3. SPOJITOSŤ FUNKCIE

3.1. Definícia spojitosti v bode a na množine. Klasifikácia bodov nespojitosti

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f): |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Poznámka. Všimnime si, že bod a nemusí byť hromadným bodom množiny $D(f)$. Môžu teda nastať dva prípady:

1. ak $a \in D(f)$ je hromadným bodom množiny $D(f)$, tak podmienka $(*)$ je ekvivalentná s podmienkou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

2. ak $a \in D(f)$ nie je hromadným bodom množiny $D(f)$ (tj. existuje $\eta > 0$ tak, že $D(f) \cap (a - \eta, a + \eta) = \{a\}$; taký bod sa nazýva izolovaným bodom množiny $D(f)$), je podmienka $(*)$ splnená (stačí položiť $\delta = \eta$ pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$). Teda funkcia f je spojitá v každom izolovanom bode množiny $D(f)$.

Veta 1. Ak funkcie f, g sú spojité v bode a $(\in D(f) \cap D(g))$, tak aj funkcie $c.f$ (c je reálna konštanta), $f + g$, $f - g$, $f.g$ sú spojité v bode a. Ak naviac $g(a) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode a.

Veta 2. Ak funkcia f je spojitá v bode a, funkcia g je spojitá v bode $f(a)$, tak funkcia $g \circ f$ je spojitá v bode a.

Hovoríme, že funkcia f je spojitá, ak je spojitá v každom bode svojho definičného oboru. Hovoríme, že funkcia f je spojitá na množine A $(\emptyset \neq A \subset D(f))$, ak je spojitá funkcia f/A.

Veta 3. Každá základná elementárna funkcia je spojitá.

(Z viet 1, 2 a 3 vyplýva veta 4 z kapitoly 2.)

221. Pomocou kvantifikátorov zapíšte tvrdenie „funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$"!

222. Vyšetrite spojitosť nasledujúcich funkcií v daných bodoch:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ v bode 0 ;

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ v bode 0 ;

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & \text{ak } x \neq -1 \\ 0, & \text{ak } x = -1 \end{cases}$ v bode -1 ;

4. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ v bode 0 ;

5. $f(x) = x \operatorname{sgn} x$ v bode 0 .

223. Nasledujúce funkcie nie sú definované v bode a. Určte hodnotu f(a) tak, aby takto dodefinovaná funkcia f bola spojitá v bode a:

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$, $a = 0$; 2. $f(x) = (1+x)^{1/2x}$, $a = 0$;

3. $f(x) = e^{-1/x^2}$, $a = 0$; 4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/(x-1)}}$, $x < 1$, $a = 1$;

5. $f(x) = (x+3) \sin \dfrac{1}{x+3}$, $a = -3$.

224. Vyšetrite spojitosť nasledujúcich funkcií:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x^3 + 5x^2 + 6x}$; 2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^x}{x}, & \text{ak } x < 0 \\ 2x - 1, & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(x) = \operatorname{sgn}(x(1 - x^2))$; 4. $f(x) = x\,[x]$;

5. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$, $x \geq 0$; 6. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$;

7. $f(x) = \sqrt{-\sin^2 x}$.

Riešenie: 2. Dokázať spojitosť funkcie f na množine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je jednoduché: pre každé číslo $a < 0$ možno nájsť také jeho okolie O(a), na ktorom sa funkcia f zhoduje s elementárnou funkciou $\dfrac{1 - e^x}{x}$, tá je spojitá v bode a; preto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1 - e^x}{x} = \dfrac{1 - e^a}{a} = f(a)$, čo znamená, že funkcia f je spojitá v bode a. Analogicky sa postupuje v prípade $a > 0$ *). Prípad $a = 0$ treba vyšetriť samostatne: vtedy $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1 - e^x}{x} = -1$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (2x - 1) = -1$, preto $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$. Funkcia f je teda spojitá aj v bode 0, preto f je spojitá funkcia.

*) Uvedenú myšlienku možno ľahko zovšeobecniť: ak sú dané funkcia f a spojitá funkcia g a existuje neprázdna otvorená množina $G \subset D(f) \cap D(g)$ taká, že $f/G = g/G$, tak f je spojitá v každom bode množiny G.

225_0. Nech funkcie f, g sú definované na $\mathbb{R}$ a funkcia $f + g$ je spojitá v bode a. Potom nastane práve jedna z nasledujúcich možností:
a/ funkcia f aj funkcia g sú spojité v bode a;
b/ ani funkcia f ani funkcia g nie je spojitá v bode a.
Dokážte; obidve uvedené možnosti dokumentujte na príkladoch!

226_0. Nech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom funkcia $f.\chi$ je spojitá práve v bodoch množiny $\{x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x) = 0\}$. Dokážte!

227. Možno tvrdiť, že funkcia $g\circ f$ nie je spojitá v bode x_0, ak f je spojitá v bode x_0 a g nie je spojitá v bode $f(x_0)\in D(g)$?

228. Nech funkcie f, g sú spojité v bode a $(\in D(f)\cap D(g))$. Potom aj funkcie $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sú spojité v bode a. Dokážte!

229. Vyšetrite spojitosť Dirichletovej funkcie $\chi(x)$!

230. Dokážte, že Riemannova funkcia f, definovaná predpisom $f(x) = 0$, ak $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a $f(x) = 1/n$, ak $x = m/n$, kde $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$ sú nesúdeliteľné čísla, je spojitá v každom iracionálnom čísle a nespojitá v každom racionálnom čísle.

231_0. Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom
$$\sup\{f(x)\ ;\ x\in\langle a, b\rangle\} = \sup\{f(x)\ ;\ x\in\langle a, b\rangle\cap\mathbb{Q}\}.$$
Dokážte!

Číslo $a\in\mathbb{R}$, ktoré je hromadným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f, sa nazýva <u>bodom nespojitosti funkcie f</u>, ak je splnená niektorá z nasledujúcich podmienok:
a/ $a\notin D(f)$;
b/ neexistuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
c/ $a\in D(f)$ a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ale neplatí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ak $a\in\mathbb{R}$ je bod nespojitosti funkcie f a existuje konečná $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, nazýva sa a <u>bodom odstrániteľnej nespojitosti</u>. Ak neexistuje vlastná $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, nazýva sa a <u>bodom neodstrániteľnej nespojitosti</u>.

Nech $a\in\mathbb{R}$ je bod nespojitosti funkcie f, pričom a je hromadným bodom množín $D(f)\cap(-\infty, a)$ aj $D(f)\cap(a, +\infty)$. Ak v bode a existujú vlastné jednostranné limity a $\lim\limits_{x\to a-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, nazýva sa a <u>bodom nespojitosti 1. druhu</u> (rozdiel $\lim\limits_{x\to a+} f(x) - \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ sa potom nazýva <u>skokom funkcie f v bode a</u>). Ak aspoň jedna z jednostranných limít v bode a neexistuje alebo je nevlastná, nazýva sa a <u>bodom nespojitosti 2. druhu</u>.

Poznámka. Klasifikácia bodov nespojitosti nie je v matematickej literatúre jednotná; napr. niekedy sa hromadné body množiny $D(f)$, ktoré nie sú prvkami $D(f)$, nepovažujú za body nespojitosti funkcie f; v definícii bodu nespojitosti 1. druhu sa niekedy nepožaduje splnenie podmienky $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ atď.

232. Vyšetrite charakter bodov nespojitosti nasledujúcich funkcií:

1. $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$;
2. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$;
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;
4. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$;
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$;
6. $f(x) = \cos^2 \dfrac{1}{x}$;
7. $f(x) = \sqrt{x}\ \mathrm{arctg}\ \dfrac{1}{x}$;
8. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$;
9. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } |x| \leqslant 1 \\ 1, & \text{ak } |x| > 1 \end{cases}$;
10. $f(x) = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;
11. $f(x) = g(g(g(x)))$, kde $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$;
12. $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;
13. $f(x) = g(\varphi(x))$, kde $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } 0 < x \leqslant 1 \\ 2-x, & \text{ak } 1 < x < 2 \end{cases}$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 2-x, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

233_o. 1. Dokážte, že monotónna funkcia definovaná na $\mathbb{R}$ môže mať len body nespojitosti 1. druhu.

2. Dokážte, že množina bodov nespojitosti neklesajúcej funkcie f definovanej na intervale I je spočítateľná.
(Návod: Stačí dokázať, že množina S všetkých bodov nespojitosti funkcie f ležiacich vnútri intervalu I - každý z nich je bodom nespojitosti 1. druhu - je spočítateľná. Ak každému bodu $a \in S$ priradíme interval $(\lim\limits_{x\to a-} f(x), \lim\limits_{x\to a+} f(x))$, dostaneme systém po dvoch disjunktných intervalov; tento systém je spočítateľný - pozri pr. 99.)

3.2. Vlastnosti spojitých funkcií I

Funkcia f definovaná na intervale I sa nazýva darbouxovská na I, ak pre každé $a, b \in I$, $a < b$, platí: na intervale $\langle a, b\rangle$ nadobúda funkcia f všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$; tj. ak platí

$$\forall a, b \in I, a < b: f(\langle a, b\rangle) \supset \{y \in \mathbb{R} ; \min \{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max \{f(a), f(b)\}\} .$$

Veta 4. Ak je funkcia f spojitá na intervale I, tak je darbouxovská na I.

234. Dokážte, že existuje
1. $x \in (0, 1)$, pre ktoré platí $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
2. $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $x = \cos x$;
3. aspoň jedno riešenie rovnice $P(x) = 0$, kde P je polynóm nepárneho stupňa.

Riešenie: 1. Funkcia daná predpisom $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1$ je spojitá, a teda aj darbouxovská na $\mathbb{R}$, nadobúda preto na intervale $\langle 0, 1\rangle$ všetky hodnoty medzi $f(0) = -1$ a $f(1) = 2$. Pretože $-1 < 0 < 2$, musí existovať $x \in (0, 1)$, v ktorom $f(x) = 0$.

235. Nech funkcia f je spojitá na intervale (a, b), nech $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) .$$

Dokážte!

236. Nech $f: \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ je spojitá funkcia. Potom pre niektoré $c \in \langle 0, 1\rangle$ platí $f(c) = c$. Dokážte!

237_0. Ak pre spojitú funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f(\mathbb{Q}) = \{0\}$, tak aj $f(\mathbb{R}) = \{0\}$. Dokážte!

238. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má túto vlastnosť: pre každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je $I \setminus f(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Potom je f konštantná na $\mathbb{R}$ alebo nespojitá v každom bode $x \in \mathbb{R}$. Dokážte!

239_0. Ak je funkcia f prostá a spojitá na intervale I, tak je tam rýdzomonotónna. Dokážte!

Veta 5. Ak je funkcia f spojitá na kompaktnej množine A (alebo špeciálne na uzavretom ohraničenom intervale), tak je na A ohraničená a existujú $\max_{x \in A} f(x)$ a $\min_{x \in A} f(x)$.

240. Nech spojitá funkcia f nadobúda na intervale $\langle a, b\rangle$ len kladné hodnoty. Potom existuje $\mu > 0$ tak, že $f(x) \geq \mu$ platí pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Dokážte!

241. Ak funkcia $f:(a, b)\to\mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$ je spojitá a existujú konečné $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, tak f je ohraničená. Dokážte!

242. Ak P je polynóm párneho stupňa, tak existuje $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x)$ alebo $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x)$. Dokážte! Aký je koeficient pri člene s najvyššou mocninou, ak existuje $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x)$?

243_0. Ak f je spojitá na intervale $\langle 0, \infty)$ a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(0)$, tak existuje $\max\limits_{x\geq 0} f(x)$ aj $\min\limits_{x\geq 0} f(x)$. Dokážte!

244_0. Vetu 5 možno dokázať na základe nasledujúcich faktov:

1. ak funkcia f je spojitá na kompaktnej množine A, tak $f(A)$ je kompaktná množina;
2. každá kompaktná množina je ohraničená a obsahuje svoje supremum a infimum.

Dokážte tieto tvrdenia!

245. Nech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ má len body nespojitosti 1. druhu. Potom f je ohraničená na každom ohraničenom intervale. Dokážte!

246. Existuje spojitá a ohraničená funkcia $f:(0, 1\rangle\to\mathbb{R}$ taká, že neexistuje $\max\limits_{x\in(0,1\rangle} f(x)$ ani $\min\limits_{x\in(0,1\rangle} f(x)$?

3.3. Rovnomerná spojitosť. Vlastnosti spojitých funkcií II

Funkcia f sa nazýva <u>rovnomerne spojitá na množine $A\subset D(f)$</u> $(A \neq \emptyset)$, ak platí

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x, y\in A: \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \ .$$

Funkcia f rovnomerne spojitá na svojom definičnom obore sa nazýva <u>rovnomerne spojitá</u>.

247. Pomocou kvantifikátorov zapíšte tvrdenie „Funkcia f je spojitá na intervale (a, b), ale nie je tam rovnomerne spojitá."!

248. Rozhodnite, či je funkcia f rovnomerne spojitá na množine A. Svoje tvrdenie dokážte na základe definície!

1. $f(x) = 5x - 3$, $\quad A = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $\quad A = \langle -2, 5\rangle$;
3. $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $\quad A = (0, 1)$;
4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad A = (\frac{1}{10}, 1)$;
5. $f(x) = \sin x^2$, $\quad A = \langle 0, \infty)$;

6. $f(x) = \sqrt{x}$, $A = \langle 0, \infty)$;

7. $f(x) = x + \sin x$, $A = \mathbb{R}$.

Riešenie: 2. Predpokladajme, že $x, y \in \langle -2, 5 \rangle$, $|x - y| < \delta$, a pokúsme sa na základe toho zhora odhadnúť výraz $|f(x) - f(y)|$. Postupne dostaneme $|f(x) - f(y)| = |x^2 - 2x - 1 - (y^2 - 2y - 1)| = |(x^2 - y^2) + 2(y - x)| \leq |x^2 - y^2| + 2|x - y| = |x - y||x + y| + 2|x - y| = |x - y|(|x + y| + 2) \leq |x - y|(|x| + |y| + 2)$. Pretože $x, y \in \langle -2, 5 \rangle$, je $|x| \leq 5$, $|y| \leq 5$, odtiaľ $|x - y|(|x| + |y| + 2) \leq 12|x - y| < 12\delta$.

Zistili sme teda: ak $x, y \in \langle -2, 5 \rangle$, $|x - y| < \delta$, tak $|f(x) - f(y)| < 12\delta$. To znamená, že funkcia f je rovnomerne spojitá na intervale $\langle -2, 5 \rangle$, pre dané $\varepsilon > 0$ stačí totiž položiť $\delta = \varepsilon/12$.

5. Ak si predstavíme graf funkcie $f(x) = \sin x^2$, $x \geq 0$, zistíme, že v smere k $+\infty$ funkcia f na intervaloch stále menšej dĺžky nadobúda všetky hodnoty medzi 1 a -1, tj. že jej graf sa smerom k $+\infty$ „zhusťuje". To nás vedie k domnienke, že f nie je na $\langle 0, \infty)$ rovnomerne spojitá. Všimnime si preto podrobnejšie dvojice bodov $(x_n, y_n) = \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$; zrejme $f(x_n) = -1$, $f(y_n) = 1$. Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - x_n| = 0$, existuje pre každé $\delta > 0$ dvojica (x_n, y_n) taká, že $|x_n - y_n| < \delta$. Tým sme dokázali

$$\exists \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon = 2) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_n \geq 0,\ y_n \geq 0 : |x_n - y_n| < \delta \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon ,$$

čo je negácia tvrdenia „f je rovnomerne spojitá na $\langle 0, \infty)$". Teda $\sin x^2$ nie je rovnomerne spojitá na intervale $\langle 0, \infty)$.

249. Funkcia f je rovnomerne spojitá na ohraničenom intervale I práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje spojitá po častiach lineárna funkcia φ taká, že pre všetky $x \in I$ platí $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Dokážte! (Spojitá funkcia φ definovaná na ohraničenom intervale I sa nazýva po častiach lineárna, ak existuje konečný počet po dvoch disjunktných intervalov I_1, I_2, ..., I_n tak, že $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n = I$ a funkcie φ/I_i $(i = 1, \ldots, n)$ sú lineárne; tj. grafom je „lomená čiara".)

250. Pre funkciu F nájdite spojitú po častiach lineárnu funkciu f takú, aby pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$ platilo $|F(x) - f(x)| < 0{,}1$, ak:

1. $F(x) = x^2$, $\langle a, b \rangle = \langle -1, 1 \rangle$;

2. $F(x) = \frac{1}{x}$, $\langle a, b \rangle = \langle \frac{2}{3}, 2 \rangle$.

<u>Veta 6</u>. Funkcia spojitá na kompaktnej množine K je rovnomerne spojitá na K.

251. Rozhodnite, či je funkcia f rovnomerne spojitá na množine A:

1. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $A = \langle -1, 1 \rangle$;

2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $A = (0, \pi\rangle$;

3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $A = \langle 0, \infty)$;

4. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} , & \text{ak } x \in (0, \pi\rangle \\ 0 , & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, $A = \langle 0, \pi\rangle$;

5. $f(x) = x \sin x$, $A = \langle 0, \infty)$;

6. $f(x) = \dfrac{x^6 - 1}{\sqrt{1 - x^4}}$, $A = (-1, 1)$;

7. $f(x) = \ln x$, $A = \langle 1, \infty)$.

Riešenie: 2. Na funkciu $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0, \pi\rangle$ nemôžeme aplikovať vetu 6, pretože $D(f) = (0, \pi\rangle$ nie je kompaktná množina. Pomôžeme si nasledovne: funkciu f možno spojite dodefinovať v čísle 0, pretože 0 je bodom odstrániteľnej nespojitosti. Teda $f = f_1 / (0, \pi\rangle$, kde funkcia f_1 je určená predpisom $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in (0, \pi\rangle \\ 1 , & \text{ak } x = 0 \end{cases}$. Na kompakte $\langle 0, \pi\rangle$ je f_1 spojitá, a teda podľa vety 6 aj rovnomerne spojitá. Pretože zúženie rovnomerne spojitej funkcie je funkcia rovnomerne spojitá, je funkcia $\dfrac{\sin x}{x}$ rovnomerne spojitá na intervale $(0, \pi\rangle$.

252. Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle 0, \infty)$ a existuje konečná $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, tak f je rovnomerne spojitá na $\langle 0, \infty)$. Dokážte!

253_0. Každá spojitá periodická funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rovnomerne spojitá. Dokážte!

254. Nech funkcia f je definovaná na ohraničenom intervale (a, b), nech

1. $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = +\infty$; 2. $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ neexistuje.

Potom f nie je rovnomerne spojitá na (a, b). Dokážte!

255. Spojitá funkcia f definovaná na ohraničenom intervale (a, b) je rovnomerne spojitá na (a, b) práve vtedy, keď existujú konečné $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$. Dokážte!

256. 1. Ak f je rovnomerne spojitá na ohraničenom intervale (a, b), tak f je na (a, b) ohraničená. Dokážte!

2. Uveďte príklad funkcie, ktorá je spojitá a ohraničená na ohraničenom intervale, ale nie je tam rovnomerne spojitá!

3.4. Ďalšie príklady

257. Vyšetrite spojitosť nasledujúcich funkcií, určte charakter bodov nespojitosti:

1. $f(x) = (-1)^{[x^2]}$;
2. $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] \operatorname{sgn} \sin \left[\frac{\pi}{x}\right]$;
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$;
4. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x \operatorname{arctg} (n \operatorname{ctg} x))$;
5. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$;
6. $f(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln (1 + e^{xt})}{\ln (1 + e^t)}$.

258. Určte číslo A tak, aby funkcia $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in D(f) \\ A, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ bola spojitá v bode 0:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$;
2. $f(x) = x^x,\ x > 0$;
3. $f(x) = x \ln^2 x$.

259. Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom funkcia

$$F(x) = \begin{cases} -c, & \text{ak } f(x) < -c \\ f(x), & \text{ak } |f(x)| \leq c \\ c, & \text{ak } f(x) > c \end{cases}$$

je spojitá. Dokážte!

260. Zoraďme množinu $\mathbb{Q}$ do prostej postupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$; nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná postupnosť reálnych čísel. Definujme funkciu ψ (nazýva sa zovšeobecnená Riemannova funkcia) nasledovne:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ a_n, & \text{ak } x = q_n \end{cases}.$$

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tak funkcia ψ je spojitá v každom iracionálnom čísle. Dokážte! Platí aj obrátená implikácia?

261. Vyšetrite spojitosť funkcie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx}{n+1}, & \text{ak } x = \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N} \text{ sú nesúdeliteľné} \\ |x|, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

262. Nech $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Vyšetrite spojitosť funkcie

$$g(x) = \begin{cases} \sup\limits_{t \in \langle a, x)} f(t) - \inf\limits_{t \in \langle a, x)} f(t), & \text{ak } x \in (a, b\rangle \\ 0, & \text{ak } x = a \end{cases}.$$

263. 1. Nech je daná funkcia f, nech $x_0 \in D(f)$ a platí

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0: |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Vyplýva z týchto predpokladov spojitosť funkcie f v bode x_0? Akú vlastnosť funkcie f popisuje uvedená podmienka?

2. Nech je daná funkcia f, nech platí

$$\forall x_0 \in D(f) \ \forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Longrightarrow |x - x_0| < \delta .$$

Vyplýva z týchto predpokladov spojitosť funkcie f? Aká vlastnosť funkcie f je popísaná uvedenou podmienkou?

264. Možno tvrdiť, že funkcia $g \circ f$ je nespojitá v bode a, ak f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$ a funkcia g je

1. spojitá na $\mathbb{R}$;
2. prostá a spojitá na $\mathbb{R}$?

265$_o$. Zostrojte funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je spojitá práve v bodoch množiny M, ak

1. $M = \{0\}$;
2. $M = \emptyset$;
3. $M = \mathbb{N}$;
4. $M = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$.

266. Zistite, či existuje bijekcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá nie je spojitá v žiadnom bode $x \in \mathbb{R}$.

267. Dokážte, že neexistuje funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že pre každé $a \in \mathbb{R}$ existuje vlastná $\lim_{x \to a} f(x)$ a platí $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

268. 1. Ak pre funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ v každom bode $a \in \mathbb{R}$, tak množina $A :=$ $:= \{ x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq 0 \}$ je spočítateľná. Dokážte!

2. Neexistuje funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá má v každom bode $a \in \mathbb{R}$ nevlastnú limitu. Dokážte!

269$_o$. Ak polynóm P párneho stupňa nadobúda aspoň jednu hodnotu, ktorá má opačné znamienko ako koeficient pri člene s najvyššou mocninou, tak P má aspoň dva reálne korene. Dokážte!

270$_o$. Ak je funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ spojitá, tak je konštantná. Dokážte!

271. Nech funkcia $f: \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá a ohraničená a neexistuje $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Potom existuje $A \in \mathbb{R}$, pre ktoré má rovnica $f(x) = A$ nekonečne veľa riešení. Dokážte!

272$_o$. Ak $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(f(x)) = x$, tak existuje riešenie rovnice $f(x) = x$. Dokážte!

273. Ak $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá periodická funkcia s periódou T, tak existuje také $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré $f(a + \frac{T}{2}) = f(a)$. Dokážte!

274. 1$_o$. Inverzná funkcia k rýdzomonotónnej funkcii definovanej na intervale je spojitá. Dokážte!

2. Uveďte príklad prostej funkcie spojitej v bode 0, ktorej inverzná funkcia nie je spojitá v bode $f(0)$!

3. Uveďte príklad spojitej rýdzomonotónnej funkcie, ktorej inverzná funkcia nie je spojitá!

275_o. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rovnomerne spojitá. Potom existujú čísla $a \geq 0$, $b \geq 0$ tak, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|f(x)| \leq a\,|x| + b$. Dokážte!

276. 1. Ak sú funkcie f, g rovnomerne spojité na ohraničenom intervale (a, b), tak sú tam rovnomerne spojité aj funkcie $f + g$, $f.g$. Dokážte!

2_o. Uveďte príklad funkcií f, g rovnomerne spojitých na intervale, ktorých súčin tam nie je rovnomerne spojitý.

277. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúceho tvrdenia: „Nech g je spojitá nekonštantná funkcia definovaná na intervale I, nech funkcia f je spojitá na intervale $g(I)$. Ak aspoň jedna z funkcií f, g je rovnomerne spojitá, tak aj funkcia $f \circ g$ je rovnomerne spojitá."

278. Popíšte funkcie, ktoré vyhovujú podmienke:

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, 0 < \delta < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: |x - y| < \delta \Longrightarrow f(x) - f(y) < \varepsilon$;
3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: x - y < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.