4. DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIÍ JEDNEJ PREMENNEJ

4.1. Definícia derivácie

Hovoríme, že funkcia f (definovaná v okolí bodu a *)) má deriváciu v bode a ($a \in R$), ak existuje konečná $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ak existuje nevlastná $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, hovoríme, že funkcia f má nevlastnú (alebo nekonečnú) deriváciu v bode a. Hodnotu $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ v obidvoch týchto prípadoch označujeme $f'(a)$. Ak nás nezaujíma, či je $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ konečná alebo nekonečná, používame spoločný názov vlastná alebo nevlastná derivácia v bode a.

Pojmy derivácie sprava a nevlastnej derivácie sprava, resp. derivácie zľava a nevlastnej derivácie zľava dostaneme, ak v predchádzajúcich definíciách $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nahradíme limitou $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, resp. $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (v takom prípade stačí predpokladať, že definičný obor funkcie f obsahuje interval $\langle a, a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon, a\rangle$ pre niektoré $\varepsilon > 0$). Hodnoty $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, resp. $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ označujeme $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$.

Veta 1. Funkcia f (definovaná v okolí bodu $a \in R$) má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu $f'(a)$ práve vtedy, keď existujú $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$. Hodnota $f'(a)$ sa pritom rovná spoločnej hodnote $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Pojem derivácie ako funkcie sa vo všeobecnosti definuje nasledovne: Nech M je množina všetkých bodov definičného oboru $D(f)$, v ktorých má funkcia f deriváciu. Funkcia $f': M \to R$, ktorá každému bodu a M priradí hodnotu $f'(a)$ derivácie funkcie f v bode a, sa nazýva derivácia funkcie f. V špeciálnych prípadoch, ktoré ilustruje nasledujúca poznámka, sa niekedy

*) tj. pre niektoré $\varepsilon > 0$ platí $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset D(f)$; pojmy derivácie a nevlastnej derivácie v bode a by bolo možné zaviesť aj za slabšieho predpokladu „$a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$" (odstránili by sa tým aj niektoré ťažkosti so zavedením pojmu derivácie ako funkcie), definícia predpokladajúca, že a je vnútorný bod množiny $D(f)$, je však v literatúre najčastejšia

pojem derivácie ako funkcie chápe širšie: ak definičným oborom funkcie f je niektorý z intervalov $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$, pričom v jeho koncovom bode existuje jednostranná derivácia (v prvom prípade prichádzajú do úvahy body a, b, v druhom bod a, v treťom bod b), tak funkciu f' považujeme za definovanú aj v tomto bode, jej funkčnou hodnotou je hodnota príslušnej jednostrannej derivácie.

279. Výpočtom $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nájdite deriváciu funkcie f v bode a, ak:

1. $f(x) = x^2$, $a = 0{,}1$; 2. $f(x) = 2 \sin 3x$, $a = \frac{\pi}{6}$;

3. $f(x) = 1 + 2 \ln x$, $a = 1$; 4. $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$;

5. $f(x) = e^x$, $a = \ln 2$.

280. Ukážte, že funkcia f má v bode a nevlastnú deriváciu, ak:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $a = 1$; 2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $a = 0$.

281. Výpočtom $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nájdite $f'(x)$ a zistite definičný obor funkcie f', ak:

1. $f(x) = x^3 + 2x$; 2. $f(x) = x \sqrt[3]{x}$;

3. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; 4. $f(x) = 2^{x+1}$;

5. $f(x) = \ln x$; 6. $f(x) = \operatorname{ctg} x + 2$;

7. $f(x) = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$; 8. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

282. Výpočtom príslušných limít nájdite $f'_+(a)$, $f'_-(a)$, ak:

1. $f(x) = |\cos x|$, $a = \frac{\pi}{2}$; 2. $f(x) = [x] \sin \pi x$, $a = 1$;

3. $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $a = 2$, $a = 3$.

283. Porovnaním hodnôt $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ zistite, či existuje $f'(a)$, ak:

1. $f(x) = \begin{cases} x & , \text{ ak } x < 0 \\ \ln(1 + x), & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$, $a = 0$;

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ak } x \leq -1 \\ -2x, & \text{ak } x > -1 \end{cases}$, $a = -1$;

3. $f(x) = x|x|$, $a = 0$; 4. $f(x) = |\sin^3 x|$, $a = \pi$.

284. 1. Ak existuje vlastná derivácia funkcie f v bode 0, tak platí

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} .$$

Dokážte!

2. Rozhodnite, či z existencie $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ vyplýva existencia $f'(0)$; svoje tvrdenie dokážte!

285_o. Ak $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je derivácia nepárnej funkcie f, tak f' je párna funkcia. Dokážte! (Definíciu párnej a nepárnej funkcie pozri v pr. 146.)

Veta 2. Ak funkcie f, g majú derivácie v bode a, tak aj funkcie c.f (c je reálna konštanta), f + g, f - g, f.g majú v bode a derivácie a platí

$$(c.f)'(a) = c.f'(a) ,$$

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) ,$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a) ,$$

$$(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a) .$$

Ak naviac $g(a) \neq 0$, majú v bode a deriváciu aj funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ a platí

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)} ,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)} .$$

Veta 3. Ak funkcia f má deriváciu v bode a, funkcia g deriváciu v bode f(a) a zložená funkcia $h = g \circ f$ je definovaná v okolí bodu a, tak h má v bode a deriváciu a platí

$$h'(a) = f'(a).g'(f(a)) .$$

(Analogické vety možno dokázať aj pre jednostranné derivácie.)

V nasledujúcej tabuľke sú derivácie základných elementárnych funkcií (c je reálna konštanta):

$c' = 0$, $\qquad (x^n)' = n\,x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

$(\sin x)' = \cos x$, $\qquad (\cos x)' = -\sin x$,

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

$(a^x)' = a^x \ln a$, špeciálne $(e^x)' = e^x$,

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, špeciálne $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$,

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$, $\qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Pre deriváciu hyperbolických funkcií platia nasledujúce vzorce

$(\mathrm{sh}\ x)' = \mathrm{ch}\ x$, $(\mathrm{ch}\ x)' = \mathrm{sh}\ x$,

$(\mathrm{th}\ x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $(\mathrm{cth}\ x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

Ak pri hľadaní derivácie funkcie využívame len znalosť derivácií základných elementárnych funkcií a vety o derivácii súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a zloženej funkcie, nazýva sa taký postup <u>tabuľkovým derivovaním</u>.

286. Nájdite derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $y = 2 + x - x^2$; 2. $y = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - x^{-\sqrt{5}}$;

3. $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$; 4. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}$;

5. $y = (3x - 7)^{10}$; 6. $y = x\sqrt{1 + x^2}$;

7. $y = \dfrac{(1 - x)^p}{(1 + x)^q}$, $p > 1$, $q > 0$; 8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}\,(x + \sqrt{1 + x^2})}$;

9. $y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}}$; 10. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

287. Nájdite $f'(a)$, ak $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, kde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia spojitá v bode a.

288. 1. Ukážte, že funkcia $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, kde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a $\varphi(a) \neq 0$, nemá deriváciu v bode a.

2. Ukážte, že funkcia $f(x) = |x - a|^{1+\varepsilon}\varphi(x)$, kde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $\mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, má v bode a deriváciu $f'(a) = 0$.

289. Nájdite deriváciu funkcie

1. $y = x \cos x$; 2. $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$;

3. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}\ x}$; 4. $y = \sin^n x \cos nx$;

5. $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$; 6. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

7. $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{ctg}\ x} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \mathrm{tg}\ x}$; 8. $y = \sqrt{1 + \mathrm{tg}(x^2 + x^{-2})}$.

290. Nájdite derivácie funkcií:

1. $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$; 2. $y = e^{-x^2}$;

3. $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$; 4. $y = 2^{\sin x^2}$;

5. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$;

6. $y = e^{ax} . \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

7. $y = (\frac{a}{b})^x (\frac{b}{x})^a (\frac{x}{a})^b$;

8. $y = (\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x)e^{-x}$.

291. Možno tvrdiť, že neexistuje $(f + g)'(a)$ (funkcie f, g sú definované v okolí bodu a), ak:
1. existuje vlastná $f'(a)$ a neexistuje $g'(a)$?
2. f má v bode a nevlastnú deriváciu a neexistuje $g'(a)$?
3. neexistuje $f'(a)$ ani $g'(a)$?

292. Nech f, g sú spojité funkcie definované na $\mathbb{R}$, $g'(a) = +\infty$, $f'(g(a)) > 0$. Potom existuje nevlastná derivácia funkcie $f \circ g$ v bode a. Dokážte!

Nájdite derivácie funkcií:

293. 1. $y = \log_3(\mathrm{tg}\, \frac{x}{2})$;

2. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

3. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$;

4. $y = \frac{1}{2} \ln (1 + x) - \frac{1}{4} \ln (1 + x^2) - \frac{1}{2 (1 + x)}$;

5. $y = x \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$;

6. $y = e^{\sqrt{\log_2(x^2 + x + 1)}}$;

7. $y = \frac{1}{\sin a} \ln \frac{1 + x}{1 - x} - \mathrm{ctg}\, a . \ln \frac{1 + x \cos a}{1 - x \cos a}$;

8. $y = x (\sin (\ln x) - \cos (\ln x))$;

9. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln (\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})$;

10. $y = \log_2 x . \log_3 x . \ln x$.

294. 1. $y = \sqrt{x} - \mathrm{arcctg}\, \sqrt{x}$;

2. $y = x \arcsin x$;

3. $y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$;

4. $y = \mathrm{arctg}\, \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

5. $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1 + x}} + \mathrm{arctg}\, \sqrt{x} - \sqrt{x}$;

6. $y = \ln (\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})$;

7. $y = 3^{\mathrm{arctg}\, (2x + \pi)}$;

8. $y = \arcsin (\frac{\sin a . \sin x}{1 - \cos a . \cos x})$;

9. $y = x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x$;

10. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right)$.

295. 1. $y = \dfrac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}$; 2. $y = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{(x + 2)^2} \sqrt{(x + 3)^3}}$;

3. $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sin 3x}{1 - \sin 3x}}$, $x \in (0, \frac{\pi}{6})$; 4. $y = x^x$, $x > 0$;

5. $y = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$; 6. $y = x^{x^2}$, $x > 0$;

7. $y = (\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Riešenie: 1. Výpočet sa zjednoduší nasledujúcou úvahou: ak funkcia f má v bode a deriváciu a $f(a) \neq 0$, tak $(\ln |f|)'(a) = \frac{1}{f(a)} f'(a)$; odtiaľ možno vyjadriť

$$f'(a) = f(a).(\ln |f|)'(a) .$$

V našom prípade $y = \dfrac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}$, $(\ln |y|)' = (\ln |1 + x^2| - \frac{4}{3} \ln |x| - 7 \ln |\sin x|)' =$

$= \dfrac{2x}{1 + x^2} - \dfrac{4}{3x} - 7 \operatorname{ctg} x = \dfrac{2x^2 - 4}{3x(1 + x^2)} - 7 \operatorname{ctg} x$. Teda $y' = \dfrac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x} . \left(\dfrac{2x^2 - 4}{3x(1 + x^2)} - 7 \operatorname{ctg} x\right)$.

4. Funkcie tvaru f^g (o funkcii f predpokladáme, že je nezáporná) možno derivovať na základe úvahy z riešenia pr. 295.1 alebo (čo je vlastne to isté) prepísať ich predpis do podoby $e^{g \,.\, \ln f}$ a takto zapísanú funkciu potom derivovať na základe viet o derivácii súčinu a zloženej funkcie.

V našom prípade $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} . (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$.

296. Uveďte príklad funkcií f, g takých, že

1. neexistujú $f'(a)$ ani $g'(a)$, ale existuje vlastná $(f.g)'(a)$;
2. neexistuje $g'(a)$, ale existujú vlastné $f'(a)$ a $(f.g)'(a)$.

(Inšpiráciou môžu byť príklady 287 a 288.)

297. Nech $f: R \to R$ je spojitá funkcia, nech v bode a je $f(a) \neq 0$ a existuje nevlastná $f'(a)$. Potom funkcia $\frac{1}{f}$ má v bode a nevlastnú deriváciu $-f'(a)$. Dokážte!

298. Nech funkcia f je definovaná v okolí O(a) bodu a, pričom pre všetky $x \in O(a)$ platí $|f(x) - f(a)| < K |x - a|$, kde K je kladná konštanta. Nech funkcia g má deriváciu v bode f(a), $g'(f(a)) = 0$. Potom funkcia $g \circ f$ má deriváciu v bode a rovnú 0. Dokážte!

299. Nájdite derivácie funkcií:

1. $y = \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $0 \leqslant a < b$;

2. $y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2\sin x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x)$;

3. $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

4. $y = x\ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x$;

5. $y = \ln \frac{x + a}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$;

6. $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}$;

7. $y = x - \ln\sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-x}\operatorname{arccotg} e^x$;

8. $y = \frac{3 - \sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x - 2\sin x} + 2\arcsin x \cdot \frac{1 + \sin x}{\sqrt{2}}$;

9. $y = e^{m\arcsin x}(\cos(m\arcsin x) + \sin(m\arcsin x))$, $|x| < 1$;

10. $y = \ln\sqrt{x^2 - 2x\cos a + 1} + \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{arctg}\frac{x - \cos a}{\sin a}$;

11. $y = |(x - 1)^2(x + 1)^3|$; 12. $y = [x]\sin^2 \pi x$;

13. $y = \begin{cases} 1 - x & \text{, ak } x < 1 \\ (1 - x)(2 - x) & \text{, ak } x \in \langle 1, 2\rangle \\ -(2 - x) & \text{, ak } x > 2 \end{cases}$;

14. $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{, ak } |x| \leqslant 1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x - 1}{2} & \text{, ak } |x| > 1 \end{cases}$;

15. $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$; 16. $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

17. $y = (\arcsin \sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}$; 18 $y = x^{x^x}$;

19. $y = x^{\frac{2}{\ln x}} - 2x^{\log_x e} \cdot e^{1 + \ln x} + e^{1 + \frac{2}{\log_x e}}$.

300. Ako treba vybrať koeficienty a, b, aby funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, ak } x \leqslant x_0 \\ ax + b & \text{, ak } x > x_0 \end{cases}$$

bola spojitá a mala deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$?

301. Ak funkcie $f_1, \ldots, f_n$ majú deriváciu v bode a, tak $(f_1 . f_2 . \ldots . f_n)'(a) = f_1'(a).f_2(a). \ldots . f_n(a) + f_1(a).f_2'(a).f_3(a). \ldots . f_n(a) + \ldots + f_1(a). \ldots . f_{n-1}(a).f_n'(a)$. Dokážte! Na základe toho nájdite $f'(0)$, ak $f(x) = x.(x-1). \ldots . (x-1000)$.

302. Nech nezáporné funkcie f, g majú deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$. Nájdite deriváciu funkcie y, ak

1. $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$; 2. $y = \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{g(x)}$;

3. $y = \log_{f(x)} g(x)$ $(f(x) > 1)$; 4. $y = f(x^2)$;

5. $y = f(\sin^2 x) + g(\cos^2 x)$; 6. $y = f(e^x).e^{f(x)}$.

303. Nájdite vzorce pre súčty:

1. $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$;

2. $Q_n(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2}$, $|x| \neq 1$;

3. $R_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$, $x \neq 1$;

4. $T_n(x) = \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n \cos nx$, $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

304. Ako treba voliť číslo $\alpha \in \mathbb{R}$, aby funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$$

bola

1. spojitá v bode 0 ?
2. mala deriváciu v bode 0 ?
3. mala deriváciu, ktorá je spojitá v bode 0 ?

305. Možno použiť vetu o derivácii zloženej funkcie na výpočet derivácie funkcie $y = \sin^2(\sqrt[3]{x^2})$ v bode 0? Existuje táto derivácia?

306. Zostrojte funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby

1. definičným oborom jej derivácie bola množina $\{1, 2\}$;
2. bola rastúca, mala vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$ a pre každé $n \in \mathbb{Z}$ platilo $f'(n) = +\infty$;
3. mala deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$, funkcia f' bola nespojitá práve v bodoch množiny $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a aby platilo $f'(n) = a$ (a je dané reálne číslo) pre každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Veta 4. Ak funkcia f má v bode a deriváciu, tak f je v tomto bode spojitá.

307_0. Nech funkcia f má v bode a obidve jednostranné derivácie. Potom f je spojitá v bode a. Dokážte!

308. Uveďte príklad funkcie, ktorá je spojitá v každom bode množiny $\mathbb{R}$ a nemá vlastnú ani nevlastnú deriváciu v žiadnom bode množiny $\mathbb{N}$!

309. Uveďte príklad funkcie f takej, že $f'(a) = -\infty$ a
1. f je spojitá v bode a ;
2. a je bod nespojitosti 1. druhu funkcie f ;
3. a je bod nespojitosti 2. druhu funkcie f .

4.2. Derivácia inverznej funkcie

Veta 5. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$, rýdzomonotónna na intervale I, má deriváciu v bode a. Potom inverzná funkcia f^{-1} má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v bode $f(a)$, pričom platí

a/ ak $f'(a) \neq 0$, tak $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$;

b/ ak $f'(a) = 0$ a f je rastúca, tak $(f^{-1})'(f(a)) = +\infty$;

c/ ak $f'(a) = 0$ a f je klesajúca, tak $(f^{-1})'(f(a)) = -\infty$.

310. Nájdite deriváciu funkcie f^{-1} v bode b, ak
1. $f(x) = x + \frac{1}{5}x^5$, α/ $b = 0$, β/ $b = \frac{6}{5}$;
2. $f(x) = 2x - \frac{1}{2}\cos x$, $b = -\frac{1}{2}$;
3. $f(x) = 0{,}1\,x + e^{0{,}1\,x}$, $b = 1$;
4. $f(x) = 2x^2 - x^4$, $x > 1$, $b = 0$;
5. $f(x) = 2x^2 - x^4$, $x \in (0, 1)$, $b = \frac{3}{4}$.

Riešenie: 1 α/. Pretože $b = f(0)$ a $f'(x) = 1 + x^4$, je podľa vety 5 $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.
(Ako sa presvedčíme o rýdzej monotónnosti funkcie f, ukážeme neskôr - pozri vetu 11.)

311. Odvoďte vzorec pre deriváciu inverznej funkcie z vety o derivácii zloženej funkcie a stanovte predpoklady, za ktorých možno toto odvodenie vykonať!

312. Na základe vety o derivácii inverznej funkcie nájdite deriváciu funkcií
1. $f(x) = \arcsin x$;
2. $f(x) = \arccos x$;
3. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
4. $f(x) = \operatorname{arccotg} x$;
5. $f(x) = \ln x$.

313. Nech f je prostá spojitá funkcia definovaná na intervale $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kde ε je dané kladné číslo, nech $f'(0) = \infty$, $f(0) = 0$. Potom funkcia f^{-1} má v bode 0 deriváciu rovnú 0. Dokážte!

4.3. Diferenciál

Hovoríme, že funkcia f (definovaná v okolí bodu a *)) má v bode a diferenciál (je diferencovateľná v bode a), ak existuje reálna konštanta A taká, že pre funkciu ω, definovanú vzťahom

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \omega(x)$$

platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\omega(x)}{x - a} = 0$.

Funkcia definovaná predpisom $y = A(x - a)$ sa v takom prípade označuje $df(a)$ a nazýva sa diferenciál funkcie f v bode a. Funkcia $df(a)$ sa zvyčajne zapisuje v tvare $df(a) = A\,dx(a)$ **), kde symbol $dx(a)$ (označujúci diferenciál funkcie $g(x) = x$ v bode a, tj. funkciu danú predpisom $y = x - a$) sa nazýva diferenciál nezávisle premennej.

Veta 6. Funkcia f je diferencovateľná v bode a práve vtedy, keď f má v bode a deriváciu; pritom platí $A = f'(a)$, kde A je konštanta z definície diferenciálu funkcie f v bode a.

Graf funkcie $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ je dotyčnicou v bode $(a, f(a))$ ku grafu funkcie f. Ak je funkcia f spojitá v bode a, pričom $f'(a)$ je nevlastná, je dotyčnicou v bode $(a, f(a))$ ku grafu funkcie f priamka $x = a$.

314. Nájdite dotyčnicu v bode A ku krivke $y = f(x)$, ak:

1. $f(x) = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$, α/ $A = (-1, 0)$, β/ $A = (2, 3)$;
2. $f(x) = |x - 1| \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $A = (0, 1)$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $A = (1, 0)$;
4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, A je priesečník krivky $y = f(x)$ s hyperbolou $y = \dfrac{1}{1 + x}$.

315. Nájdite rovnicu tej dotyčnice k parabole $y = x^2 - 2x + 3$, ktorá je

1. rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$;
2. kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$.

---

*) rovnako ako deriváciu v bode a možno aj diferenciál v bode a definovať za slabšieho predpokladu „$a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$"

**) písmeno a sa v zápisoch často vynecháva, ~~preto sa~~ možno stretnúť aj so zápisom $df = A\,dx$

316. 1. Aký musí byť vzťah medzi koeficientami a, b, c, aby sa parabola $y = ax^2 + bx + c$ dotýkala priamky $y = 0$?

2. Pre akú hodnotu parametra a sa parabola $y = ax^2$ dotýka krivky $y = \ln x$?

317. Pomocou derivácie a diferenciálu nezávisle premennej zapíšte df(a), ak funkcia f je daná predpisom:

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 2. $f(x) = \sqrt{A^2 + x^2}$;

3. $f(x) = \ln(1 - x^2)$; 4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

318. Nech u, v, w sú kladné diferencovateľné funkcie, nájdite diferenciál funkcie y v bode a, ak

1. $y = u.v.w$; 2. $y = \dfrac{u}{v^2}$;

3. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{w}$; 4. $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$.

319. Pomocou diferenciálu odvoďte približné vzťahy pre výpočet nasledujúcich výrazov:

1. $\sqrt{a^2 + x^2}$ ($a > 0$, x dostatočne malé) ;

2. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ (x blízke 0) ;

3. $\operatorname{arctg}(1 + x)$ (x blízke 0) ;

4. $\sqrt[n]{a^n + x}$ ($a > 0$, x blízke 0) ;

5. $\ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ (x blízke číslu $\frac{\pi}{2}$) .

Riešenie: 5. Funkcia daná predpisom $f(x) = \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ má v bode $\frac{\pi}{2}$ deriváciu $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$, preto je podľa vety 6 diferencovateľná a možno ju teda písať v tvare $f(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{2}) + \omega(x) = (x - \frac{\pi}{2}) + \omega(x)$, kde $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\omega(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$. Zanedbaním funkcie $\omega(x)$ dostaneme približný vzorec $\ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) \approx (x - \frac{\pi}{2})$ pre x blízke číslu $\frac{\pi}{2}$. (Geometricky to znamená, že hodnoty funkcie f nahrádzame funkčnými hodnotami jej dotyčnice v bode $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $\omega(x)$ vyjadruje chybu, ktorej sa pri takomto nahradení dopúšťame.)

320. Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Potom sú nasledujúce dva výroky ekvivalentné:

a/ funkcia f je diferencovateľná v bode a ;

b/ existuje funkcia φ (s rovnakým definičným oborom ako f), ktorá je spojitá v bode a, pričom platí $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$.

(Výrok b/ sa nazýva Čechova definícia diferenciálu.)

4.4. Derivácie vyšších rádov

Derivácie vyšších rádov definujeme rekurentne: Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$; označme $f^{(0)} := f$. Hovoríme, že funkcia f má n-tú deriváciu v bode a, resp. nevlastnú n-tú deriváciu v bode a, ak existuje derivácia, resp. nevlastná derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ v bode a. n-tú deriváciu v bode a aj nevlastnú n-tú deriváciu v bode a označujeme $f^{(n)}(a)$. (Analogicky sa definujú vlastné a nevlastné jednostranné n-té derivácie v bode a.) Derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ sa nazýva n-tá derivácia funkcie f a označuje sa $f^{(n)}$. Okrem označení $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, ... sa používajú aj označenia f', f'', f''', f'''' (alebo f^{IV}), f^{V}, ...

Platia nasledujúce vzťahy:

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!\, x^{m-n}}{(m-n)!}, & \text{ak } n \leq m \\ 0, & \text{ak } n > m \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln^n a}, \ x > 0 \qquad (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \ x > 0$$

Veta 7 (Leibnizov vzorec). Ak funkcie f, g majú n-tú deriváciu v bode a, tak existuje $(f.g)^{(n)}(a)$ a platí

$$(f.g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a).g^{(n-k)}(a) .$$

321. Nájdite y'', ak

1. $y = x\sqrt{1+x^2}$;
2. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. $y = e^{-x^2}$;
4. $y = (1+x^2)\,\mathrm{arctg}\, x$;
5. $y = x \ln x$;
6. $y = x(\sin \ln x + \cos \ln x)$.

322. Nájdite určené derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, $\qquad y^{VI}, y^{VII}$;
2. $y = (2x-7)^2(3x+7)^3$, $\qquad y^{V}, y^{VI}$;
3. $y = \sqrt{x}$, $\qquad y^{(10)}$;
4. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$, $\qquad y^{(22)}$;

5. $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$, $\qquad y^{(13)}$;

6. $y = \sin 2x \cdot \cos 4x$, $\qquad y^{(15)}$;

7. $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$, $\qquad y^{(10)}$.

Riešenie: 1. Funkcia y je polynóm 6. stupňa, teda $y = a_0x^6 + a_1x^5 + \dots + a_6$; nie je ťažké vypočítať, že $a_0 = 4$. Potom $y^{VI} = (a_0x^6 + a_1x^5 + \dots + a_6)^{VI} = a_0(x^6)^{VI} + a_1(x^5)^{VI} + \dots + a_5x^{VI} = 6!\, a_0 = 6!\, 4 = 2880$. $y^{VII} = 0$ (rád derivácie je vyšší ako stupeň polynómu).

5. Funkciu y možno zapísať v podobe, ktorá je pre derivovanie výhodnejšia:

$$y = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{(x+2)+(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} .$$

Potom $y^{(13)} = ((x-1)^{-1})^{(13)} + ((x+2)^{-1})^{(13)} = (-1)^{13}\, 13!\, (x-1)^{-14} + (-1)^{13}\, 13!\, (x+2)^{-14} = -(13!)\left(\frac{1}{(x-1)^{14}} + \frac{1}{(x+2)^{14}}\right)$.

323. Pomocou Leibnizovho vzorca nájdite určené derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; $\qquad y^{(100)}$;

2. $y = x \ln x$; $\qquad y^{V}$;

3. $y = x^2 \sin 2x$; $\qquad y^{(50)}$;

4. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, $\qquad y'''$;

5. $y = (x^2 - 2x) \cos 3x$, $\qquad y^{(101)}$;

6. $y = (x - \sin x)^2$, $\qquad y^{(16)}$;

7. $y = x \sin x \cos 2x$, $\qquad y^{(100)}$.

324_o. Ak funkcia f má derivácie až do rádu n, tak platí

$$(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) .$$

Dokážte!

325. Nájdite $y^{(n)}$, ak:

1. $y = \ln(ax+b)$; $\qquad$ 2. $y = \frac{1}{x(1-x)}$;

3. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$; $\qquad$ 4. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

5. $y = \sin^2 x$; $\qquad$ 6. $y = \sin 3x \cos 5x$;

7. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 8. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

326. Nájdite $y^{(n)}$, ak:

1. $y = (x - 1)\, 2^{x-1}$; 2. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x}}$;

3. $y = x^2 \sin bx$; 4. $y = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x}$;

5. $y = x \log_2(1 - 3x)$; 6. $y = (3 - 2x)^2\, e^{2-3x}$.

327. Nájdite $f^{(n)}(0)$, ak:

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - 2x)(1 + x)}$; 2. $f(x) = x^2 e^{2x}$;

3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$; 4. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$;

5. $f(x) = \arcsin x$; 6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

7. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2}$.

Riešenie: 6. Pretože $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, platí $(1 + x^2)\, f'(x) = 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. To znamená, že funkcia $(1 + x^2)\, f'(x)$ je na $\mathbb{R}$ konštantná, preto jej derivácie všetkých rádov sú rovné 0:

$$\left[(1 + x^2)\, f'(x)\right]^{(k)} = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}) .$$

Položme $k = n - 1$; pre $n = 2$ má uvedená rovnosť tvar

$$(1 + x^2)\, f''(x) + 2x\, f'(x) = 0 \qquad (\ast)$$

a pre $n \geqslant 3$ použitím Leibnizovho vzorca dostaneme

$$(1 + x^2)\, f^{(n)}(x) + 2\,(n - 1)\, x\, f^{(n-1)}(x) + (n - 1)(n - 2)\, f^{(n-2)}(x) = 0 .$$

(Až pre $k \geqslant 2$, tj. $n \geqslant 3$, obsahuje Leibnizov vzorec všetky nenulové derivácie funkcie $1 + x^2$, zápis prvej derivácie funkcie $(1 + x^2)\, f'(x)$ sa teda odlišuje od zápisu k-tej derivácie tejto funkcie pre $k \geqslant 2$, preto treba prípad $k = 1$ robiť samostatne.)

Ak v poslednej rovnosti položíme $x = 0$, dostávame pre $n \geqslant 3$

$$f^{(n)}(0) = -\,(n - 1)(n - 2)\, f^{(n-2)}(0) ,$$

čo je rekurentný vzťah pre vyjadrenie $f^{(n)}(0)$. Dosadením do predpisu pre f' dostaneme $f'(0) = 1$, z $(\ast)$ vychádza $f''(0) = 0$. Na základe toho môžeme matematickou indukciou dokázať, že $f^{(2k+2)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$.

Poznámka: Predchádzajúca úvaha má (našťastie len zdanlivo) jeden nedostatok: ak chceme použiť Leibnizov vzorec na výpočet (n-1)-vej derivácie súčinu $(1 + x^2).f'(x)$, treba sa najprv presvedčiť, že existujú (n-1)-vé derivácie funkcií $(1+x^2)$ a $f'(x)$ (tj. $(1 + x^2)^{(n-1)}$ a $f^{(n)}(x)$); to sme ale neurobili.

Dokázať, že existuje $(1 + x^2)^{(n-1)}$, je ľahké; zostáva teda dokázať existenciu $(\operatorname{arctg} x)^{(n)}$. (Návod: možno postupovať indukciou; z predpokladu, že $f^{(k-1)}$ je podielom polynómov P_{k-1} a Q_{k-1}, pričom Q_{k-1} nemá reálne korene, vyplýva na základe vety o derivácii podielu, že $f^{(k)}$ existuje a možno ju zapísať v tvare podielu polynómov P_k a Q_k, pričom Q_k nemá reálne korene.)

328_0. Dokážte, že funkcia definovaná predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases}$$

($n \in \mathbb{N}$) má v bode 0 derivácie až do rádu n, ale nemá (n+1)-vú deriváciu v tomto bode.

4.5. Základné vety diferenciálneho počtu

<u>Veta 8</u> (Rolle). Nech funkcia $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

(i) f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$;

(ii) v každom bode $x \in (a, b)$ existuje vlastná alebo nevlastná $f'(x)$;

(iii) $f(a) = f(b)$.

Potom existuje bod $c \in (a, b)$, v ktorom $f'(c) = 0$.

329. Nech funkcia f je spojitá na intervale (a, b), kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, nech pre každé $x \in (a, b)$ existuje vlastná alebo nevlastná nenulová $f'(x)$. Potom f je prostá na intervale (a, b). Dokážte!

330. Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ (to znamená, že existujú $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ definované na intervale $\langle a, b\rangle$) a má tam nulové hodnoty v n+1 bodoch. Potom existuje také $c \in (a, b)$, že $f^{(n)}(c) = 0$. Dokážte!

331. Ak sú všetky korene polynómu $P_n(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ ($a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$) reálne, tak aj jeho derivácie $P_n', \dots, P_n^{(n-1)}$ majú len reálne korene.

(Komplexné číslo a sa nazýva m-násobný koreň polynómu P_n ($n \geq m$, $n, m \in \mathbb{N}$), ak možno P_n písať v tvare $P_n(x) = (x - a)^m Q_{n-m}(x)$, pričom číslo a nie je koreňom polynómu Q_{n-m}. Základná veta algebry hovorí, že súčet násobností navzájom rôznych komplexných koreňov polynómu sa rovná jeho stupňu. Teda polynóm P_n stupňa n má všetky korene reálne práve vtedy, keď súčet násobností jeho navzájom rôznych reálnych koreňov je n.)

332. Ukážte, že rovnica $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ má len jeden koreň, pričom tento koreň je prostý (prostými sa nazývajú jednonásobné korene polynómu).

333. Nech funkcia $f:(a, b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, je spojitá, má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$ a nech $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x)$. Potom existuje $c \in (a, b)$, v ktorom $f'(c) = 0$. Dokážte!

334. Zostrojte funkciu f definovanú na intervale $\langle a, b \rangle$, pre ktorú $f(a) = f(b)$, pre každé $x \in (a, b)$ existuje vlastná $f'(x)$ a pre všetky $x \in (a, b)$ platí $f'(x) \neq 0$.

335. Funkcia $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ nadobúda nulové hodnoty pre $a = -1$, $b = 1$, ale napriek tomu nemá v žiadnom bode intervalu $(-1, 1)$ nulovú deriváciu. Je to v rozpore s tvrdením Rolleho vety?

Veta 9 (Lagrangeova veta o strednej hodnote). Nech funkcia $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

(i) f je spojitá ;

(ii) v každom bode $x \in (a, b)$ existuje vlastná alebo nevlastná $f'(x)$.

Potom existuje bod $c \in (a, b)$, v ktorom $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

336. 1. Nech funkcia f je definovaná na intervale I, pričom v každom bode $x \in I$ platí $f'(x) = 0$. Potom funkcia f je konštantná na intervale I. Dokážte!

2. Uveďte príklad takej funkcie definovanej na otvorenej množine M, že $f' \equiv 0$ na M a f nie je konštantná na množine M!

337. Ukážte, že funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$ a $g(x) = \operatorname{arctg} x$ majú rovnaké derivácie v každom bode množiny $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Na základe toho odvoďte vzťah medzi funkciami f a g !

Riešenie: Derivovaním dostaneme $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Označme $h := f - g$; potom $h'(x) = 0$ pre $x \in (-\infty, 1)$, $h'(x) = 0$ pre $x \in (1, \infty)$. Podľa výsledku príkladu 336 je teda funkcia h konštantná na intervale $(-\infty, 1)$ a konštantná na intervale $(1, \infty)$. Hodnotu konštanty na intervale $(-\infty, 1)$ nájdeme ako funkčnú hodnotu v niektorom vhodne zvolenom bode, napr. $k_1 = h(0) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$. Pretože výpočet $h(c)$ v niektorom $c \in (1, \infty)$ by bol komplikovanejší, pomôžeme si nasledujúcou úvahou: pretože $h(x) = k_2$ na intervale $(1, \infty)$, platí $k_2 = \lim_{x \to 1+} h(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$. Celkovo teda

$$\operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x} - \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & \text{ak } x < 1 \\ -\dfrac{3}{4}\pi, & \text{ak } x > 1 \end{cases},$$

čo môžeme prepísať do podoby $\operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x} - \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x - 1) - \frac{\pi}{4}$, $x \neq 1$.

338. Dokážte rovnosti:

1. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$, $x \in \mathbb{R}$;

2. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$;

3. $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$, $|x| \geq 1$;

4. $3 \arccos x - \arccos (3x - 4x^3) = \pi$, $|x| \leq \frac{1}{2}$;

5. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

339. Nech funkcia f je definovaná na intervale I, nech pre každé $x \in I$ platí $f'(x) = k$ (k je reálna konštanta). Potom $f(x) = kx + b$. Dokážte!

340. Dokážte, že funkcia sgn x nie je deriváciou žiadnej funkcie!

341. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

2. $p\, y^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq p\, x^{p-1}(x - y)$, ak $0 < y < x$, $p > 1$;

3_o $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|$, $a, b \in \mathbb{R}$;

4. $\frac{a - b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a - b}{b}$, ak $0 < b < a$.

Riešenie: 1. Pre $x = y$ uvedená nerovnosť zrejme platí. Ak $x < y$ (dôkaz pre $x > y$ by bol rovnaký), tak na intervale $\langle x, y \rangle$ funkcia $f(x) = \sin x$ vyhovuje predpokladom Lagrangeovej vety o strednej hodnote, podľa ktorej $\sin x - \sin y = (x - y) \cos c$ pre niektoré $c \in (x, y)$. Pretože $|\cos c| \leq 1$ pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$, je $|\sin x - \sin y| = |\cos c| . |x - y| \leq |x - y|$.

342. 1. Nech funkcia f má na ohraničenom alebo neohraničenom intervale (a, b) ohraničenú deriváciu f'. Potom f je rovnomerne spojitá na (a, b). Dokážte!

2_o. Ukážte, že funkcia $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ je rovnomerne spojitá na intervale (0, 1), ale nemá tam ohraničenú deriváciu!

343. Nech funkcia f, ktorá má v každom bode ohraničeného intervalu (a, b) deriváciu, nie je ohraničená na (a, b). Potom funkcia f' nie je ohraničená na (a, b). Dokážte!

344. Nech f, F sú funkcie definované na otvorenom intervale $I \subset \mathbb{R}$, f je spojitá a pre každé $x, y \in I$, $x < y$, existuje $z \in (x, y)$ tak, že $F(x) - F(y) = (x - y) f(z)$. Potom na intervale I platí $F' = f$. Dokážte!

345. Nech derivácia funkcie f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$. Možno tvrdiť, že pre každý bod $c \in (a, b)$ existuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle \subset (a, b)$ taký, že $f'(c).(\beta - \alpha) = f(\beta) - f(\alpha)$?

Veta 10 (Cauchyho veta o strednej hodnote). Nech funkcie $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a $g: \langle a, b\rangle \to$ spĺňajú nasledujúce podmienky:

(i) f a g sú spojité na intervale $\langle a, b\rangle$;

(ii) v každom bode $x \in (a, b)$ existujú vlastná alebo nevlastná $f'(x)$ a vlastná $g'(x)$

Potom existuje bod $c \in (a, b)$, v ktorom platí

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c) .$$

Ak sú naviac splnené predpoklady

(iii) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 > 0$ pre každé $x \in (a, b)$;

(iv) $g(b) \neq g(a)$,

možno uvedenú rovnosť písať v tvare

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

346. Nájdite chybu v nasledujúcom „dôkaze" Cauchyho vety: „Nech funkcie f, g vyhovujú predpokladom (i), (ii), (iv) a nech $g'(x) \neq 0$ pre $x \in (a, b)$. Potom každá z funkcií f, g vyhovuje predpokladom Lagrangeovej vety o strednej hodnote, a teda platí $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$, $g(b) - g(a) = g'(c)\,(b - a)$ pre niektoré $c \in (a, b)$. Ak vydelíme prvú z týchto rovností druhou, dostaneme

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} ."$$

347. Nech funkcia f a jej derivácia sú definované na intervale $\langle 1, 2\rangle$. Potom existuje $c \in (1, 2)$ tak, že $f(2) - f(1) = \frac{c^2}{2} f'(c)$. Dokážte!

348. Nech funkcia f a jej derivácia f' sú definované na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $a.b > 0$. Dokážte, že potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{1}{a - b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - c\, f'(c).$$

4.6. Vyšetrovanie niektorých vlastností funkcií pomocou diferenciálneho počtu

4.6.1. Monotónnosť

Veta 11. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale I a má deriváciu v každom jeho vnútornom bode. Potom

1. ak $f' > 0$ ($f' \geqslant 0$) vnútri intervalu I (tj. ak pre každý vnútorný bod x intervalu I platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geqslant 0$)), tak f je rastúca (neklesajúca) na I ;

2. ak $f' < 0$ ($f' \leqslant 0$) vnútri intervalu I, tak f je klesajúca (nerastúca) na I.

349. Zistite, na ktorých intervaloch sú nasledujúce funkcie monotónne:

1. $y = 3x - x^3$;
2. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$;
3. $y = x + \sin x$;
4. $y = x + |\sin 2x|$;
5. $y = \cos \dfrac{\pi}{x}$;
6. $y = \dfrac{x^2}{2^x}$;
7. $y = x^2 - \ln x^2$;
8. $y = \begin{cases} x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right), & \text{ak } x > 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$

350. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$ je rastúca na otvorenom intervale I a diferencovateľná v každom bode $x \in I$. Potom $f'(x) \geqslant 0$ pre každé $x \in I$. Dokážte!

351. Pre každý polynóm P_n stupňa $n \geqslant 1$ možno nájsť číslo $a > 0$ tak, že P_n je rýdzomonotónny na intervale $(-\infty, -a)$ a rýdzomonotónny na intervale (a, ∞). Dokážte!

Veta 12. Nech funkcie f, g sú n-krát diferencovateľné na intervale I, nech v bode $a \in I$ platí $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$, ... , $f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a)$ (teda ak $n = 1$, predpokladáme len $f(a) = g(a)$). Potom

1. ak $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ pre všetky $x \in I \cap (a, \infty)$, tak $f(x) > g(x)$ pre všetky $x \in I \cap (a, \infty)$ (pritom samozrejme predpokladáme, že $I \cap (a, \infty) \neq \emptyset$) ;

2a/ ak $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$ a n je párne, tak $f(x) > g(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$;

2b/ ak $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$ a n je nepárne, tak $f(x) < g(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$ (pritom predpokladáme $I \cap (-\infty, a) \neq \emptyset$).

352. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $e^x > 1 + x$ pre $x \neq 0$;

2. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ pre $x > 0$;

3. $\operatorname{tg} x > x$ pre $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

4. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ pre $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

5. $x^{\alpha} - 1 > \alpha(x - 1)$ pre $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

6. $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x - a}$ pre $n > 1$, $x > a > 0$;

7. $1 + 2 \ln x \leqslant x^2$ pre $x > 0$.

353. Dokážte nerovnosť $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ pre $x > -1$ a na jej základe rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.

354. Nech M je konečná podmnožina intervalu $I = (a, b)$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, nech funkcia f je spojitá na I a má kladnú deriváciu v každom bode $x \in I \setminus M$. Potom f je rastúca na I. Dokážte!
(Všimnime si, že v predpokladoch tohto tvrdenia sa nehovorí nič o existencii derivácie v bodoch množiny M; teda funkcia f' môže byť definovaná v niektorých (alebo aj vo všetkých) bodoch množiny M, ale pripúšťa sa aj možnosť, že definičným oborom funkcie f' je len množina $I \setminus M$.)

355. Nech funkcie f, g sú diferencovateľné na intervale $\langle a, \infty)$, $f(a) > g(a)$ a nech pre všetky $x \in (a, \infty)$ platí $f'(x) \geqslant g'(x)$. Potom pre všetky $x \in \langle a, \infty)$ platí $f(x) > g(x)$. Dokážte!

356. Musí byť derivácia monotónnej funkcie monotónna?

4.6.2. Konvexnosť a konkávnosť. Inflexné body

Funkcia f sa nazýva rýdzo konvexná (konvexná) na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) < pf(x) + qf(y) \qquad (*)$$

$$(\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) \leqslant pf(x) + qf(y)\ ).$$

Funkcia f sa nazýva rýdzo konkávna (konkávna) na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) > pf(x) + qf(y)$$

$$(\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) \geqslant pf(x) + qf(y)\ ).$$

(Geometricky možno výrok $(*)$ interpretovať takto: pre ľubovoľné 2 čísla $x, y \in I$, $x < y$, leží úsečka spájajúca body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$ nad grafom funkcie $f/(x, y)$.)

Veta 13. Nech funkcia f je spojitá na intervale I a dvakrát diferencovateľná v každom jeho vnútornom bode. Potom

1. ak $f'' > 0$ ($f'' \geqslant 0$) vnútri intervalu I, tak f je rýdzo konvexná (konvexná) na I ;
2. ak $f'' < 0$ ($f'' \leqslant 0$) vnútri intervalu I, tak f je rýdzo konkávna (konkávna) na I.

Vnútorný bod a množiny D(f) sa nazýva <u>inflexný bod funkcie f</u>, ak f má v bode a deriváciu a existuje $\varepsilon > 0$ tak, že funkcia f je rýdzo konvexná na jednej z množín $(a - \varepsilon, a\rangle$, $\langle a, a + \varepsilon)$ a rýdzo konkávna na druhej z nich.

<u>Veta 14</u>. Nech funkcia f je trikrát diferencovateľná v bode a a dvakrát diferencovateľná v niektorom jeho okolí. Ak $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, tak a je inflexný bod funkcie f.

Poznámka. Existujú aj iné definície rýdzej konvexnosti, rýdzej konkávnosti a inflexného bodu, ktoré nie sú ekvivalentné tu uvedeným. Všetky v matematickej literatúre používané definície týchto pojmov sú však volené tak, že vety 13 a 14 zostanú v platnosti.

357. Zistite, na ktorých intervaloch sú nasledujúce funkcie rýdzo konvexné, resp. rýdzo konkávne:

1. $y = 3x^2 - x^3$; 2. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$;

3. $y = x + \sin x$; 4. $y = \ln(1 + x^2)$;

5. $y = x \sin(\ln x)$; 6. $y = \sqrt[3]{|x|}$.

358. 1. Pre ktoré hodnoty $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ je bod $x = 0$ inflexným bodom funkcie $y = x^{\frac{p}{q}}$ (predpokladáme, že p, q sú nesúdeliteľné čísla) ?

2. Akým podmienkam musia vyhovovať koeficienty $a \neq 0$, b, c, aby krivka $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mala inflexné body?

3. Pre aké hodnoty parametra a je krivka $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ konvexná na $\mathbb{R}$?

359_o. Nech funkcia f je diferencovateľná v každom bode intervalu (a, b), pričom f' je na (a, b) rastúca. Potom f je rýdzo konvexná na (a, b). Dokážte!

360. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1_o. $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$ pre $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$;

2. $\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}$ pre $x \neq y$;

3. $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}$ pre $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$;

4. $\frac{2}{\pi} x < \sin x$ pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

5_o. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y > 2 \operatorname{arctg} \frac{x + y}{2}$ pre $x \neq y$;

6. $x - 1 < \log_2 x$ pre $x \in (1, 2)$.

Riešenie: 2. Pretože $(e^x)'' = e^x > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, je funkcia $f(x) = e^x$ rýdzo konvexná na $\mathbb{R}$;

teda platí

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \quad \forall\, p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) < pf(x) + qf(y).$$

Ak špeciálne zvolíme $p = q = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$e^{\frac{x+y}{2}} = f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) < \tfrac{1}{2}\, f(x) + \tfrac{1}{2}\, f(y) = \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^y), \quad x \neq y\ .$$

361. Ukážte, že neexistuje funkcia, ktorá je kladná na $\mathbb{R}$ a má v každom bode $x \in \mathbb{R}$ zápornú druhú deriváciu.

362. 1. Nech f je rýdzo konvexná a diferencovateľná na intervale I, nech $a \in I$. Potom na množine $I \setminus \{a\}$ leží graf funkcie f nad svojou dotyčnicou v bode a. Dokážte!

2_o. V inflexnom bode prechádza graf funkcie z jednej strany dotyčnice na druhú, tj. ak a je inflexný bod funkcie f, tak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že na jednej z množín $(a - \varepsilon, a)$, $(a, a + \varepsilon)$ leží graf funkcie f nad svojou dotyčnicou v bode $(a, f(a))$, na druhej z týchto množín leží pod ňou. Dokážte!

363. Nech

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \cos \frac{1}{x}), & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases} .$$

Ukážte, že

1. f má deriváciu v bode 0 ;
2. graf funkcie f prechádza z jednej strany dotyčnice v bode $(0, 0)$ na jej druhú stranu ;
3. bod 0 napriek tomu nie je inflexný bod funkcie f.

Poznámka. Na vlastnostiach odvodených v pr. 362 sa zakladajú nasledujúce definície, odlišné od definícií používaných v tomto odstavci:

1. Funkcia f diferencovateľná na intervale I sa nazýva rýdzo konvexná (rýdzo konkávna) na I, ak pre každé $a \in I$ platí: na množine $I \setminus \{a\}$ leží graf funkcie f nad (pod) svojou dotyčnicou v bode $(a, f(a))$.

2. Bod a sa nazýva inflexný bod funkcie f, ak existuje konečná $f'(a)$ a graf funkcie f prechádza v bode a z jednej strany svojej dotyčnice na druhú.

Prvá z týchto definícií predstavuje užšie chápanie pojmov rýdzo konvexná a rýdzo konkávna funkcia (to sme tu nedokazovali, ale môžete to skúsiť sami), druhá naopak širšie chápanie pojmu inflexný bod (to ukazujú pr. 362 a 363).

4.6.3. E x t r é m y

Nech definičným oborom funkcie f je interval I. Hovoríme, že funkcia f má v bode a I lokálne maximum (lokálne minimum), ak existuje okolie O(a) bodu a tak, že platí

$$\forall x \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap I:\ f(x) \leqslant f(a) \qquad (\forall x \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap I:\ f(x) \geqslant f(a)) .$$

Definíciu ostrého lokálneho maxima (ostrého lokálneho minima) dostaneme, ak v predchádzajúcej definícii zameníme znak $\leqslant$ ($\geqslant$) znakom $<$ ($>$). Lokálne maximá a lokálne minimá sa súhrnne nazývajú lokálnymi extrémami.

Veta 15. Ak funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode a svojho definičného oboru, tak buď neexistuje vlastná ani nevlastná $f'(a)$, alebo $f'(a) = 0$.

Bod a sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak $f'(a) = 0$.

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie $f: I \to R$ treba teda vyšetriť:

1. všetky jej stacionárne body ;
2. všetky body $a \in I$, v ktorých neexistuje $f'(a)$;
3. všetky body $a \in I$, ktoré nie sú vnútornými bodmi intervalu I.

Veta 16. Ak funkcia f je dvakrát diferencovateľná vo vnútornom bode a množiny D(f) a platí $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ ($f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$), tak f má v bode a ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).

Veta 17. Nech funkcia f je n-krát ($n \geqslant 2$) diferencovateľná vo vnútornom bode a množiny D(f), nech $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Ak n je párne a $f^{(n)}(a) > 0$ ($f^{(n)}(a) < 0$), tak funkcia f má v bode a ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).

Ak n je nepárne, nemá funkcia f v bode a lokálny extrém.

364. Na základe vety 16 nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $f(x) = 2x^2 - x^4$; 2. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$,
3. $f(x) = e^x \sin x$.

365. Len použitím prvej derivácie nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;
2. $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$; 3. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$;
4. $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; 5. $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

Návod: Stačí použiť úvahy analogické tejto: ak f je spojitá na (a, b), $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in (a, c)$ (tj. f rastie na $(a, c\rangle$), $f'(x) < 0$ pre všetky $x \in (c, b)$ (tj. f klesá na $\langle c, b)$), tak f má v bode c lokálne maximum.

366. Zistite, či nasledujúce funkcie majú lokálny extrém v bode 0:

1. $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$; 2. $y = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$.

367. Nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $y = |x^2 - 3x + 2|$; 2. $y = \sqrt[3]{x^2} - x^2$;

3. $y = x - \sqrt{3 - x}$; 4. $y = x\sqrt[3]{x - 1}$.

368. Rozhodnite, či existujú $m := \min_{x \in A} f(x)$, $M := \max_{x \in A} f(x)$; ak áno, nájdite ich:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $A = \langle -1, 5\rangle$;

2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $A = \langle \frac{1}{100}, 100\rangle$;

3. $f(x) = 2\sqrt{x} + x$, $A = (0, 4\rangle$;

4. $f(x) = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, $A = \langle 0, \frac{\pi}{2})$;

5. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}$ $A = (0, 1)$;

6. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}$, $A = \langle 0, 1\rangle$.

Návod: Ak funkcia f je spojitá na uzavretom ohraničenom intervale I, tak podľa vety 5 z kapitoly 3 existujú $\max_{x \in I} f(x)$, $\min_{x \in I} f(x)$; tieto čísla sú zrejme aj lokálnymi extrémami funkcie f/I. Preto ak chceme nájsť globálne extrémy funkcie f na intervale I, stačí zistiť funkčné hodnoty vo všetkých bodoch, v ktorých môže mať funkcia f/I lokálny extrém (tj. v stacionárnych bodoch, v krajných bodoch intervalu I a v tých bodoch, v ktorých neexistuje derivácia); najväčšie z týchto čísel je potom $\max_{x \in I} f(x)$, najmenšie z nich je $\min_{x \in I} f(x)$.

V prípade spojitej funkcie a nekompaktného intervalu I možno o existencii čísel $\max_{x \in I} f(x)$, $\min_{x \in I} f(x)$ často rozhodnúť na základe rastu a klesania funkcie f alebo jednoduchých úvah tohto typu: ak $f(c) = \max_{x \in \langle a, b\rangle} f(x)$ a $c \in (a, b)$, tak $f(c) = \max_{x \in (a, b)} f(x)$.

369. Dokážte nerovnosti:

1. $|3x - x^3| \leq 2$ pre $x \in \langle -2, 2\rangle$;

2. $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1 - x)^p \leq 1$ pre $x \in \langle 0, 1\rangle$, $p > 1$;

3. $\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Riešenie: 1. Pretože $\max\limits_{x \in \langle -2,\, 2\rangle} (3x - x^3) = 2$ a $\min\limits_{x \in \langle -2,\, 2\rangle} (3x - x^3) = -2$, platia pre všetky $x \in \langle -2, 2\rangle$ nerovnosti $-2 \leq 3x - x^3 \leq 2$, tj. $|3x - x^3| \leq 2$. (Funkcia $3x - x^3$, $x \in \langle -2, 2\rangle$ je diferencovateľná v každom bode intervalu $(-2, 2)$, má stacionárne body 1 a -1; preto jej maximum (minimum) nájdeme ako najväčšie (najmenšie) z čísel $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$.)

370. 1. Ak polynóm P párneho stupňa má len jeden stacionárny bod, tak v ňom nadobúda lokálny extrém. Dokážte!

2_0. Ak polynóm nepárneho stupňa má práve dva stacionárne body, tak buď v obidvoch nadobúda lokálny extrém, alebo sú obidva inflexnými bodmi. Dokážte!

371. Môže mať diferencovateľná funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v dvoch susedných stacionárnych bodoch ostré lokálne maximum?

372. Ukážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \cos \frac{1}{x}), & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases}$$

má v bode 0 ostré lokálne minimum, ale nie je klesajúca v žiadnom ľavom okolí bodu 0 ani rastúca v žiadnom pravom okolí bodu 0.

373. Nájdite rozmery toho valca vpísaného do gule s polomerom R, ktorý má 1. najväčší objem ; 2. najväčší povrch.

374. Na krivke $y = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, nájdite bod, ktorého vzdialenosť od bodu $(1, \frac{5}{2})$ je najmenšia.

375. Nech krivka α je grafom diferencovateľnej funkcie f definovanej na otvorenej množine M. Nech je daný bod $(a, b) \notin \alpha$. Dokážte, že vzdialenosť medzi bodmi (a, b) a (x, f(x)) môže nadobúdať extrém len v smere normály[x)] ku krivke α. (Teda presnejšie formulované: Označme d(x) vzdialenosť bodov (x, f(x)) a (a, b). Ak pre niektoré $c \in M$ platí $d(c) = \max \{d(x) ; x \in M\}$ alebo $d(c) = \min \{d(x) ; x \in M\}$, tak spojnica bodov (c, f(c)) a (a, b) je kolmá na dotyčnicu funkcie f v bode (c, f(c)).)

376. Pozorovateľ stojí oproti obrazu umiestnenému na vertikálnej stene, spodný okraj obrazu je a (cm) nad úrovňou pozorovateľových očí, horný okraj b (cm) nad touto úrovňou. V akej vzdialenosti od steny musí stáť pozorovateľ, aby uhol φ, pod ktorým vidí obraz, bol najväčší?

---

x) Normála v bode (c, f(c)) je priamka prechádzajúca bodom (c, f(c)) a kolmá na dotyčnicu grafu funkcie f v tomto bode.

4.7. L'Hospitalovo pravidlo

Veta 18. Nech

1. funkcie f, g sú diferencovateľné v niektorom prstencovom okolí $O^*(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^*$;
2. $\forall\ x \in O^*(a)$: $g'(x) \neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$;
4. existuje vlastná alebo nevlastná $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Analogické tvrdenia možno sformulovať aj pre jednostranné limity.)

377. Nech funkcie f, g sú definované v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, nech $f(a) = g(a) = 0$, nech existujú vlastné $f'(a)$ a $g'(a) \neq 0$. Potom $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$. Dokážte!

378. Nájdite nasledujúce limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a > 0,\ n \in \mathbb{N})$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x \operatorname{tg} x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x + x^3 \cos \frac{\pi}{x}}{x^2}$.

Riešenie: 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\dfrac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}\,\sqrt{1-x^2}}}{x^2} \overset{(2)}{=} \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}\,\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{2}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{4}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \overset{(4)}{=} 1 .$$

(1) ide o neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, skúsime preto použiť l'Hospitalovo pravidlo (tj. vetu 18); predpoklady 1 - 3 sú zrejme splnené, splnenie predpokladu 4 preveríme až ďalším výpočtom, rovnosť (1) má teda zatiaľ podmienený charakter: ak ukážeme existenciu limity na jej pravej strane, tak bude existovať aj limita vľavo a bude platiť (1) (ak zistíme, že limita vpravo neexistuje, neboli sme oprávnení použiť l'Hospitalovo pravidlo);

(2) výraz na ľavej strane je opäť typu $\frac{0}{0}$, skôr než však skúsime znova použiť vetu 18, upravíme limitovanú funkciu („bezhlavým" používaním l'Hospitalovho pravidla sa výpočet často viac skomplikuje než zjednoduší), využijeme, že $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = 1$, a vetu 18 použijeme len pri výpočte druhej z limít vpravo (predpoklady 1, 2, 3 sú opäť zrejme splnené);

(3) táto rovnosť je podmienená podobne ako rovnosť (1);

(4) z existencie tejto limity vyplýva, že použitie l'Hospitalovho pravidla bolo v obidvoch prípadoch oprávnené, a teda všetky uvedené rovnosti skutočne platia.

379. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(1-x)$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$;
3. $\lim\limits_{x\to \infty} x \left(\pi - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x \quad (n \in \mathbb{N})$.

Návod: Ak súčin $f.g$, ktorý je neurčitým výrazom typu $0.\infty$, prepíšeme do tvaru podielu $\frac{f}{1/g}$ alebo $\frac{g}{1/f}$, dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$, ktorého limitu môžeme skúsiť vypočítať pomocou l'Hospitalovho pravidla.

380. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$;
2. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$.

Návod: Funkciu f^g, ktorá je neurčitým výrazom typu 0^0, $(+\infty)^0$ alebo 1^∞, môžeme prepísať do tvaru $e^{g \ln f}$; exponent $g \ln f$ je potom neurčitým výrazom typu $0.\infty$, pri výpočte jeho limity môžeme postupovať ako v pr. 379 (v prípade neurčitých výrazov typu 1^{∞} je však často výhodnejšie prepísať ich do tvaru $\left[(1 + (f - 1))^{\frac{1}{f-1}}\right]^{(f-1).g}$ a postup z pr. 379 použiť pri výpočte limity funkcie $(f - 1).\, g$, ktorá je neurčitým výrazom typu $0.\infty$).

381. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Návod: Ak chceme použiť l'Hospitalovo pravidlo pri výpočte limít neurčitých výrazov typu $\infty - \infty$, musíme predovšetkým funkciu $f - g$ napísať v tvare podielu. Vo všeobecnosti to možno dosiahnuť nahradením funkcie $f - g$ funkciou $\dfrac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g.f}}$ (tá je neurčitým výrazom typu $\frac{0}{0}$), v jednotlivých prípadoch však často možno nájsť jednoduchší postup.

382. Možno použiť l'Hospitalovo pravidlo pri výpočte týchto limít:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x - 1}$?

383. Limitu funkcie $f(x) = \dfrac{1 + x + \frac{\sin 2x}{2}}{\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) e^{\sin x}}$ v bode $+\infty$ budeme hľadať dvoma spôsobmi:

1. použitím l'Hospitalovho pravidla dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos 2x}{e^{\sin x}(1 + \cos 2x) + \cos x\, e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos^2 x}{2\, e^{\sin x} \cos^2 x + \cos x\, e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos x}{e^{\sin x}} \cdot \frac{1}{x + \cos x\,(2 + \sin x)} \overset{(*)}{=} 0$$

(v prvom kroku sme zderivovali čitateľ aj menovateľ, v treťom sme limitovaný zlomok rozšírili výrazom $\frac{1}{\cos x}$); pretože $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$ a funkcia $\cos x\,.\,(2 + \sin x)$ je zdola ohraničená, je $\lim\limits_{x\to\infty} (x + \cos x\,(2 + \sin x)) = +\infty$, a teda $\lim\limits_{x} \dfrac{1}{x + \cos x\,(2 + \sin x)} = 0$, funkcia $\dfrac{2\cos x}{e^{\sin x}}$ je ohraničená, preto platí $(*)$;

2. platí $f(x) = \frac{1}{e^{\sin x}} \left(1 + \frac{1}{x + \sin x \cos x} \right)$, pritom funkcia v zátvorke má v bode $+\infty$ limitu 1, funkcia $\frac{1}{e^{\sin x}}$ nemá v bode $+\infty$ limitu (to možno ľahko dokázať pomocou Heineho definície limity), preto neexistuje ani $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sin x}} \left(1 + \frac{1}{x + \sin x \cos x} \right)$.

Pretože sme dospeli k rôznym výsledkom, je aspoň jeden z týchto postupov nesprávny. Ktorý to je a v čom spočíva chyba?

384. 1. Nech funkcia f je definovaná v okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, nech v každom bode $x \in O(a) \setminus \{a\}$ existuje vlastná $f'(x)$ a nech f je spojitá v bode a. Ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{x\to a} f'(x)$, tak existuje $f'(a)$ a platí $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$. Dokážte!

2. Nájdite $f'(a)$, ak:

a/ $f(x) = \sin^2 \sqrt[3]{x^2}$, $a = 0$; b/ $f(x) = \arcsin x$, $a = 1, -1$;

c/ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{ak } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$.

4.8. Taylorov polynóm

Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$. Potom <u>Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f v bode a</u> sa nazýva polynóm (v premennej x)

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Ak špeciálne $a = 0$, používa sa namiesto názvu Taylorov polynóm označenie <u>Maclaurinov polynóm</u>.

<u>Veta 19</u>. Ak funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$ a T_n je jej Taylorov polynóm stupňa n v bode a, tak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0 .$$

(Rozdiel $f - T_n$ sa nazýva <u>zvyšok Taylorovho polynómu</u> stupňa n funkcie f v bode a.)

Nech funkcia g je definovaná v niektorom rýdzom okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ a nenadobúda tam nulové hodnoty. Znakom $o(g)$ budeme označovať triedu všetkých funkcií f takých, že

1. ich definičný obor obsahuje niektoré rýdze okolie bodu a ;
2. platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Namiesto zápisu $f \in o(g)$ sa používa zápis $f = o(g)$. (Pokiaľ by z kontextu nebolo jasné, ktorého $a \in \mathbb{R}^*$ sa vzťah $f = o(g)$ týka, používa sa zápis $f = o(g)$ $(x \to a)$.) Zápis $f = h + o(g)$ treba chápať nasledovne: funkcia f je súčtom funkcie h a niektorej funkcie z triedy $o(g)$.

Ak funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$, patrí podľa vety 19 zvyšok jej Taylorovho polynómu stupňa n v bode a do triedy $o((x-a)^n)$, možno teda písať

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) ;$$

tento zápis sa nazýva Taylorovým vzorcom so zvyškom v Peanovom tvare.

V nasledujúcich príkladoch budeme používať tieto tvrdenia (v zápisom všade vynechávame $x \to 0$; m, n sú prirodzené čísla):

1. ak $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^n)$, tak $f(x) + g(x) = o(x^n)$;
2. ak $m > n$ a $f(x) = o(x^m)$, tak $f(x) = o(x^n)$;
3. ak $f(x) = o(x^n)$, tak $f^m(x) = o(x^{m.n})$;
4. ak $f(x) = o(x^n)$, tak $x^m.\ f(x) = o(x^{m+n})$;
5. ak $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^m)$, tak $f(x).g(x) = o(x^{m+n})$.

Uvedené implikácie budeme zapisovať nasledovne:

1. $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;
2. $o(x^m) = o(x^n)$ pre $m > n$;
3. $o^m(x^n) = o(x^{m.n})$;
4. $x^m.\ o(x^n) = o(x^{m+n})$;
5. $o(x^n).o(x^m) = o(x^{m+n})$.

Používanie týchto zápisov vyžaduje istú opatrnosť: pretože ide o symbolické vyjadrenie implikácií, nemožno (na rozdiel od skutočných rovností) tieto „rovnosti" čítať sprava doľava.

385. Na základe výpočtu príslušných derivácií zostrojte Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak
   1. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $a = -\frac{1}{2}$, $n = 4$;
   2. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $n = 3$;
   3. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$, $a = 0$, $n = 5$;
   4. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, $a = -1$, n ľubovoľné ;
   5. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $a = \frac{\pi}{4}$, n ľubovoľné .

386. Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$, nech existujú čísla $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_n(x-a)^n + o((x-a)^n) .$$

Potom $A_0 + A_1(x - a) + \dots + A_n(x - a)^n$ je Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a. Dokážte!

V nasledujúcich príkladoch využijeme tvrdenie z pr. 386 a znalosť Maclaurinových polynómov týchto funkcií (možno ich zostrojiť výpočtom príslušných derivácií):

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$ *);

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

IV. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;

V. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$;

VI. $(1 + x)^\alpha = 1 + \quad x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x$

$(\alpha \in \mathbb{R})$.

387. Nájdite Maclaurinove polynómy stupňa n funkcií:

1. $f(x) = e^{\frac{x}{7}}$;
2. $f(x) = e^{x^2}$;
3. $f(x) = \cos x^3$;
4. $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$;
5. $f(x) = \frac{1}{2 + 3x^2}$;
6. $f(x) = x^3 \sin 3x$.

Riešenie: 2. Pretože funkcia e^{x^2} má derivácie všetkých rádov v bode 0 (vyplýva to matematickou indukciou z viet o derivácii súčtu, súčinu a zloženej funkcie), existuje jej Maclaurinov polynóm ľubovoľného stupňa. Jeho koeficienty nebudeme hľadať derivovaním funkcie e^{x^2}, namiesto toho použijeme tento postup:

Ak označíme $R_n(z)$ zvyšok Maclaurinovho polynómu stupňa n funkcie e^z, tak pre každé $z \in \mathbb{R}$ platí

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + R_n(z) , \qquad (*)$$

*) pretože $\sin^{(2n)}(0) = 0$, majú Maclaurinov polynóm stupňa 2n - 1 a Maclaurinov polynóm stupňa 2n rovnaký tvar, preto aj zvyšok Maclaurinovho polynómu stupňa 2n - 1 funkcie sin patrí do triedy $o(x^{2n})$; podobná poznámka platí o funkcii cos

pritom podľa vety 19 je $\lim\limits_{z \to 0} \frac{R_n(z)}{z^n} = 0$, tj. $R_n(z) = o(z^n)$.

Ak položíme $z = x^2$, z (x) vyplýva: pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + R_n(x^2) ,$$

pritom $\lim\limits_{x \to 0} \frac{R_n(x^2)}{x^{2n}} = 0$ (vyplýva to z vety o limite zloženej funkcie a z toho, že $\lim\limits_{z \to 0} \frac{R_n(z)}{z^n} = 0$), teda $R_n(x^2) = o(x^{2n})$. Podľa tvrdenia z pr. 386 je preto $1 + x^2 + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}$ Maclaurinov polynóm stupňa 2n funkcie e^{x^2}.

(Priamo z definície Maclaurinovho polynómu vyplýva: ak z Maclaurinovho polynómu stupňa k ($k \geq 2$) funkcie f vynecháme člen obsahujúci x^k, dostaneme Maclaurinov polynóm stupňa k-1 funkcie f. Teda Maclaurinov polynóm stupňa 2n-1 funkcie e^{x^2} je $1 + x^2 + \ldots + x^{2n-2}/(n-1)!$)

4. Ak rovnosť

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-3} \frac{x^{n-2}}{n-2} + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

vynásobíme x^2, dostaneme

$$x^2 \ln (1 + x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \ldots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n-2} + (-1)^{n-2} \frac{x^{n+1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n} + x^2 o(x^n).$$

Funkcia $(-1)^{n-2} \frac{x^{n+1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n} + x^2 o(x^n)$ patrí do triedy $o(x^n)$, preto môžeme písať:

$$x^2 \ln (1 + x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \ldots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n-2} + o(x^n) ,$$

čo podľa tvrdenia z pr. 386 znamená, že $x^3 - \frac{x^4}{2} + \ldots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n-2}$ je Maclaurinov polynóm stupňa n ($n \geq 3$) funkcie $x^2 \ln (1 + x)$. Zrejme Maclaurinovými polynómami stupňa 1 a 2 sú funkcie identicky rovné 0.

388. Nájdite Maclaurinove polynómy stupňa n funkcií:

1. $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $n = 4$;
2. $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3 \sin x}$, $n = 3$;
3. $f(x) = \ln^3(1 - \frac{x}{2})$, $n = 3$;
4. $f(x) = \ln (x^2 + x + 1)$, $n = 4$;
5. $f(x) = \cos x \,.\, \ln (1 + x)$, $n = 5$.

Riešenie: 1. Ak do rovnosti

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + R(z)$$

(R označuje zvyšok Maclaurinovho polynómu) dosadíme $z = \sin^2 x$, dostaneme

$$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + R(\sin^2 x) , \tag{x}$$

pritom $R(\sin^2 x) = o(x^4)$ (pretože $R(z) = o(z^2)$, je $\lim_{x\to 0} \frac{R(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{R(\sin^2 x)}{\sin^4 x} =$ $= 1 \cdot \lim_{z\to 0} \frac{R(z)}{z^2} = 0$).

Pomocou rovností $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\sin x = x + o(x)$ môžeme (*) prepísať a upraviť nasledovne:

$$\left.\begin{aligned} e^{\sin^2 x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{(x + o(x))^4}{2} + o(x^4) = \boxed{1} + \Big(\boxed{x^2} + \\ &+ \frac{x^6}{3!\,3!} + o^2(x^3) \boxed{- \frac{2x^4}{3!}} + 2xo(x^3) - \frac{2x^3 o(x^3)}{3!} \Big) + \Big(\boxed{x^4} + 4x^3 o(x) + 6x^2 o^2(x) + \\ &+ 4xo^3(x) + o^4(x) \Big) + o(x^4)\,. \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Všetky sčítance okrem vyznačených patria do $o(x^4)$, patrí tam teda aj ich súčet. Rovnosť (**) preto môžeme písať

$$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + \left(1 - \frac{2}{3!}\right) x^4 + o(x^4),$$

čo podľa tvrdenia z pr. 386 znamená, že $1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4$ je Maclaurinov polynóm stupňa 4 funkcie $e^{\sin^2 x}$.

Poznámka. Zo záveru uvedeného postupu vyplýva, že stupne Maclaurinových polynómov funkcií e^z a $\sin^2 x$ sme volili tak, aby v (**) všetky sčítance, ktoré nemajú tvar αx^m, $m = 0, 1, \dots$ (medzi ne patrí aj funkcia $R(\sin^2 x)$) boli z triedy $o(x^4)$.

Všimnite si tiež, že hoci pravá strana rovnosti (**) obsahuje dokonca polynóm 6. stupňa, nemôžeme tvrdiť, že tento polynóm je Maclaurinovým polynómom 6. stupňa funkcie $e^{\sin^2 x}$; z nášho postupu totiž nevyplýva, že by súčet zvyšných členov na pravej strane rovnosti (**) patril do $o(x^6)$.

389. Nájdite Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak:

1. $f(x) = e^{x^2 + 2x - 1}$, $a = -1$; 2. $f(x) = x^2 e^{-2x}$, $a = -1$;

3. $f(x) = (1 + x^2) \ln \sqrt{1 + x}$, $a = 0$;

4. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$, $a = 0$; 5. $f(x) = \frac{x + 5}{2x - 4}$, $a = -\frac{1}{10}$;

6. $f(x) = \ln (x^2 - 7x + 12)$, $a = 1$.

Návod: Substitúciou $x - a = t$ možno hľadanie Taylorovho polynómu funkcie f v bode a previesť na hľadanie Maclaurinovho polynómu funkcie $g(t) := f(t + a)$.

390. Pomocou Taylorových polynómov nájdite nasledujúce limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\operatorname{tg} x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}$.

Riešenie: 2. Funkciu v čitateli napíšeme v tvare $\alpha x^m + o(x^m)$, kde $\alpha \neq 0$ (tj. z tých jej Maclaurinových polynómov, ktoré nie sú identicky rovné 0, vyberieme polynóm najnižšieho stupňa); to isté urobíme v menovateli.

V našom prípade

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

$$\sin x^4 = x^4 + o(x^4) .$$

Potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} = -\frac{1}{12}$$

(rovnosť $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^4)}{x^4} = 0$ vyplýva z definície symbolu $o(x^4)$).

391. Nájdite $f^{(k)}(0)$, ak:

1. $f(x) = e^{-x^2}$, $k = 60$; 2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$, $k = 32$.

Veta 20. Nech je daná funkcia f, nech funkcia $f^{(n)}$ je definovaná a spojitá v niektorom okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, nech pre každé $x \in O(a) \setminus \{a\}$ existuje vlastná $f^{(n+1)}(x)$. Nech T_n je Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a. Potom

1. pre každé $x \in O(a)$, $x > a$ ($x \in O(a)$, $x < a$) existuje číslo $\vartheta(x) \in (a, x)$ ($\vartheta(x) \in (x, a)$) také, že

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(tzv. Lagrangeov tvar zvyšku);

2. pre každé $x \in O(a)$, $x > a$ $(x \in O(a),\ x < a)$ existuje číslo $\vartheta(x) \in (a,\ x)$ $(\vartheta(x) \in (x,\ a))$ také, že

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{n!}(x - a)(x - \vartheta(x))^n$$

(tzv. Cauchyho tvar zvyšku).

392. Odhadnite absolútnu chybu Δ nasledujúcich približných vzorcov:

1. $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}$, $x \in \langle 0,\ 1\rangle$;

2. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $|x| \leqslant 0{,}5$;

3. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.

393. Pre $x \geqslant 0$ dokážte nasledujúce nerovnosti:

1_o. $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$;

2. $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2}$;

3_o. $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

4.9. Použitie diferenciálneho počtu pri zostrojovaní grafov funkcií

Pri zostrojovaní grafu funkcie f postupujeme spravidla nasledovne:

1. určíme $D(f)$;

2. nájdeme všetky hodnoty x, pre ktoré $f(x) = 0$ (tj. priesečníky grafu funkcie f s osou Ox) ;

3. vyšetríme spojitosť funkcie f a jej správanie sa v bodoch nespojitosti ;

4. zistíme, na ktorých intervaloch je f monotónna, a nájdeme body, v ktorých nadobúda lokálne extrémy ;

5. vyšetríme konvexnosť a konkávnosť funkcie f, nájdeme inflexné body ;

6. nájdeme asymptoty grafu funkcie (definíciu asymptoty pozri ďalej).

Zostrojenie grafu funkcie f môžu uľahčiť niektoré jej špeciálne vlastnosti: pri párnej alebo nepárnej funkcii stačí zostrojiť graf funkcie $f/D(f) \cap \langle 0,\ +\infty)$, v prípade periodickej funkcie f graf funkcie $f/\langle a,\ a + T\rangle \cap D(f)$, kde $a \in D(f)$ a T je niektorá perióda funkcie f.

(Nech je daná funkcia f, nech $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap (a, +\infty)$ (množiny $D(f) \cap (-\infty, a)$). Ak existuje $\lim_{x \to a+} f(x)$ ($\lim_{x \to a-} f(x)$) a je nevlastná, nazýva sa priamka $x = a$ <u>asymptotou bez smernice grafu funkcie f</u>.

Nech bod $+\infty$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Priamka $y = kx + q$ sa nazýva <u>asymptota so smernicou grafu funkcie f v bode $+\infty$</u>, ak $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - q) = 0$.

Analogicky sa definuje <u>asymptota so smernicou grafu funkcie f v bode $-\infty$</u>.

<u>Veta 21</u>. Nech bod $+\infty$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v bode $+\infty$ práve vtedy, keď:

1. existuje konečná $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ a platí $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$;

a

2. existuje konečná $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$ a rovná sa číslu q.

Analogická veta platí pre asymptotu so smernicou grafu funkcie f v bode $-\infty$.)

Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

394. $y = 3x - x^3$;
395. $y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$;
396. $y = \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$;
397. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$;
398. $y = x\sqrt{|x^2 - 1|}$;
399. $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$;
400. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$;
401. $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}$;
402. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x + 1}}$;
403. $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$;
404. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$;
405. $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$;
406. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
407. $y = x \operatorname{arctg} x$;
408. $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$;
409. $y = (x + 2) e^{\frac{1}{x}}$;
410. $y = \arccos \frac{1 - x}{1 - 2x}$;
411. $y = x^x$.

4.10. Ďalšie príklady

412$_o$. Funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa nazýva rastúca v bode a, ak existuje také jeho okolie O(a), že platí

$$\forall x, y \in O(a): x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y) .$$

Ak existuje $f'(a)$ a platí $f'(a) = +\infty$ alebo $f'(a) > 0$, tak f je rastúca v bode a. Dokážte!

413. Nech funkcie f, g sú definované v okolí bodu a, nech $g(a) = 0$, g má deriváciu v bode a, f je spojitá v bode a. Potom existuje derivácia funkcie f.g v bode a. Dokážte!

414. Ak spojitá funkcia f definovaná v okolí bodu a nemá deriváciu v bode a, pričom $f(a) \neq 0$, tak funkcia f^n nemá deriváciu v bode a pre žiadne $n \in \mathbb{N}$. Dokážte!

415$_o$. Dokážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ak } x = 0 \\ \dfrac{1}{n^2} & , \text{ak } \dfrac{1}{n+1} \leq |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

má deriváciu v bode 0.

416$_o$. Ak $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená nekonštantná periodická funkcia, tak funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x\,\varphi(\frac{1}{x}) & , \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ak } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá v bode 0, ale nemá tam vlastné ani nevlastné jednostranné derivácie.

417. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:

1. Nutnou podmienkou pre periodičnosť f' je periodičnosť f.
2. Postačujúcou podmienkou pre periodičnosť f' je periodičnosť f.

418. Nech funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}$ navzájom rôzne konečné jednostranné derivácie. Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku pre existenciu derivácie funkcie f^2 v bode a !

419. Vyjadrite derivácie nasledujúcich funkcií pomocou derivácií funkcií φ_{kj} ($k = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$):

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{kj}(x)$; 2. $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kj}(x)$.

420. Dokážte nasledujúci vzorec pre deriváciu funkcionálneho determinantu n-tého rádu (pritom predpokladáme, že funkcie $f'_{11}, \dots, f'_{kl}, \dots, f'_{nn}$ majú rovnaký definičný obor M):

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & \dots & f_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{k1} & \dots & f'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

Na základe toho nájdite derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$; 2. $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

421. Uveďte príklady nekonštantných spojitých funkcií f a g takých, že

1. neexistuje $f'(a)$, funkcia g má deriváciu v bode $f(a)$ a zložená funkcia $g\circ f$ má deriváciu v bode a ;
2. existuje vlastná $f'(a)$, neexistuje $g'(f(a))$ a funkcia $g\circ f$ má deriváciu v bode a ;
3. neexistuje $f'(a)$ ani $g'(f(a))$, ale existuje vlastná derivácia funkcie $g\circ f$ v bode a.

422. Ak funkcia f definovaná v okolí bodu $a\in\mathbb{R}$ má a funkcia $|f|$ nemá deriváciu v bode a, tak $|f|$ má v bode a navzájom rôzne jednostranné derivácie. Dokážte!

423. Nech $a\in\mathbb{R}$ je dané nenulové číslo. Skonštruujte prostú funkciu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tak, aby platilo: $f(0) = 0$, $f'(0) = a$, funkcia f^{-1} nemá deriváciu v bode 0. (Aby sme čitateľovi uľahčili požadovanú konštrukciu, budeme v tomto príklade - a len v ňom - chápať pojem derivácie širšie: v nami používanej definícii derivácie v bode a nahradíme podmienku „f definovaná v okolí bodu a" podmienkou „$a\in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$".)

424. Nech f je inverzná funkcia k funkcii $y = x + x^5$. Nájdite $f''(0)$!

425. Nájdite $y^{(n)}$, ak:

1. $y = \cos^3 x$; 2. $y = \cos^4 x$;

3. $y = (2x - 1)\, 2^{3x}\, 3^{2x}$; 4. $y = x \ln (x^2 - 3x + 2)$;

5. $y = e^x \sin x$.

426. Nájdite $f^{(n)}(a)$, ak $f(x) = (x - a)\,\varphi(x)$, pričom funkcie φ aj $\varphi^{(n-1)}$ sú definované a spojité na niektorom okolí bodu $a\in\mathbb{R}$ $(n \geq 2)$.

427_o. Nech funkcia f má v každom bode $x\in\mathbb{R}$ druhú deriváciu a nech pre každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$$

($a \neq 0$, b , c sú reálne konštanty). Potom funkcia f má v každom bode $x\in\mathbb{R}$ derivácie všetkých rádov. Dokážte!

428_o. Ukážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ ak } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ak } x = 0 \end{cases}$$

má derivácie všetkých rádov v bode 0.

429. Nech funkcia g má ohraničenú deriváciu definovanú na $\mathbb{R}$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že funkcia $f(x) = x + \varepsilon\, g(x)$ je prostá na $\mathbb{R}$. Dokážte!

430. Nech $a_0, \ldots, a_n \in R$, nech $\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} = 0$. Potom polynóm $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ má aspoň jeden koreň v intervale $(0, 1)$. Dokážte!

431. Ak $a^2 - 3b < 0$, tak rovnica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ má práve jeden koreň, tento koreň je naviac prostý. Dokážte!

432. Ukážte, že všetky korene Legendrovho polynómu $P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n)}$ sú reálne a ležia v intervale $(-1, 1)$.

433. Ak sú všetky korene mnohočlena $x^n + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ reálne, tak $a_2 \leqslant 0$. Dokážte!

434_o. Ak polynóm P_n má tvar $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k - (a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_nx^n)$, kde $a_i \geqslant 0$ $(i = 0, \ldots, n)$, pričom aspoň jeden z koeficientov $a_0, \ldots, a_k$ a aspoň jeden z koeficientov $a_{k+1}, \ldots, a_n$ sú nenulové (v takom prípade hovoríme, že koeficienty majú jednu zmenu znamienka), tak P_n má najviac jeden kladný koreň. Dokážte!
(Návod: sporom, uvažujte funkciu $x^{-k} P_n(x)$, jej derivácia nemá zmenu znamienka, teda nemá kladné korene, čo je spor s Rolleho vetou.)

435. Dokážte, že počet kladných koreňov polynómu nie je väčší než počet zmien znamienok jeho koeficientov (pričom nulové koeficienty sa nezapočítavajú)!

436_o. Ukážte, že rovnica $x^5 - 2x^4 - x^2 - 5 = 0$ má práve jeden reálny koreň.

437. Čo možno povedať o funkcii $f: R \to R$, ak $f^{(n)}(x) = 0$ pre všetky $x \in R$?

438. Nech funkcia f má spojitú monotónnu deriváciu f' definovanú na intervale (a, b), nech $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) = 0$. Potom $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$. Dokážte!

439_o. Nech funkcia f má deriváciu v každom bode intervalu $(0, \infty)$, pričom $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$; nech $g(x) := f(x+1) - f(x)$, $x > 0$. Potom $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. Dokážte!

440_o. Nech funkcia f má spojitú deriváciu definovanú na R. Potom pre každý ohraničený interval $I \subset R$ existuje číslo $K > 0$ tak, že platí

$$\forall\, x, y \in I: \ |f(x) - f(y)| \leqslant K\, |x - y|$$

(funkcia s takouto vlastnosťou sa nazýva lipschitzovsky spojitá na intervale I).

441. Existuje funkcia $f: (0, \infty) \to R$, ktorá má deriváciu v každom bode $x \in (0, \infty)$, pričom platí $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0} f'(x) = 1$?

442_o. Nech $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Podľa vety o strednej hodnote platí $x^2 \sin \frac{1}{x} = x\,(2c \sin \frac{1}{c} - \cos \frac{1}{c})$, odtiaľ $\cos \frac{1}{c} = 2c \sin \frac{1}{c} - x \sin \frac{1}{x}$, kde $0 < c < x$. Ak

$x \to 0$, tak aj $c \to 0$. Z poslednej rovnosti potom dostávame $\lim\limits_{c\to 0} \cos\frac{1}{c} = 0$. Ale je známe, že $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ neexistuje. Objasnite tento paradox!

443_0. Nech funkcia f je spojitá a nekonštantná na intervale $\langle a, b\rangle$, má deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$ a platí $f(a) = f(b)$. Potom existujú body $c_1, c_2 \in (a, b)$ tak, že $f'(c_1) > 0$, $f'(c_2) < 0$. Dokážte!

444. Nech funkcia je spojitá a nelineárna na intervale $\langle a, b\rangle$ a má deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$, v ktorom $|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|$. Dokážte!

445. Nech prostá funkcia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ má deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$. Potom derivácia funkcie f^{-1} je definovaná na hustej podmnožine množiny $D(f^{-1})$. Dokážte!
(Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva hustá v neprázdnej množine $B \subset \mathbb{R}$, ak $A \subset B$ a každý bod $b \in B$ je hromadným bodom množiny A.)

446. Nech funkcia f aj jej derivácia sú definované na intervale $\langle a, b\rangle$, $a.b > 0$, nech $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(a) - f(c) = c.f'(c)/2$. Dokážte!

447. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $\frac{\ln x}{x - 1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ pre $x > 0$, $x \neq 1$ 2. $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ pre $x > 0$;

3. $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ pre $x > 0$, $y > 0$, $0 < \alpha < \beta$.

448_0. Nech funkcia f je diferencovateľná v každom bode intervalu $(0, \infty)$ a $\inf\limits_{x \in (0,\infty)} f'(x) > 0$. Potom $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

449. 1_0. Nech funkcia $f: \langle a, +\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá, nech $f(a) < 0$ a $f'(x) > k > 0$ pre všetky $x > a$. Potom funkcia f je kladná na intervale $\langle a - \frac{f(a)}{k}, \infty)$ a rovnica $f(x) = 0$ má v intervale $\langle a, a - \frac{f(a)}{k})$ práve jeden koreň. Dokážte!

2_0. Ukážte, že jediný kladný koreň rovnice $x^3 + px - q = 0$ $(p > 0,\ q > 0)$ leží v intervale $(0, \frac{q}{p})$.

3. Nech funkcie f, g sú spojité na $\langle a, +\infty)$, nech $f(a) - g(a) = A < 0$ a nech pre všetky $x > a$ platí $f'(x) - g'(x) > p > 0$. Potom pre všetky $x \geqslant a - \frac{A}{p}$ platí $f(x) > g(x)$. Dokážte!

450. Nech funkcia f je rastúca v každom bode otvoreného intervalu I, tj. nech platí

$$\forall a \in I \quad \exists O(a) \quad \forall x, y \in O(a) \cap I: x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y) .$$

Potom funkcia f je rastúca na intervale I. Dokážte!

451. Ukážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{2}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases}$$

je

1. rastúca v bode $x = 0$;

ale

2. nie je rastúca na žiadnom okolí tohto bodu.

452. Nech je daný ohraničený interval I a jeho podmnožina M, pričom žiadny vnútorný bod intervalu I nie je hromadným bodom množiny M. Ak funkcia f je spojitá na intervale I a má zápornú deriváciu v každom bode $x \in I \setminus M$, tak f je klesajúca na I. Dokážte!

453. Dokážte Jensenovu nerovnosť: Ak funkcia f je konvexná na intervale I; $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú kladné čísla a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tak

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) .$$

454. Dokážte nerovnosti:

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, kde $x_1, \dots, x_n$ sú kladné čísla ;

2. $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leqslant \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, kde $x_1, \dots, x_n > 0$;

3. $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^r \leqslant n^{r-1}(\alpha_1^r + \dots + \alpha_n^r)$ pre $r > 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$.

455_o. Každý polynóm stupňa $2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$ má aspoň jeden inflexný bod. Dokážte!

456. Párny polynóm (tj. polynóm, ktorý je párnou funkciou) s kladnými koeficientami nemá inflexné body. Dokážte!

457_o. Nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná na intervale $\langle a, \infty)$, $f(a) = A > 0$, $f'(a) < 0$ a nech pre všetky $x > a$ platí $f''(x) < 0$. Potom rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden koreň v intervale (a, ∞), Dokážte!

458. Ak funkcia f je konvexná na intervale $\langle a, b \rangle$, tak f je spojitá na (a, b) a má vlastné jednostranné derivácie v každom bode $c \in (a, b)$. Dokážte!

459. Dokážte, že v inflexnom bode nemôže mať funkcia lokálny extrém!

460_o. Rozhodnite, či existuje funkcia f, ktorej druhá derivácia je spojitá na $\mathbb{R}$ a ktorá na ľubovoľnom intervale $I \subset \mathbb{R}$ nie je konvexná a nie je konkávna.

461. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$ je prostá a spojitá na intervale I. Ak f je konvexná na I alebo konkávna na I, tak f^{-1} je konvexná na f(I) alebo konkávna na f(I). Dokážte!

462_o. Nech funkcia f je konvexná a nie je rýdzo konvexná na intervale I. Potom existuje interval $I_1 \subset I$, na ktorom je funkcia f lineárna (tj. existujú konštanty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = ax + b$ pre všetky $x \in I_1$). Dokážte!

463. Nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$; 2. $y = (x + 1)^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$;

3. $y = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!})\, e^{-x}$;

4. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}), & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$

464. Dokážte nerovnosti:

1_o. $x^m (a - x)^n \leqslant \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$ pre $m > 0,\ n > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a$;

2. $\dfrac{x + a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a$ pre $x > 0,\ a > 0,\ n > 1$.

465. Sud tvaru valca stojaci na vodorovnej rovine je do výšky H naplnený vodou. V akej hĺbke x pod hladinou treba do steny suda urobiť otvor, ak má voda dostreknúť najďalej? (Rýchlosť vytekajúcej vody sa podľa Torricelliho zákona rovná $\sqrt{2gh}$, kde h je hĺbka otvoru pod hladinou.)

466. K rieke šírky a (m) sa pod pravým uhlom pripája kanál šírky b (m). Aká je najväčšia dĺ... plavidiel, ktoré môžu z rieky vplávať do kanála (šírku plavidiel zanedbávame) ?

467. Nájdite nasledujúce limity použitím l'Hospitalovho pravidla:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin x^2}{x\cos x - \sin x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1 + x)}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x \,.\, \ln(1 + x)}{\sqrt{x}}$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$;

5. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{x^n - e^x}$, $n \in \mathbb{N}$;

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} (x^{x^x} - 1)$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty} (x^{\frac{7}{8}} - x^{\frac{6}{7}} \ln^2 x)$;

10. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} \,.\, \dfrac{\ln(e^x + x)}{x})$;

11. $\lim\limits_{x\to \infty} ((x + a)^{1 + \frac{1}{x}} - x^{1 + \frac{1}{x+a}})$.

468. Nech $f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$, $g(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$. Potom $0 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$; napriek tomu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje. Dokážte! Prečo použitie l'Hospitalovho pravidla vedie k nesprávnemu výsledku?

469. Nájdite Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak

1. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$, $a = 0$;

2. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{2 + x}{2 - x}}$, $a = 0$, $n = 2m + 1$;

3. $f(x) = (x+3)\,e^{3x^2+18x}$, $a = -3$; 4. $f(x) = \log_2 (3x^2 - 24x + 50)$, $a = 4$;

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{x\,(2-x)}}$, $a = 1$;

6. $f(x) = x \,.\, \sin (x^2 + 2x + 2) \,.\, \cos (x^2 + 2x)$, $a = -1$.

470. Nájdite Maclaurinov polynóm stupňa n funkcie f, ak:

1. $f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$; 2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

3. $f(x) = \arccos x$.

(Návod: Najprv zostrojte Maclaurinov polynóm funkcie f'.)

471. Dokážte, že e je iracionálne číslo.

472. Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, nech funkcia f má v bode a nenulovú (n+1)-vú deriváciu. Každému bodu $x \in O(a)$ priraďme číslo $\vartheta(x) \in (0, 1)$ tak, aby platilo

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a+\vartheta(x)(x-a))}{n!}(x-a)^n .$$

Potom $\lim\limits_{x\to a} \vartheta(x) = \dfrac{1}{n+1}$. Dokážte!

473. Pomocou Taylorových polynómov nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x - \ln(1+x) + \cos x e^{-x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right)$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right)$.

474. Nech funkcia f je dvakrát spojite diferencovateľná na intervale $\langle 0, 1\rangle$ (to znamená, že funkcie f', f'' sú spojité na intervale $\langle 0, 1\rangle$), nech $f(0) = f(1) = 0$ a nech existuje $M > 0$ také, že pre všetky $x \in (0, 1)$ platí $|f''(x)| \leqslant M$. Potom pre každé $x \in (0, 1)$ platí $|f'(x)| \leqslant M/2$. Dokážte!

475. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná v každom bode $x \in \mathbb{R}$, nech funkcie f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ sú ohraničené na množine $\mathbb{R}$. Označme $M_k := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, $k = 0, 1, 2$.
Potom:

1. $M_1^2 \leqslant 4\, M_0 M_2$; 2. $M_1^2 \leqslant 2\, M_0 M_2$.

Dokážte!

476. Zostrojte grafy nasledujúcich kriviek:

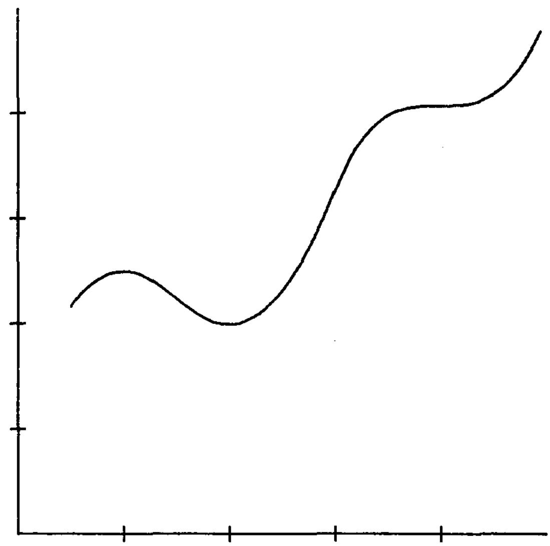
1. $y = e^{-2x}\sin^2 x$; 2. $y^3 = 6x^2 - x^3$;

3. $y^2 = x^4(x + 1)$; 4. $y = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{3 + x}}$;

5. $y^2 = \dfrac{x^2(1 - x)}{(1 + x)^2}$, $x > -5$.

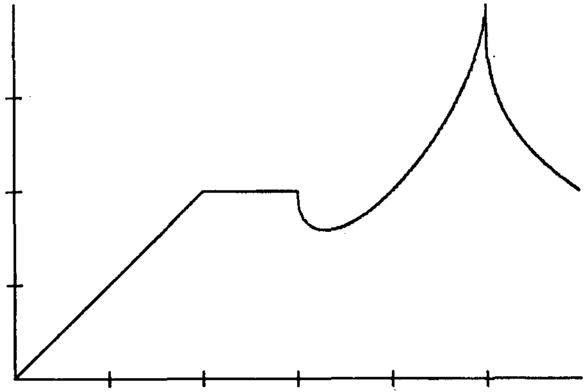
477. Načrtnite graf funkcie f', ak je daný graf funkcie f:

1.



Obr. 3

2.



Obr. 4

478_o. Načrtnite graf funkcie f v okolí bodu a, ak

1. $a = 3$, $f(3) = 1$, $f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0$, $f^{(4)}(3) < 0$;

2. $a = -1$, $f(-1) = -2$, $f'(-1) = 1$, $f''(-1) = 0$, $f'''(-1) > 0$.