x^{-\beta/\alpha}} \right)^\alpha = \left| \frac{\ln x}{x^{-\beta/\alpha}} = t \right| = \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0.$$

**2.** Ak spojité funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , kde  $I$  je interval, je diferencovateľná v každom bode  $x \in I \setminus \{a\}$ , kde  $a \in I$ , pričom existuje (vlastná alebo nevlastná)  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ , tak  $f$  má v bode  $a$  (vlastnú alebo nevlastnú) deriváciu a platí

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

Na dôkaz uvedenej rovnosti stačí pri výpočte limity  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  použiť prvé l'Hospitalovo pravidlo:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

**Poznámky. 1.** I keď l'Hospitalovo pravidlo možno často s úspechom využiť nielen na výpočet limit neurčitých výrazov typu  $\frac{0}{0}$  alebo  $\frac{\infty}{\infty}$ , ale aj  $0 \cdot \infty$  (čo sme videli v príklade 2) a  $\infty - \infty$ <sup>107</sup>, je pri jeho používaní potrebná istá opatrnosť; ako ukazujú nasledujúce príklady, môže sa v prípade, že vo vete .103 nie je splnený predpoklad (ii) (na overovanie ktorého sa pri používaní l'Hospitalovho pravidla často zabúda), stať, že  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  aj limita neurčitého výrazu  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  síce existujú, ale sú navzájom rôzne (príklady 1 a 2), prípadne, že  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existuje ale  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  neexistuje (príklad 3).

Pri konštrukcii týchto (depresívnych) kontrapríkladov použijeme nasledujúce tvrdenia (z ktorých prvé dokážeme neskôr v odseku ??).

**LEMA 1.** Ak  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , kde  $I$  je interval, je spojité funkcia, tak existuje diferencovateľná funkcia  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$  taká, že  $F'(x) = f(x)$  pre každé  $x \in I$ .

<sup>107</sup>ide len o to, rozdiel  $f - g$  vhodným spôsobom napísať v tvare podielu; vo všeobecnosti možno využiť rovnosť

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}},$$

podiel na jej pravej strane je potom neurčitý výraz typu  $\frac{0}{0}$ , v konkrétnych prípadoch však možno tento prepis urobiť aj odlišným spôsobom

LEMA 2. Nech  $F_1 : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F_2 : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  sú diferencovateľné funkcie také, že  $F_1'(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ ,  $F_2'(x) = \frac{\cos 2x}{x}$  pre všetky  $x \in [1, \infty)$  <sup>108</sup>. Potom existujú konečné limity  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x)$ .

DÔKAZ. Naše tvrdenie dokážeme pre funkciu  $F_1$ , dôkaz pre  $F_2$  je obdobný. Keďže  $F_1'(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ , je  $F_1'(x) > 0$  pre  $x \in [1, \pi)$  a  $x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $F_1'(x) < 0$  pre  $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ . Funkcia  $F_1$  teda rastie na  $[1, \pi]$ , klesá na  $[\pi, 2\pi]$ , rastie na  $[2\pi, 3\pi]$  atď. Označme

$$a_n := F_1(2n\pi), \quad b_n := F_1((2n+1)\pi), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Keďže na intervale  $[2n\pi, (2n+1)\pi]$  funkcia  $F_1$  rastie, je

$$a_n < b_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad \triangle \tag{189}$$

Dokážeme teraz, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0. \tag{190}$$

Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= F_1((2n+1)\pi) - F_1(2n\pi) = F_1'(c)\pi = \frac{\sin c}{c^2} \pi \leq \frac{1}{c^2} \pi < \\ &< \frac{\pi}{(2n)^2\pi} = \frac{1}{(2n)^2}, \end{aligned}$$

pričom posledná nerovnosť je dôsledkom inklúzie  $c \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ . Z nerovností

$$0 < b_n - a_n < \frac{1}{(2n)^2}, \quad n \in \mathbf{N},$$

(prvá z nich vyplýva z (189)) už dostávame (190) (podľa vety .25).  $\triangle$

Dokážeme ďalej, že  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je rastúca postupnosť (dôkaz skutočnosti, že postupnosť  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  klesá, ktorý je analogický, prenechávame na čitateľa), tj. že

$$a_{n+1} - a_n > 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

(-: Ak si načrtneme graf funkcie  $F_1'x = \frac{\sin x}{x^2}$  na intervale  $(2n\pi, (2n+2)\pi)$ , vidíme, že absolútna hodnota funkčnej hodnoty je v bode  $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$  vždy väčšia než v bode  $x + \pi$ . To znamená, že rast funkcie  $F_1$  na intervale  $[2n\pi, (2n+1)\pi]$  je "strmší" než jej klesanie na  $[2n+1\pi, (2n+2)\pi]$ , a teda že rozdiel funkčných hodnôt v bodoch  $(2n+1)\pi$  a  $2n\pi$  (tj.  $b_n - a_n$ ) musí byť väčší než rozdiel hodnôt v bodoch  $(2n+2)\pi$  a  $(2n+1)\pi$  (tj.  $a_{n+1} - b_n$ ). Túto úvahu môžeme prevetliť do formálnych zápisov pomocou tvrdenia z poznámky 1 v odseku .93. :-)

Nech

$$h(x) := F_1(x) - F_1(2n\pi), \quad f(x) := -\left(F_1(x + \pi) - F_1((2n+1)\pi)\right), \quad x \in [2n\pi, (2n+1)\pi],$$

potom — keďže  $h(2n\pi) = f(2n\pi) = 0$  a  $h'(x) = F_1'(x) > -F_1'(x + \pi) = f'(x)$  — podľa tvrdenia z poznámky 1 v odseku .93 (kde položíme  $c = 2n\pi$ ,  $d = (2n+1)\pi$ ) platí  $h(x) > f(x)$  pre všetky  $x \in (2n\pi, 2n+1)\pi$ ; ak zvolíme  $x = (2n+1)\pi$ , dostávame

$$\begin{aligned} 0 &< h((2n+1)\pi) - f((2n+1)\pi) = F_1((2n+1)\pi) - F_1(2n\pi) + F_1(2n+2)\pi - F_1((2n+1)\pi) = \\ &= F_1((2n+2)\pi) - F_1(2n\pi) = a_{n+1} - a_n, \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.  $\triangle$ .

Z monotónnosti postupností  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a z (189) dostávame

$$a_1 < a_n < b_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

teda  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  je zdola ohraničená klesajúca postupnosť, preto existuje konečná  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Rovnako možno dokázať existenciu konečnej  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ; z (190) pritom vyplýva rovnosť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad \triangle \tag{191}$$

<sup>108</sup>existencia funkcií  $F_1, F_2$  vyplýva z predchádzajúcej lemy

Keďže  $F_1$  rastie na  $[2n\pi, (2n+1)\pi]$  a klesá na  $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$ , je číslo  $b_n = F_1((2n+1)\pi)$  maximom funkcie  $F_1$  na intervale  $[2n\pi, (2n+2)\pi]$ ; pretože  $F_1(2n\pi) = a_n < a_{n+1} = F_1((2n+2)\pi)$ , nadobúda  $F_1$  svoje minimum na  $[2n\pi, (2n+2)\pi]$  v bode  $2n\pi$ ; platia teda nerovnosti

$$\left(\forall x \in [2n\pi, (2n+2)\pi]\right) (a_n \leq F_1(x) \leq b_n),$$

z nich a z (191) už vyplýva existencia konečnej  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x)$ .

PRÍKLAD 1. Nech funkcie  $f, g : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  sú dané predpismi

$$f(x) = 2 \ln x - \cos x + 2F_1(x) - F_2(x), \quad g(x) = \ln x - \cos x,$$

kde  $F_1, F_2$  sú funkcie z lemy 2. Potom z nerovnosti

$$\left(\forall x \in [1, \infty)\right) (g(x) \geq \ln x - 1)$$

vyplýva — keďže  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  — rovnosť  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ , a teda aj

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = \infty,$$

čo je predpoklad (i) vety .103. Ďalej platí

- funkcie  $f, g$  sú diferencovateľné:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x} + \sin x + \frac{2 \sin x}{x^2} - \frac{\cos 2x}{x} = \frac{2}{x} + \sin x + \frac{2 \sin x}{x^2} - \frac{1 - 2 \sin^2 x}{x} = \\ &= \frac{2}{x} + \sin x + \frac{2 \sin x}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2 \sin^2 x}{x} = \frac{1}{x} + \sin x + \frac{2 \sin x}{x} \left( \frac{1}{x} + \sin x \right) = \\ &= \left( \frac{1}{x} + \sin x \right) \left( 1 + \frac{2 \sin x}{x} \right), \\ g'(x) &= \frac{1}{x} + \sin x; \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1}{x} + \sin x \right) \left( 1 + \frac{2 \sin x}{x} \right)}{\frac{1}{x} + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2 \sin x}{x} \right) = 1$   
(podľa vety .14 je totiž  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin x}{x} = 0$ );

ale

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x - \cos x + 2F_1(x) - F_2(x)}{\ln x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{\cos x}{\ln x} + 2 \frac{F_1(x)}{\ln x} - \frac{F_2(x)}{\ln x}}{1 - \frac{\cos x}{\ln x}} = 2,$

pretože  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{\ln x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_1(x)}{\ln x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_2(x)}{\ln x} = 0$  podľa vety .18 a vety o limite súčiny (existenciu konečných limit  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x)$  sme dokázali v leme 2).

Pripomeňme, že v tomto prípade nebola na žiadnom okolí bodu  $\infty$  splnená podmienka (ii) z druhého l'Hospitalovho pravidla; v každom okolí bodu  $\infty$  totiž existujú body  $x$ , pre ktoré  $\frac{1}{x} + \sin x = 0$ , tj. body  $x$ , v ktorých  $f'(x) = 0 = g'(x)$ .

PRÍKLAD 2. Nech

$$f(x) = \ln x - \cos x + 2\sqrt{x} + 2F_3(x) - F_4(x), \quad g(x) = \ln x - \cos x, \quad x \in [1, \infty),$$

kde  $F_3 : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F_4 : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  sú diferencovateľné funkcie také, že  $F_3'(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ ,  $F_4'(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}$ . Rovnako ako v prípade funkcií  $F_1, F_2$  z príkladu 1 možno dokázať existenciu konečných limit  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_3(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_4(x)$ . Pre funkcie  $f, g$  platí

- $\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = \infty;$
- $f'(x) = \left( \frac{1}{x} + \sin x \right) \left( 1 + \frac{2 \sin x}{\sqrt{x}} \right), \quad g'(x) = \frac{1}{x} + \sin x;$

preto

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2 \sin x}{\sqrt{x}} \right) = 1;$

ale

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \left( \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + 2 + \frac{2F_3(x)}{\sqrt{x}} - \frac{F_4(x)}{\sqrt{x}} \right)}{\ln x \left( 1 - \frac{\cos x}{\ln x} \right)} = \infty$$

(pretože  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \infty$  podľa druhého l'Hospitalovho pravidla a limita pre  $x \rightarrow \infty$  zátvorok v čitateli, resp. v menovateli, je 2, resp 1).

PRÍKLAD 3. Pre  $x \in [1, \infty)$  položme

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} - 8F_5(\sqrt{x}) - \sin 2\sqrt{x}, \\ g(x) &= 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x}, \end{aligned}$$

kde  $F_5 : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná funkcia taká, že  $F_5'(x) = \frac{\cos x}{x}$ . Zopakovaním postupu z lemy 2 možno dokázať existenciu konečnej  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_5(x)$ , preto aj  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_5(\sqrt{x})$  je konečná. Z nerovnosti

$$g(x) = \sqrt{x} \left( 4 + 2 \sin \sqrt{x} + \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \geq \sqrt{x} \left( 2 + \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)$$

vyplýva (podľa vety .20(b), resp. druhého "pravidla" v strednom stĺpci z (33)), že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Ďalej platí

$$\bullet f'(x) = \left( \frac{2}{\sqrt{x}} + \cos \sqrt{x} \right) \left( 1 - \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^{109}, \quad g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \cos \sqrt{x};$$

preto

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = 1$$

(pretože  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$  podľa viet .18 a .14),

ale

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ neexistuje; pre } x > 0 \text{ totiž platí}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sqrt{x} \left( 2 + 2 \sin \sqrt{x} + \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{8F_5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \left( 4 + 2 \sin \sqrt{x} + \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)} = \\ &= \frac{2 + 2 \sin \sqrt{x} + \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{8F_5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4 + 2 \sin \sqrt{x} + \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}, \end{aligned}$$

pritom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0;$$

ak teraz zvolíme  $x_n = (2\pi n)^2$ ,  $y_n = \left( (2n+1)\frac{\pi}{2} \right)^2$ , tak  $\sin \sqrt{x_n} = 0$ ,  $\sin \sqrt{y_n} = 1$ , preto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 2 \sin \sqrt{x_n} + \frac{2 \cos \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}} - \frac{8F_5(\sqrt{x_n})}{\sqrt{x_n}} - \frac{\sin 2\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}}}{4 + 2 \sin \sqrt{x_n} + \frac{2 \cos \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}}} = \frac{2 + 0 + 0 - 0 - 0}{4 + 0 + 0} = \\ &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

neexistencia limity  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  potom vyplýva z lemy .11(c).

<sup>109</sup>pripomeňme, že  $(F_5(\sqrt{x}))' = F_5'(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**2.** Predpoklad (ii) z vety .103 (a identický predpoklad (iii) z vety .102) požaduje, aby funkcie  $f'$  a  $g'$  nadobúdali súčasne nulové hodnoty. Nasledujúca lema, ukazuje, že i v prípade, že  $f'$  a  $g'$  nadobúdajú súčasne nulové hodnoty, možno použiť l'Hospitalovo pravidlo, ovšem za dodatočného predpokladu, že funkcia  $g'$  nezmení napravo ani nalavo od bodu  $a$  znamienko. Preto v predchádzajúcich kontrapríkladoch je porušená nielen podmienka (ii) z vety .103, ale aj predpoklad (ii) nasledujúcej lemy.

LEMA. *Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je pravý koncový bod intervalu  $I$ , nech diferencovateľné funkcie  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  splňajú nasledujúce podmienky:*

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty \text{ alebo } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

$$(ii) (\forall x \in I)(g'(x) \geq 0) \text{ alebo } (\forall x \in I)(g'(x) \leq 0);$$

$$(iii) (\forall x \in I)(g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0).$$

Potom platí: ak existuje  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , tak existuje aj  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DÔKAZ. Predpokladajme, že  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ , je splnená podmienka (iii) a pre všetky  $x \in I$  je  $g'(x) \geq 0$  (teda  $g$  je neklesajúca funkcia; odtiaľ a z predpokladu  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$  dostávame rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ); prispôsobenie dôkazu na ostatné prípady prenechávame dychtivému čitateľovi.

Z predpokladu  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$  vyplýva pre dané  $\varepsilon > 0$  existencia prstencového okolia  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap D) \left( L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

kde  $D := \{x \in I; g'(x) \neq 0\}$  je definičný obor funkcie  $\frac{f'}{g'}$ . Pre  $x \in \mathcal{P} \cap D$  teda platí

$$\left( L - \frac{\varepsilon}{2} \right) g'(x) \leq f'(x) \leq \left( L + \frac{\varepsilon}{2} \right) g'(x). \quad (192)$$

Z predpokladu (iii) vyplýva, že (192) platí aj pre tie  $x \in I$ , v ktorých  $g'(x) = 0$ , teda uvedené nerovnosti platia pre všetky  $x \in \mathcal{P} \cap I$ .

Nech  $x_1$  je ľavý koncový bod intervalu  $\mathcal{P} \cap I$  (o okolí  $\mathcal{P}$  môžeme iste bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že je to zdola ohraničená množina). Z tvrdenia v poznámke 1 z odseku .93 (kde ostré nerovnosti nahradíme neostrými, za  $c$  zvolíme  $x_1$  a v úlohe funkcií  $f, h$  budú vystupovať najprv funkcie  $(L - \varepsilon/2)(g(x) - g(x_1))$  a  $f(x) - f(x_1)$  (pri dôkaze prvej z nasledujúcich nerovností) a potom (pri dôkaze druhej z nich) funkcie  $f(x) - f(x_1)$  a  $(L + \varepsilon/2)(g(x) - g(x_1))$ ) vyplýva

$$(\forall x \in (x_1, a)) \left( \left( L - \frac{\varepsilon}{2} \right) (g(x) - g(x_1)) \leq f(x) - f(x_1) \leq \left( L + \frac{\varepsilon}{2} \right) (g(x) - g(x_1)) \right). \quad (193)$$

Keďže  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , existuje prstencové okolie  $\mathcal{T}$  bodu  $a$  tak, že pre  $x \in \mathcal{T} \cap I$  platí  $g(x) > g(x_1)$ , tj.

$$(\forall x \in \mathcal{T} \cap I)(g(x) - g(x_1) > 0).$$

Pre  $x \in \mathcal{T} \cap (x_1, a) = \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I$  sa teda nerovnosti v (193) po vydelení číslom  $g(x) - g(x_1)$  nezmenia, platí teda

$$(\forall x \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I) \left( L - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \leq L + \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (194)$$

Ďalší postup je totožný s úvahami z dôkazu vety .103 za vzťahom (182) (s ktorým je (194) v podstate zhodný).

## 15 Taylorov polynóm

V tejto kapitole sa budeme snažiť pre danú funkciu  $f$  definovanú na intervale  $I$  a daný bod  $a \in I$  nájsť spomedzi všetkých polynómov stupňa najviac  $n$  ten, ktorý "najlepšie aproximuje funkciu  $f$  blízko bodu  $a$ " (čo znamená, že od hľadaného polynómu  $T_n$  budeme požadovať, aby pre každý od neho rôzny polynóm  $P$  stupňa najviac  $n$  existovalo prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap I) (|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P(x)|), \quad (195)$$

tj. aby dostatočne blízko k bodu  $a$  platilo, že chyba, ktorej sa dopustíme, ak funkciu  $f$  nahradíme polynómom  $T_n$ , je menšia, než chyba, ktorá by vznikla nahradením funkcie  $f$  polynómom  $P$ ).

V prípade  $n = 0$  teda hľadáme konštantu, ktorá sa spomedzi všetkých konštánt najmenej odlišuje od hodnoty funkcie  $f$  pre  $x$  blízke k  $a$ ; dúfame, že čitateľovi je z doterajšieho priebehu nášho kurzu jasné, že hľadanou konštantou — pokiaľ je funkcia  $f$  spojitá v bode  $a$  — je  $f(a)$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  <sup>110</sup>.

Pre  $n = 1$  dostávame nám už známu úlohu nájsť dotyčnicu k funkcii  $f$  v bode  $a$ ; vieme teda, že hľadaný polynóm  $T_1$  — pokiaľ existuje vlastná  $f'(a)$  — má v tomto prípade tvar

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (196)$$

Skôr, než budeme pokračovať v našich úvahách pre prípad väčšieho  $n$  a ľubovoľnej funkcie  $f$ , všimnime si ešte špeciálny prípad, keď  $f$  je polynóm  $P$  stupňa najvyššie  $n$ ; vtedy zrejme hľadaný polynóm  $T_n$  je totožný s  $P$ . Nasledujúca lema ukazuje, že koeficienty polynómu  $P$  (a teda v tomto prípade aj  $T_n$ ) možno vyjadriť pomocou derivácií funkcie  $P$ .

<sup>110</sup>nie je ťažké presvedčiť sa, že  $T_0(x) \equiv f(a)$  má skutočne vlastnosť z (195) (prítom nasledujúce úvahy pre  $n = 0$  rovnako ako v ďalšej poznámke uvedený dôkaz pre  $n = 1$  sú totožné s dôkazom vety .108(b) pre  $n = 0, 1$ ):

ak  $P(x) \equiv k \neq f(a)$ , tak podľa lemy .13(e) (a vety o limite rozdielu) je  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - P(x)| = |f(a) - k| > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$ , teda

$$\lim_{x \rightarrow a} (|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_0(x)|) > 0,$$

preto podľa lemy .10(b) existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap I) (|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_0(x)| > 0),$$

čo už je (195)

<sup>111</sup>presvedčme sa aj v tomto prípade, že  $T_1$  má vlastnosť požadovanú v (195): každý polynóm najviac prvého stupňa môžeme zapísať v tvare  $A + B(x - a)$  (pre  $B = 0$  dostaneme konštantnú funkciu); ak je tento polynóm rôzny od  $T_1$ , nastane (keďže dva polynómy  $A_1 + B_1(x - a)$ ,  $A_2 + B_2(x - a)$  sa rovnajú práve vtedy, keď  $A_1 = A_2 \wedge B_1 = B_2$ ) jedna z dvoch nasledujúcich možností:

bud

- $A \neq f(a)$ , vtedy  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - P(x)| = |f(a) - P(a)| = |f(a) - A| > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - T_1(x)| = |f(a) - T_1(a)| = |f(a) - f(a)| = 0$ , a teda

$$\lim_{x \rightarrow a} (|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_1(x)|) > 0,$$

ďalší postup je rovnaký ako v prípade  $n = 0$ ;

alebo

- $A = f(a) \wedge B \neq f'(a)$ , vtedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - P(x)}{x - a} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - B \right| = |f'(a) - B| > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - T_1(x)}{x - a} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| = |f'(a) - f'(a)| = 0,$$

a teda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|x - a|} \left( \underbrace{|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_1(x)|}_{h(x)} \right) > 0,$$

preto existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap I) \left( \frac{h(x)}{|x - a|} > 0 \right),$$

z ktorej už vyplýva (195) (stačí obidve strany získanej nerovnosti vynásobiť kladným výrazom  $|x - a|$ )

**.105 Lema.** *Nech  $P$  je polynóm stupňa nanajvyš  $n$ , nech  $a \in \mathbf{R}$ . Potom  $P$  možno písať v tvare*

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

*Špeciálne,  $k$ -tu deriváciu ( $k \leq n$ ) polynómu  $P$  možno písať v tvare*

$$P^{(k)}(x) = P^{(k)}(a) + P^{(k+1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}. \quad (197)$$

**Dôkaz.**  $P$  možno zapísať ako polynóm so stredom  $a$ , tj. v tvare

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n, \quad (198)$$

stačí do predpisu

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

dosadiť  $x = (x-a) + a$  a získané dvojčleny umocniť pomocou binomickej vety na príslušné mocniny. Zostáva dokázať rovnosti

$$a_i = \frac{P^{(i)}(a)}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (199)$$

Ak do (198) dosadíme  $x = a$ , dostaneme  $P(a) = a_0$ , čo je (199) pre  $i = 0$ . Keďže

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1},$$

je  $P'(a) = a_1$ ; z rovnosti

$$P''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

vyplýva  $P''(a) = 2a_2$ . Tak možno pokračovať až po  $i = n$ , čím bude (199) dokázané.

Keďže  $P^{(k)}$  je polynóm stupňa najviac  $n-k$ , možno ho podľa práve dokázaného tvrdenia písať v tvare

$$P^{(k)}(x) = P^{(k)}(a) + \left(P^{(k)}\right)'(a)(x-a) + \cdots + \left(P^{(k)}\right)^{(n-k)}(a)(x-a)^{n-k},$$

tým je dokázaná aj rovnosť (197). ♠

Vráťme sa teraz k našej pôvodnej úlohe; pri jej riešení teraz použijeme túto jednoduchú pomocnú úvahu:

*ak funkcie  $F, G$  sú definované na intervale  $I$ , pričom  $G$  je na niektorom prstencovom okolí bodu  $a \in I$  nenulová, a existuje konečná  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} =: \gamma$ , tak pre hodnoty  $x$  ležiace blízko bodu  $a$  sa spomedzi všetkých funkcií tvaru  $kG$  od funkcie  $F$  najmenej líši funkcia  $\gamma G$ <sup>112</sup> (teda — veľmi voľne vyjadrené — "v mierke určenej funkciou  $G$  je veľkosťou funkcie  $F$  číslo  $\gamma$ ").*

Ak je daná spojité funkcia  $f$ , tak pre hodnoty  $x$  málo sa líšiacie od  $a$  je spomedzi konštánt  $k$  funkcií najbližšie konštanta  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1}$  ("mierkou" je teda v tomto prípade konštantná funkcia s hodnotou 1). Rozdiel  $R_0(x) := f(x) - f(a)$  (tj. chyba, ktorej sa dopustíme pri nahradení funkcie  $f$  konštantnou funkciou  $f(a)$ ) je už "na úrovni konštánt" nerozlíšiteľný od nuly, pretože

$$\lim_{x \rightarrow a} R_0(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Ak chceme nájsť lepšiu aproximáciu funkcie  $f$ , budeme hľadať nielen medzi konštantami, ale aj medzi polynómami prvého stupňa. Keďže už vieme, že hľadaný polynóm  $T_1$  má tvar (196), pričom  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} =$

<sup>112</sup>dôkaz opäť nie je ťažký ani prekvapujúci: pre  $k \neq \gamma$  je

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{F(x) - \gamma G(x)}{G(x)} \right| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{F(x) - kG(x)}{G(x)} \right| = |\gamma - k| > 0,$$

odtiaľ vyplýva

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|G(x)|} \left( |F(x) - kG(x)| - |F(x) - \gamma G(x)| \right) = |k - \gamma| > 0,$$

preto existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap I) (|F(x) - kG(x)| > |F(x) - \gamma G(x)|)$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_0(x)}{x-a}$ , vidíme, že polynóm  $T_1$  sme našli tak, že sme — ako vidno z našej pomocnej úvahy — hľadali najlepšiu aproximáciu zvyšku  $R_0$  funkciou tvaru  $k(x-a)$  pre hodnoty  $x$  ležiace blízko k  $a$ . Pre rozdiel  $R_1 := f - T_1$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_1(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0,$$

teda "v mierke určenej funkciou  $x-a$  už nevieme  $R_1$  odlišiť od nuly".

Pokračujme týmto spôsobom ďalej: "mierku"  $x-a$  nahradíme "jemnejšou"<sup>113</sup> mierkou  $(x-a)^2$  a hľadajme najlepšiu aproximáciu zvyšku  $R_1$  funkciou tvaru  $k(x-a)^2$  pre  $x$  málo sa líšiacie od  $a$ , číslo  $k$  (pokiaľ  $f$  je diferencovateľná na  $I$  a existuje  $f''(a)$ ) nájdeme na základe našej pomocnej úvahy:

$$k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_1(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x-a)} = \frac{f''(a)}{2},$$

hľadaný polynóm  $T_2$  teda bude mať tvar

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

a pre zvyšok  $R_2 := f - T_2$  bude platiť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0$ .

Pri hľadaní polynómu  $T_3$  nahradíme "mierku"  $(x-a)^2$  (v ktorej už  $R_2$  nevieme odlišiť od nuly) v poradí nasledujúcou "jemnejšou mierkou"  $(x-a)^3$  a budeme hľadať funkciu tvaru  $k(x-a)^3$ , ktorá blízko k  $a$  najlepšie nahradí funkciu  $R_2$ ; pre hľadané  $k$  dostávame (ak  $f$  je na  $I$  dvakrát diferencovateľná a existuje vlastná  $f'''(a)$ ) na základe našej pomocnej úvahy rovnosť

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2}{(x-a)^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^3} \stackrel{!}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{3!} \frac{f''(x) - f''(a)}{x-a} = \frac{f'''(a)}{3!}, \end{aligned}$$

teda

$$T_3 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3.$$

Ak tento postup zopakujeme ešte niekoľkokrát, zistíme, že  $T_n$  má (pokiaľ  $f$  je  $(n-1)$ -krát diferencovateľná na  $I$  a existuje konečná  $f^{(n)}(a)$ ) tvar

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

**.106 Definícia.** Nech funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je  $(n-1)$ -krát diferencovateľná na intervale  $I$  a  $n$ -krát diferencovateľná v bode  $a \in I$ . Potom polynóm

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

sa nazýva *Taylorov polynóm rádu  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$* . Ak  $a = 0$ , hovoríme o *Maclaurinovom polynóme rádu  $n$  funkcie  $f$* .

**Poznámka.** Z lemy .105 vyplýva toto tvrdenie:

Nech  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia  $(n-1)$ -krát diferencovateľná na intervale  $I$  a  $n$ -krát diferencovateľná v bode  $a$ , nech  $P$  je polynóm stupňa nanajvyš  $n$ . Potom  $P$  je Taylorovým polynómom rádu  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$  práve vtedy, keď

$$f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad \spadesuit$$

Základné vlastnosti Taylorovho polynómu sformulujeme vo vete .108, pri ich dôkaze použijeme nasledujúcu lemu.

**.107 Lema.** Nech funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je  $(k-1)$ -krát diferencovateľná na intervale  $I$  a  $k$ -krát diferencovateľná v bode  $a \in I$  ( $k \in \mathbf{N}$ ). Nech  $P$  je polynóm stupňa nanajvyš  $r$  ( $r \geq k$ ) taký, že

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P^{(k-1)}(a) = f^{(k-1)}(a). \quad (200)$$

<sup>113</sup>skutočne, z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^2}{x-a} = 0$  vyplýva, že dostatočne blízko k  $a$  je veľkosť čísla  $(x-a)^2$  zanedbateľná v porovnaní s veľkosťou čísla  $x-a$ , vidno teda, že "mierka"  $(x-a)^2$  je "jemnejšia" než  $x-a$ , súčasne je ale (na základe takého istého zdôvodnenia) "hrubšia" než každá "mierka"  $(x-a)^k$  pre  $k > 2$



Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = \frac{1}{k!} \left( f^{(k)}(a) - P^{(k)}(a) \right) .$$

**Dôkaz.** Na výpočet limity neurčitého výrazu  $\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}$  typu  $\frac{0}{0}$ <sup>114</sup> použijeme  $(k-1)$ -krát prvé l'Hospitalovo pravidlo (ako vyplýva z rovností (200), po každom jeho použití dostaneme opäť neurčitý výraz typu  $\frac{0}{0}$ <sup>115</sup>) a limitu posledného takto získaného neurčitého výrazu  $\frac{f^{(k-1)}(x)-P^{(k-1)}(x)}{k!(x-a)}$  (na výpočet ktorej už l'Hospitalovo pravidlo použiť nemôžeme, pretože naše predpoklady nezaručujú diferencovateľnosť funkcie  $f^{(n-1)}$  na niektorom prstencovom okolí bodu  $a$ ) nájdeme na základe definície čísla  $f^{(n)}(a)$ ; pritom využijeme rovnosť

$$P^{(k-1)}(x) = P^{(k-1)}(a) + P^{(k)}(a)(x-a) + P^{(k+1)}(a)(x-a)^2 + \dots + P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k+1}$$

(tú dostaneme, ak v (197) za dvojicu čísel  $(n, k)$  dosadíme  $(r, k-1)$ ), z nej na základe nášho predpokladu

$$P^{(k-1)}(a) = f^{(k-1)}(a)$$

vyplýva

$$P^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(a) + P^{(k)}(a)(x-a) + P^{(k+1)}(a)(x-a)^2 + \dots + P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k+1} .$$

Uvedeným postupom dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} &\stackrel{l'Hosp}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - P'(x)}{k(x-a)^{k-1}} \stackrel{l'Hosp}{=} \dots \stackrel{l'Hosp}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(k-1)}(x) - P^{(k-1)}(x)}{k!(x-a)} = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a) - P^{(k)}(a)(x-a) - \dots - P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k+1}}{x-a} = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a)}{x-a} - P^{(k)}(a) - P^{(k+1)}(a)(x-a) - \dots - P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k} \right) = \\ &= \frac{1}{k!} \left( f^{(k)}(a) - P^{(k)}(a) \right) , \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

**.108 Veta.** *Nech funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je  $(n-1)$ -krát diferencovateľná na intervale  $I$  a  $n$ -krát diferencovateľná v bode  $a$ . Potom*

(a) *polynóm  $P$  stupňa najvyšš  $n$  je Taylorovým polynómom rádu  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$  práve vtedy, keď*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 ; \tag{201}$$

(b) *pre každý polynóm  $P$  stupňa najvyšš  $n$ , ktorý je odlišný od Taylorovho polynómu  $T_n$  rádu  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$ , existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou*

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap I) (|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P(x)|) . \tag{202}$$

**Dôkaz.** (a) " $\Rightarrow$ ": Ak  $P$  je Taylorov polynóm rádu  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$ , tak platí (pozri poznámku za definíciou .106)  $n+1$  rovností

$$f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a) , \quad i = 0, 1, \dots, n . \tag{203}$$

Splnenie prvých  $n$  z nich nám umožňuje použiť lemu .107 (pre  $k = n$ ), podľa ktorej

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} \left( f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) \right) = 0 , \tag{204}$$

<sup>114</sup>rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - P(x)) = 0$  je dôsledkom predpokladu  $f(a) = P(a)$ , pritom spojitost funkcie  $f$  v bode  $a$ , ktorej dôsledkom je rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , vyplýva z jej diferencovateľnosti v tomto bode

<sup>115</sup>pritom spojitost funkcií  $f', f'', \dots, f^{(k-1)}$  v bode  $a$  — dôsledkom ktorej je rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} f^{(i)}(x) = f^{(i)}(a)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$  — vyplýva opäť z predpokladu ich diferencovateľnosti v tomto bode

pričom posledná rovnosť v (204) vyplýva z poslednej rovnosti v (203).

” $\Leftarrow$ ”: Z definície Taylorovho polynómu vyplýva (pozri poznámku v odseku .106), že treba dokázať rovnosti (203), to urobíme úplnou indukciou.

Z (201) vyplýva rovnosť

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - P(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} (x-a)^n \right) = 0 \cdot 0 = 0, \quad (205)$$

pričom funkcie  $f$  a  $P$  sú v bode  $a$  spojité (spojitosť  $f$  v bode  $a$  vyplýva z jej diferencovateľnosti v tomto bode), preto

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a),$$

z týchto rovností a z (205) vyplýva  $f(a) = P(a)$ , čo je (203) pre  $i = 0$ .

Predpokladajme teraz, že (203) platí pre  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , pričom  $k \leq n$ . Z (201) dostávame

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} (x-a)^{n-k} \right) = 0; \quad (206)$$

súčasne ale z indukčného predpokladu vyplýva, že sú splnené rovnosti (200) z lemy .107, podľa ktorej

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = \frac{1}{k!} \left( f^{(k)}(a) - P^{(k)}(a) \right),$$

odtiaľ a z (206) už dostávame rovnosť  $f^{(k)}(a) = P^{(k)}(a)$ , čo je (203) pre  $i = k$ .  $\triangle$

(b) Keďže polynóm  $P$ , ktorý podľa lemy .105 možno písať v tvare

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \dots + \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,$$

a Taylorov polynóm

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

sú navzájom rôzne, musia sa líšiť v niektorom zo svojich koeficientov; nech  $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$  je prvý spomedzi  $P(a), P'(a), \dots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$ , ktorý sa odlišuje od príslušného koeficientu polynómu  $T_n$ , teda nech

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), \dots, P^{(k-1)}(a) = f^{(k-1)}(a), \quad (207)$$

ale

$$P^{(k)}(a) \neq f^{(k)}(a). \quad (208)$$

Rovnosti (207) nám umožňujú použiť lemu .107, podľa ktorej

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = \frac{1}{k!} \left( f^{(k)}(a) - P^{(k)}(a) \right) \neq 0, \quad (209)$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z (208). Podľa tvrdenia (a) našej vety je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ , preto aj

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} (x-a)^{n-k} \right) = 0,$$

odtiaľ, z (209) (a lemy .13(e)) vyplýva

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|x-a|^k} \underbrace{\left( |f(x) - P(x)| - |f(x) - T_n(x)| \right)}_{h(x)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow a} \left( \left| \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} \right| - \left| \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^k} \right| \right) = \left| \frac{1}{k!} \left( f^{(k)}(a) - P^{(k)}(a) \right) \right| > 0, \end{aligned}$$

preto (podľa lemy .10(b)) existuje prstencové okolie  $\mathcal{P}$  bodu  $a$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap I) \left( \frac{h(x)}{|x-a|^k} > 0 \right),$$

odtiaľ — ak obidve strany nerovnosti vynásobíme kladným výrazom  $|x-a|^k$  — už dostávame (202). ♠

Niektoré zápisy nám pomôže sprehladiť symbolika, ktorú zavedieme v nasledujúcom odseku.

**.109 Definícia.** Nech  $a \in \mathbf{R}^*$  je hromadný bod definičného oboru funkcie  $g$ , ktorá je nenulová v niektorom prstencovom okolí  $\mathcal{R}$  bodu  $a$  (tj. na množine  $\mathcal{R} \cap D(g)$ ). Symbolom  $o(g)$  pre  $x \rightarrow a$  ("malé  $o$  pre  $x$  idúce k  $a$ ") budeme označovať množinu všetkých funkcií spĺňajúcich nasledujúce podmienky:

- (i) existuje prstencové okolie  $P$  bodu  $a$  s vlastnosťou  $P \cap D(f) = P \cap D(g)$ ;
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ;

prítom — pokiaľ bude zo súvislosti zrejmé, o ktoré  $a \in \mathbf{R}^*$  sa jedná — budeme zápis  $o(g)$  pre  $x \rightarrow a$  skracovať na  $o(g)$ .

Ak  $f$  je funkcia a  $A, B$  sú množiny funkcií, tak množiny  $A + B$ ,  $f + A$ ,  $A \cdot B$  a  $f \cdot A$  definujeme rovnosťami

$$A + B := \{f + g; f \in A \wedge g \in B\}, \quad f + A := \{f\} + A \quad (= \{f + g; g \in A\})$$

$$A \cdot B := \{fg; f \in A \wedge g \in B\}, \quad f \cdot A := \{f\} \cdot A, \quad \text{špeciálne} \quad -A := (-1) \cdot A.$$

**Lema.** Nech  $r, s \in \mathbf{N}$ , potom pre  $x \rightarrow 0$  platí:

- (a) ak  $r > s$ , tak  $x^r \in o(x^s)$ ;
- (b) ak  $r > s$ , tak  $o(x^r) \subset o(x^s)$ ;
- (c) ak  $r \geq s$ , tak  $o(x^r) + o(x^s) \subset o(x^s)$ ;
- (d)  $-o(x^r) = o(x^r)$ ;
- (e)  $x^r o(x^s) = o(x^{r+s})$ ;
- (f)  $o(x^r) o(x^s) \subset o(x^{r+s})$ ;
- (g) ak  $f \in o(x^r)$ , tak  $f(x^s) \in o(x^{rs})$ ;
- (h) ak  $f \in o(x^r)$ , pričom  $f(0) = 0$  a  $g \in o(x^s)$ , tak  $f \circ g \in o(x^{rs})$ .

**Poznámka.** Nie je ťažké presvedčiť sa, že v prípadoch (c), (e) a (f) možno inklúziu  $\subset$  nahradiť rovnosťou <sup>116</sup>.

**Dôkaz.** Dokážeme tvrdenia (b), (c) a (h), ostatné dôkazy sú obdobné.

(b) Ak  $f \in o(x^r)$ , tak — keďže  $D(x^r) = \mathbf{R}$  —  $f$  je definovaná na niektorom prstencovom okolí bodu 0 (to vyplýva z podmienky (i) z definície .109) a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^r} = 0$ , preto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^s} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^r} x^{r-s} = 0 \cdot 0 = 0;$$

<sup>116</sup>v prípade (c) stačí funkciu  $f \in o(x^s)$  napísať ako súčet  $0 + f$  a uvedomiť si, že pre konštantnú funkciu 0 platí inklúzia  $0 \in o(x^r)$ ; v prípade (e) možno  $f \in o(x^{r+s})$  písať ako súčin  $x^r \cdot \frac{f(x)}{x^{r+s}}$ , pričom — pokiaľ  $0 \in D(f)$  — funkciu  $\frac{f(x)}{x^{r+s}}$  spojitou dodefinujeme v bode 0 hodnotou 0; napokon v prípade (f) zapíšeme funkciu  $f \in o(x^{r+s})$  ako súčin

$$|f(x)|^{\frac{r}{r+s}} \cdot \left( |f(x)|^{\frac{s}{r+s}} \operatorname{sgn} f(x) \right),$$

prítom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|^{\frac{s}{r+s}} \operatorname{sgn} f(x)}{x^s} = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{x^{r+s}} \right|^{\frac{s}{r+s}} \operatorname{sgn} f(x) \operatorname{sgn} x^{r+s},$$

limita prvého súčiniteľa je 0 a zvyšné dva súčinitele sú ohraničené funkcie

to znamená, že funkcia  $f$  spĺňa obidve podmienky z definície symbolu  $o(x^s)$ , a preto  $f \in o(x^s)$ .

(c) Stačí dokázať inklúziu

$$o(x^s) + o(x^s) \subset o(x^s), \quad (210)$$

dokazované tvrdenie bude potom vyplývať z bodu (ii), pretože — ak  $A, B, C$  sú množiny funkcií — z inklúzie  $C \subset B$  zrejme vyplýva inklúzia  $A + C \subset A + B$ ; v našom prípade teda iste platí

$$o(x^r) + o(x^s) \subset o(x^s) + o(x^s).$$

Dokazujme teda (210): Ak  $f, g \in o(x^s)$ , tak — keďže  $D(x^s) = \mathbf{R}$  — existujú (podľa bodu (i) definície .109) prstencové okolia  $P_1$  a  $P_2$  bodu 0 tak, že  $P_1 \subset D(f)$ ,  $P_2 \subset D(g)$ , pre prstencové okolie  $P_1 \cap P_2$  teda iste platí inklúzia  $P_1 \cap P_2 \subset D(f+g)$ , čím je pre funkciu  $f+g$  splnená podmienka (i) z definície .109. Ďalej z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x^s} = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x^s}$  vyplýva (podľa vety o limite súčtu) rovnosť  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)+g(x)}{x^s} = 0$ , čo znamená, že funkcia  $f+g$  spĺňa aj druhú z podmienok definície .109, a teda  $f+g \in o(x^s)$ .

(h) Predovšetkým si všimnime, že z predpokladu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^s} = 0$  vyplýva rovnosť

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^s} x^s = 0 \cdot 0 = 0. \quad (211)$$

Keďže  $f \in o(x^r)$ ,  $g \in o(x^s)$ , existujú podľa bodu (i) definície .109 prstencové okolia  $P$  a  $R$  bodu 0 tak, že  $P \subset D(f)$ ,  $R \subset D(g)$ . Pretože podľa našich predpokladov je  $0 \in D(f)$ , platí aj inklúzia

$$O := P \cup \{0\} \subset D(f). \quad (212)$$

Z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  potom podľa definície limity vyplýva, že k okoliu  $O$  bodu 0 musí existovať prstencové okolie  $S_1$  bodu 0 s vlastnosťou  $g(R \cap S_1) \subset O \subset D(f)$ , odtiaľ dostávame

$$S := R \cap S_1 \subset D(f \circ g), \quad (213)$$

čo znamená, že pre funkciu  $f \circ g$  je splnená podmienka (i) z definície .109.

Dokážeme teraz, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x))}{x^{rs}} = 0$ , tj. že platí výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists T)(\forall x \in T \cap D(f \circ g))(|f(g(x))| < \varepsilon |x|^{rs}). \quad (214)$$

Zvoľme teda  $\varepsilon > 0$  a hľadáme prstencové okolie  $T$  požadovaných vlastností. Keďže  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^r} = 0$ , existuje k nášmu číslu  $\varepsilon > 0$  prstencové okolie  $U$  bodu 0 také, že

$$(\forall x \in U \cap D(f))(|f(x)| < \varepsilon |x|^r).$$

Nech  $V_1 := U \cup \{0\}$ . Podľa našich predpokladov je  $f(0) = 0$ , odtiaľ a z predchádzajúcej nerovnosti dostávame

$$(\forall x \in V_1 \cap D(f))(|f(x)| \leq \varepsilon |x|^r),$$

a teda — ak písmenom  $V$  označíme okolie  $V_1 \cap O$  (okolie  $O$  pozri v (212))

$$(\forall x \in V)(|f(x)| \leq \varepsilon |x|^r). \quad (215)$$

Pretože  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  (pozri (211)), existuje k okoliu  $V$  prstencové okolie  $W$  s vlastnosťou

$$(\forall x \in W \cap D(g))(g(x) \in V),$$

preto — keďže podľa (213) je  $S \subset D(g)$  — pre prstencové okolie  $W_1 := W \cap S$  platí

$$(\forall x \in W_1)(g(x) \in V). \quad (216)$$

Ďalej, z rovnosti  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^s} = 0$  vyplýva ohraničenosť limitovanej funkcie na niektorom prstencovom okolí  $W_2$  bodu 0, tj. na množine  $W_2 \cap D(g)$ , a teda iste na množine  $W_2 \cap S$  (keďže  $S \subset D(g)$ ), preto

$$(\forall x \in W_2)(|g(x)| < |x|^s). \quad (217)$$

Pre všetky  $x$  z prstencového okolia  $W_1 \cap W_2 \cap S$  bodu 0 potom platí

$$|f(g(x))| \leq \varepsilon |g(x)|^r < \varepsilon |x^s|^r = |x|^{rs}$$

(prvá nerovnosť vyplýva z (216) a (215), druhá z (217)), za hľadané prstencové okolie  $T$  môžeme preto zvoliť  $T := W_1 \cap W_2 \cap S$  <sup>117</sup>. ♠

Inklúzie z predchádzajúcej lemy sa pri ich používaní pre jednoduchosť zapisujú ako rovnosti; pri čítaní takýchto zápisov je teda potrebná istá opatrnosť: keďže ide v skutočnosti o inklúzie, nemožno tieto "rovnosti" čítať sprava doľava. Pri uvedenej dohode budú mať tvrdenia predchádzajúcej lemy túto podobu:

- (a) ak  $r > s$ , tak  $x^r = o(x^s)$ ;
- (b) ak  $r > s$ , tak  $o(x^r) = o(x^s)$ ;
- (c) ak  $r \geq s$ , tak  $o(x^r) + o(x^s) = o(x^s)$ ;
- (d)  $-o(x^r) = o(x^r)$ ;
- (e)  $x^r o(x^s) = o(x^{r+s})$ ;
- (f)  $o(x^r) o(x^s) = o(x^{r+s})$ ;
- (g) ak  $f(x) = o(x^r)$ , tak  $f(x^s) = o(x^{rs})$ ;
- (h) ak  $f = o(x^r)$  a  $f(0) = 0$ , tak  $f(o(x^s)) = o(x^{rs})$ . ♠

Podľa tvrdenia (a) vety .108 platí pre zvyšok  $R_n$  Taylorovho polynómu  $T_n$  rádu  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$  inklúzia  $R_n \in o((x-a)^n)$ , preto pre funkciu  $f$  platí (v zmysle našich predchádzajúcich dohôd) rovnosť

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n) \quad \text{pre } x \rightarrow a,$$

ktorá sa nazýva *Taylorov vzorec so zvyškom v Peanovom tvare*.

Samozrejme, inklúzia  $R_n \in o((x-a)^n)$  nám nedáva žiadnu informáciu o veľkosti zvyšku  $R_n$  v konkrétnom bode  $x$  (samozrejme, s výnimkou bodu  $a$ ). Nasledujúca veta ukazuje, že číslo  $R_n(x)$  (tj. veľkosť chyby, ktorej sme sa pri nahradení čísla  $f(x)$  číslom  $T_n(x)$  dopustili) možno odhadnúť, pokiaľ vieme odhadnúť veľkosť  $(n+1)$ -vej derivácie funkcie  $f$  na intervale s krajnými bodmi  $a, x$ .

**.110** Veta. *Nech funkcia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  je  $(n+1)$ -krát diferencovateľná na intervale  $I$  a nech  $g : I \rightarrow \mathbf{R}$  je diferencovateľná funkcia, pre ktorú platí*

$$(\forall x \in I \setminus \{a\})(g'(x) \neq 0),$$

pričom  $a \in I$ . Potom pre každé  $x \in I \setminus \{a\}$  existuje bod  $c$  ležiaci v otvorenom intervale s koncovými bodmi  $a, x$  taký, že zvyšok  $R_n := f - T_n$  Taylorovho polynómu  $T_n$  rádu  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$  možno vyjadriť v tvare

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g'(c)}. \quad (218)$$

Špeciálne, ak  $g(x) = x - a$ , dostávame zvyšok  $R_n$  v Cauchyho tvare

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!}, \quad (219)$$

pre  $g(x) = (x-a)^{n+1}$  dostávame Lagrangeov tvar zvyšku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad (220)$$

<sup>117</sup>z tohto dôkazu tiež vidno, že uvedené tvrdenie by zostalo v platnosti, keby sme predpoklad  $g \in o(x^s)$  nahradili predpokladom funkcia  $\frac{g(x)}{x^s}$  je definovaná a ohraničená na niektorom prstencovom okolí bodu 0

**Dôkaz.** Nech  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$  je funkcia s predpisom <sup>118</sup>

$$F(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \dots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

potom

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = F(x) - F(a)$$

a pre  $t \in I$  je <sup>119</sup>

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \left(-f'(t) + f''(t)(x-t)\right) + \dots + \left(-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) + \\ &+ \dots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Z Cauchyho vety o strednej hodnote použitej pre funkcie  $F$  a  $g$  na intervale s koncovými bodmi  $x$  a  $a$  (splnenie jej predpokladov zaručuje okrem iného poznámka 1 za vetou.91) vyplýva existencia čísla  $c$  ležiaceho "medzi  $x$  a  $a$ ", pre ktoré platí

$$\frac{R_n(x)}{g(x) - g(a)} = \frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g'(c)},$$

ak túto rovnosť vynásobíme číslom  $g(x) - g(a)$ , dostaneme (218). Preverenie rovností (219) a (220) (tj. dosadenie konkrétnych funkcií do (218)) prenechávame na čitateľa.

---

<sup>118</sup>predpis pre  $F$  dostaneme tak, že v predpise Taylorovho polynómu  $T_n$  nahradíme bod  $a$  premennou  $t$  a  $x$  budeme chápať ako konštantu

<sup>119</sup>nezabudnime, že derivujeme podľa  $t$