2. LIMITA FUNKCIE

2.1. Okolia a hromadné body

Nech $a \in \mathbb{R}$; každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, sa nazýva okolie bodu a. Číslo ε sa nazýva polomer okolia $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; ak chceme zdôrazniť, že dané okolie bodu a má polomer ε, hovoríme o ε-okolí bodu a. Okolím bodu ∞ sa nazýva každý interval (K, ∞), kde $K \in \mathbb{R}$; okolím bodu $-\infty$ každý interval $(-\infty, K)$, kde $K \in \mathbb{R}$. Okolie bodu $b \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ sa nazýva rozšírená množina reálnych čísel a pozostáva zo všetkých reálnych čísel a symbolov $+\infty$, $-\infty$ *)) budeme označovať $O(b)$, symbol $O_\varepsilon(b)$ budeme používať pre ε-okolie bodu $b \in \mathbb{R}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, ak každé jeho okolie $O(a)$ obsahuje aspoň jeden prvok množiny M rôzny od a, tj. ak platí

$$\forall\, O(a):\ (O(a) \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset$$

(tento výrok možno zapísať aj v tvare $\forall\, O(a)\ \exists\, x \in M:\ x \neq a \wedge x \in O(a)$; je ekvivalentný s výrokom: každé okolie bodu a obsahuje nekonečne veľa prvkov množiny M).

Množinu všetkých hromadných bodov množiny M budeme označovať M'.

100. Dokážte, že bod a je hromadný bod množiny A, ak

1. $a = 0$, $\quad A = \{ x \in \mathbb{R} ;\ \sin \frac{1}{x} = 0 \}$;

2_0. $a = -\infty$, $\quad A = \{ x \in \mathbb{R} ;\ \cos x = \frac{1}{2} \}$;

3. $a = \frac{1}{9}$, $\quad A = \{ \frac{m}{10^n} ;\ m, n \in \mathbb{N} \}$ (teda A je množina všetkých kladných čísel, ktorých zápis v desiatkovej sústave má konečný počet nenulových cifier za desatinnou čiarkou).

101. Nájdite všetky hromadné body množín

1. $A = \langle 0, 1)$; $\quad$ 2. $B = \{ (-1)^n n ;\ n \in \mathbb{N} \}$;

3. $C = (-2, \infty)$; $\quad$ 4. $D = \{ \frac{m}{n} ;\ m < n,\ m, n \in \mathbb{N} \}$;

---

*) namiesto symbolu $+\infty$ sa často používa symbol ∞, niektorí autori však zavádzajú ~~symbol~~ ∞ s iným významom, k tomu pozri poznámku na konci odseku 2.5

5. $E = \{ \frac{m}{n} ; m < n, m, n \in \mathbb{Z} \}$; 6. $F = \langle 1, 2) \setminus \mathbb{Q}$.

102. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte výroky:
1. Bod ∞ nie je hromadný bod množiny M ;
2. Množina M nemá hromadné body.

103. Uveďte príklad neprázdnej množiny $A \subset \mathbb{R}$ takej, že
1. $A' = \emptyset$; 2. $A' = \{ 1, +\infty \}$;
3. $A' = \{ -\infty, +\infty \}$; 4. A' je nespočítateľná množina ;
5. A' je nekonečne spočítateľná množina .

104. Nech $A \subset \mathbb{R}$ je zhora ohraničená neprázdna množina, nech $\sup A \notin A$. Potom $\sup A$ je hromadný bod množiny A. Dokážte!

2.2. Definícia limity

Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Bod $b \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva <u>limita funkcie f v bode a</u>, ak platí

$$\forall O(b) \quad \exists O(a) \quad \forall x \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap D(f): f(x) \in O(b) .$$

(Ak $b \in \mathbb{R}$, hovoríme o <u>vlastnej</u> (alebo <u>konečnej</u>) <u>limite</u>; ak $b = \infty$ alebo $b = -\infty$, o <u>nevlastnej limite</u>; ak $a = \infty$ alebo $a = -\infty$, používame názov <u>limita v nevlastnom bode</u>.) Zapisujeme $\lim_{x \to a} f(x) = b$ alebo $f(x) \to b$ pre $x \to a$.

Všimnime si teraz jednotlivé špeciálne prípady, ktoré zahŕňa uvedená definícia; začneme postupnosťami:

1. Nech $b \in \mathbb{R}$; hovoríme, že <u>postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k (číslu) b</u>, ak $\lim_{n \to \infty} a_n = b$, tj. ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0: |a_n - b| < \varepsilon \text{ *)} .$$

2. Hovoríme, že <u>postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $+\infty$</u>, ak $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, tj. ak platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0: a_n > K .$$

---

*) Výroky

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0: |a_n - b| < \varepsilon$$

a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0: |a_n - b| < \varepsilon$$

sú ekvivalentné. Pretože v definícii konečnej limity postupnosti je zvykom žiadať $n_0 \in \mathbb{N}$ (a nie $n_0 \in \mathbb{R}$), budeme ju v takej podobe používať aj my (hoci - ako uvidíme v pr. 105 - sa tým niekedy komplikuje vyjadrenie závislosti čísla n_0 na čísle ε). Analogická poznámka sa vzťahuje aj na definície nevlastných limít postupností.

3. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $-\infty$, ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, tj. ak platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 :\ a_n < K .$$

Postupnosti, ktoré majú vlastnú limitu, sa nazývajú konvergentné; ak postupnosť nemá limitu alebo má nevlastnú limitu, nazýva sa divergentná.

105. Na základe definície dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} = \dfrac{3}{5}$ (pre ktoré $n \in \mathbb{N}$ platí: a/ $\left|\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} - \dfrac{3}{5}\right| < 0{,}5$; b/ $< 0{,}005$; c/ $< 0{,}00005$?) ;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{2n^2+2} = \dfrac{1}{2}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+8} = +\infty$ (počínajúc ktorým prirodzeným číslom platí nerovnosť $\dfrac{n^2}{n+8} > 10^3$?) ;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{n} - n\right) = -\infty$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(|q| < 1)$.

Riešenie: 2. Musíme dokázať pravdivosť výroku

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 :\ \left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

Nech je teda dané číslo $\varepsilon > 0$; zistime, ktoré čísla $n \in \mathbb{N}$ vyhovujú nerovnici

$$\left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon .$$

Postupnými úpravami dostaneme ekvivalentné vzťahy v $\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{3n}{2n^2+2}\right| < \varepsilon ,$$

$$2\varepsilon n^2 - 3n + 2\varepsilon > 0 .$$

(Nájdeme najprv všetky reálne riešenia poslednej nerovnice, z nich potom vyberieme tie, ktoré ležia v $\mathbb{N}$. Diskriminant D je rovný $9 - 16\varepsilon^2$, preto pre reálne riešenia platí:

1. ak $\varepsilon > \frac{3}{4}$, tj. ak $D < 0$, je riešením každé reálne číslo ;

2. ak $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$, je $D \geq 0$, preto riešeniami sú všetky prvky množiny $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{9-16\varepsilon^2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{9-16\varepsilon^2}}{2}, \infty\right)$.)

Preto:

1. ak $\varepsilon > \frac{3}{4}$, je riešením nerovnice $\left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ každé číslo $n \in \mathbb{N}$;

2. ak $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$, sú riešeniami nerovnice $\left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ všetky tie $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí $n > (3 + \sqrt{9 - 16\varepsilon^2})/2\varepsilon$.

Teraz už vidíme, že výrok (*) je pravdivý: stačí položiť $n_0 = 1$ pre $\varepsilon > \frac{3}{4}$ a $n_0 = [(3 + \sqrt{9 - 16\varepsilon^2})/2\varepsilon]$ pre $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$ ($[\cdot]$ označuje celú časť; keby sme v (1) namiesto podmienky $n_0 \in \mathbb{N}$ mali podmienku $n_0 \in \mathbb{R}$, stačilo by pre $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$ položiť $n_0 = (3 + \sqrt{9 - 16\varepsilon^2})/2\varepsilon$).

Poznámka. Ak je nerovnosť $|a_n - b| < \varepsilon$ splnená pre všetky $n > n_0$ a platí $n_1 > n_0$, tak nerovnosti $|a_n - b| < \varepsilon$ iste vyhovujú všetky čísla $n > n_1$. Z tohto samozrejmého tvrdenia vyplýva, že v závere riešenia príkladu 105.2 by stačilo položiť $n_0 \geq 1$ pre $\varepsilon > \frac{3}{4}$ a $n_0 \geq [(3 + \sqrt{9 - 16\varepsilon^2}/2\varepsilon]$ pre $\varepsilon \in (0, 3/4\rangle$.

106. Rozhodnite, či existujú limity nasledujúcich postupností (nezabúdajte, že svoje tvrdenia musíte dokázať):

1. $a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je párne} \\ 1 + \frac{1}{n^2}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je nepárne} \end{cases}$;

2. $a_n = (\cos \frac{n\pi}{2})/n$.

107_0. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná vzťahom $a_n = n(1 - (-1)^n)$. Dokážte, že

1. číslo 0 nie je limitou tejto postupnosti ;
2. bod $+\infty$ nie je limitou tejto postupnosti ;
3. žiadne $b \in \mathbb{R}^*$ nie je limitou tejto postupnosti.

108. Pri formulácii definície vlastnej limity postupnosti študent:

1. namiesto „pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$" povedal „pre ľubovoľné ε". Existujú postupnosti, ktoré majú limitu pri takejto definícii?

2. definíciu napísal takto
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: |a_n - b| < \varepsilon .$$
Ktoré postupnosti by mali limitu pri takejto definícii?

3. namiesto „pre každé $\varepsilon > 0$" povedal „aspoň pre jedno $\varepsilon > 0$". Ukážte, že pri takejto definícii je číslo 7 limitou postupnosti 2, 2, ...

4. namiesto „existuje $n_0 \in \mathbb{N}$" povedal „pre všetky $n_0 \in \mathbb{N}$". Ktoré postupnosti majú limitu pri takejto definícii?

5_0. definíciu napísal takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ a_n - b < \varepsilon \ .$$

Ukážte, že pri takejto definícii je číslo 5 limitou postupnosti 1, 1, 1, ...

109. Je číslo $b \in \mathbb{R}$ limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak existuje také prirodzené číslo N^*, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > N^*$ platí $|a_n - b| < \varepsilon$?

110. Nájdite všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré vyhovujú podmienke

1. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |x_n| < \varepsilon$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |x_n| < \varepsilon$;
3. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |x_n| < \varepsilon$.

Ak $x \in \mathbb{R}^*$, nastáva práve jedna z troch možností: $x \in \mathbb{R}$, $x = +\infty$, $x = -\infty$. Ak v definícii limity funkcie rozlíšime pre body $a, b \in \mathbb{R}^*$ tieto možnosti, dostaneme nasledujúcich deväť špeciálnych prípadov (v nich už a, b označujú len reálne čísla):

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$; 2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$; 3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$; 5. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; 6. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$;

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$; 8. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; 9. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

111. Prepíšte definíciu limity funkcie pre prípady 1 - 9. (Všimnite si, že limity postupností sú samy špeciálnym prípadom limít 4 - 6.)

Riešenie: 1. V tomto prípade sú okolia O(a) a O(b) jednoznačne určené svojimi polomermi δ, ε ; definíciu limity možno potom prepísať do tvaru

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f),\ x \neq a,\ |x - a| < \delta \ :\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

alebo - čo je to isté - do tvaru

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f),\ x \neq a:\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \ .$$

(Samozrejme predpokladáme, že a je hromadný bod množiny D(f).)

<u>Veta 1.(Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie)</u>. Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Funkcia f má v bode a konečnú limitu práve vtedy, keď platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists O(a) \quad \forall x, y \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap D(f):\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ . \qquad (*)$$

112. Na základe definície limity dokážte tieto tvrdenia:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$; 2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1 - x)^2} = +\infty$;

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; 4. $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$;

5. $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4$.

Riešenie: 1. Treba dokázať pravdivosť tvrdenia

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x\geq 0,\ x\neq 3,\ |x-3|<\delta :\ |\sqrt{x}-\sqrt{3}\,|<\varepsilon \ . \qquad (*)$$

Predpokladajme, že $|x-3|<\delta$ a skúsme na základe toho zhora odhadnúť výraz $|\sqrt{x}-\sqrt{3}|$. Pretože $|\sqrt{x}-\sqrt{3}| = \dfrac{|x-3|}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$ a $\sqrt{x}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}$, platí $|\sqrt{x}-\sqrt{3}|\leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}|x-3|< \dfrac{\delta}{\sqrt{3}}$. Teraz už vidíme, že (*) platí: ak je dané $\varepsilon>0$ a chceme, aby platilo $|\sqrt{x}-\sqrt{3}|<\varepsilon$, stačí položiť $\delta = \varepsilon\sqrt{3}$ (alebo $\delta\leq\varepsilon\sqrt{3}$).

113. Nech bod 0 je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte tieto tvrdenia:
1. Číslo 4 nie je limitou funkcie f v bode 0 ;
2. Funkcia f nemá v bode 0 limitu.

114. Ak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ $(a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R})$, tak existuje aj $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ a platí $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$. Dokážte; platí aj opačná implikácia?

115. 1. Dokážte implikáciu „$\Rightarrow$" v Cauchyho-Bolzanovom kritériu konvergencie (tj. dokážte, že (*) z vety 1 je nutná podmienka existencie vlastnej limity funkcie f v bode a).

2. Dokážte, že Dirichletova funkcia ani funkcia $\sin\frac{1}{x}$ nemajú limitu v bode 0. (Neexistenciu konečných limít možno dokázať na základe pr. 115.1; neexistenciu nevlastných limít treba dokázať samostatne.)

2.3. V e t y o l i m i t á c h I

Veta 2 (o limite skalárneho násobku, súčtu, rozdielu, súčinu a podielu). Nech sú dané funkcie f, g, nech $a\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)\cap D(g)$. Ak existujú konečné $\lim\limits_{x\to a} f(x) := A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) := B$, tak existujú aj $\lim\limits_{x\to a} cf(x)$ ($c\in\mathbb{R}$ je konštanta), $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$, $\lim\limits_{x\to a} (f(x)-g(x))$, $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x))$ a platí

$$\lim_{x\to a} cf(x) = cA \qquad \left(= c.\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = A+B \qquad \left(= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)-g(x)) = A-B \qquad \left(= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = A.B \quad (= \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x))$$

Ak naviac $B \neq 0$, tak existuje aj $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}).$$

Veta 3 (o limite zloženej funkcie). Nech sú dané funkcie f, g nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f \circ g)$. Ak $\lim_{x\to a} g(x) = A$ $(A \in \mathbb{R}^*)$, pričom je splnená podmienka

$$\exists O(a) \quad \forall x \in O(a): x \neq a \Rightarrow g(x) \neq A , \tag{$*$}$$

a $\lim_{x\to A} f(x) = B$ $(B \in \mathbb{R}^*)$, tak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Poznámka. Ak A je hromadným bodom D(f), ale $A \notin D(f)$, tak uvedená veta platí aj vtedy, keď nie je splnená podmienka $(*)$.

Niektoré limity možno nájsť len na základe definície, v ostatných prípadoch je však oveľa efektívnejšie použiť vety o limitách. Pritom je potrebné osvojiť si zdôvodňovanie jednotlivých krokov výpočtu, inak sa nenaučíme odlišovať správne postupy od nesprávnych. Na ilustráciu podrobne popíšme nasledujúci výpočet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 7} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 3/x + 5/x^2}{3 - 7/x^2} \overset{(2)}{=} \frac{\lim_{x\to\infty} (2 + 3/x + 5/x^2)}{\lim_{x\to\infty} (3 - 7/x^2)} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} 3/x + \lim_{x\to\infty} 5/x^2}{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} 7/x^2} \overset{(4)}{=} \frac{2+0+0}{3-0} = \frac{2}{3} .$$

(1) na intervale $(0,\infty)$ iste platí $\frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 7} = \frac{2 + 3/x + 5/x^2}{3 - 7/x^2}$ (zlomok vľavo stačí rozšíriť výrazom $1/x^2$), preto: ak existuje limita na pravej strane rovnosti (1), tak existuje aj limita na jej ľavej strane a tieto limity sa rovnajú *); ďalej sa teda snažíme zistiť, či existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{2 + 3/x + 5/x^2}{3 - 7/x^2}$;

(2) tu sme použili vetu o limite podielu (zatiaľ ovšem len „na čestné slovo"), presnejšie povedané: ak ukážeme, že limita v čitateli aj v menovateli existujú a sú konečné, pri-

*) Táto elementárna, ale veľmi častá úvaha sa vo všeobecnosti formuluje takto: Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D(f); nech existuje O(a) tak, že $D(f) \cap (O(a) \setminus \{a\}) = D(g) \cap (O(a) \setminus \{a\})$ a pre všetky $x \in D(f) \cap (O(a) \setminus \{a\})$ platí $f(x) = g(x)$. Ak existuje $\lim_{x\to a} g(x) := b$ $(\in \mathbb{R}^*)$, tak platí $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

čom limita v menovateli je nenulová, tak podľa vety o limite podielu bude platiť rovnosť (2) ;

(3) v čitateli sme použili vetu o limite súčtu (tú možno indukciou rozšíriť na ľubovoľný konečný počet sčítancov), v menovateli vetu o limite rozdielu (obidve zatiaľ tiež len „na čestné slovo") ;

(4) teraz už ľahko overíme, že rovnosti (2) a (3) skutočne platia: pretože $\lim\limits_{x\to\infty} 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} 3/x$, $\lim\limits_{x\to\infty} 5/x^2$, $\lim\limits_{x\to\infty} 3$ a $\lim\limits_{x\to\infty} 7/x^2$ existujú a sú konečné (to ľahko dokážeme priamo z definície), bolo použitie viet o limite súčtu a rozdielu v (3) oprávnené (a preto $\lim\limits_{x\to\infty} (2 + 3/x + 5/x^2) = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} (3 - 7/x^2) = 3$); rovnako oprávnené bolo použitie vety o limite podielu v (2) (limita v čitateli aj v menovateli - ako sme sa práve presvedčili - skutočne existujú, sú konečné a limita v menovateli je naviac nenulová).

Z platnosti rovností (1), (2), (3) vyplýva $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 7} = \frac{2}{3}$.

Takéto zdôvodňovanie (vykonané ovšem len v duchu alebo ústne) by malo byť súčasťou výpočtu každej limity; po získaní istej praxe budú zápisy aj argumentácia podstatne stručnejšie.

Veta 4. Ak f je elementárna funkcia a bod $a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$, tak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(Toto tvrdenie veľmi úzko súvisí s pojmom spojitosti (pozri kap. 3).)

Nájdite nasledujúce limity:

116. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x + 1}$; 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 2}{2x^4 - 7}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-5)}{(5x-1)^5}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[(x + \frac{a}{n}) + (x + \frac{2a}{n}) + \dots + (x + \frac{n-1}{n} a) \right]$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

117. 1. $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 10x - 3}$; 2. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; 4. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-5x^2-4x+12}{5x^2-4x-12}$; 6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n\in \mathbb{N})$; 8. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$; 10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Riešenie: 1. Funkcie $P(x) = x^2-5x+6$ a $Q(x) = x^3-6x^2+10x-3$ sú elementárne, preto $\lim\limits_{x\to 3} P(x) = P(3) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3} Q(x) = Q(3) = 0$. Pretože $\lim\limits_{x\to 3} Q(x) = 0$, nemôžeme použiť vetu o limite podielu. (Alebo inak povedané: funkcia $R = P/Q$ je elementárna, ale $Q(3) = 0$, preto $3 \notin D(R)$ a limitu funkcie R v bode 3 teda nemožno nájsť „dosadením".) Z rovností $P(3) = 0$, $Q(3) = 0$ vyplýva, že číslo 3 je koreňom polynómov P aj Q, preto $P(x)$ aj $Q(x)$ musia byť deliteľné koreňovým činiteľom $(x-3)$. Po vyňatí člena $(x-3)$ dostaneme $P(x) = (x-3)(x-2)$, $Q(x) = (x-3)(x^2-3x+1)$. Pre $x\in D(R)$ teda platí $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-6x^2+10x-3} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2-3x+1)} = \dfrac{x-2}{x^2-3x+1}$, pritom $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x^2-3x+1} = 1$ (elementárna funkcia $R_1(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3x+1}$ je definovaná aj v bode 3, preto $\lim\limits_{x\to 3} R_1(x)$ už možno nájsť „dosadením").

Teda $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-6x^2+10x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2-3x+1)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x^2-3x+1} = 1.$

118. Zostrojte funkcie f, g definované na $\mathbb{R}$ tak, aby neexistovali $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ani $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ a existovala konečná

1. $\lim\limits_{x\to 1} (f(x)+g(x))$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} (f(x).g(x))$.

119. Možno nájsť postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$?

120. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt{x^2-3}-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$; 4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; 6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Riešenie: 1. Elementárna funkcia $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt{x^2-3}-1}$ nie je definovaná v bode -2, preto $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ nemožno nájsť „dosadením". Pre výpočet limity bude výhodnejší iný zápis predpisu funkcie f; dostaneme ho použitím vzorcov $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ (obidva sú špeciálnym prípadom rovnosti $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1})$). Podľa prvého z nich $x^2 - 4 = (\sqrt{x^2-3} - 1)(\sqrt{x^2-3} + 1)$, podľa druhého $x + 2 = (\sqrt[3]{x-6} + 2)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)$.

Pre všetky $x \in D(f)$ preto platí $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt{x^2-3} - 1} = \dfrac{x+2}{x^2-4} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2-3} + 1}{\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4}$

(zlomok sme rozšírili výrazom $(\sqrt{x^2-3} + 1)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)$). Teraz môžeme použiť vetu o limite súčinu: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x^2-3} + 1}{\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4} = \dfrac{1}{6}$ (ide o elementárnu funkciu definovanú v bode -2, preto stačí dosadiť), $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}$. Teda

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt{x^2-3} - 1} = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2-3} + 1}{\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4} \quad \Big(= \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2-3} + 1}{\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4} \Big) = \Big(\lim_{x \to -2} \frac{1}{x-2}\Big) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{24}.$$

121. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x^2+4}}{x-2}$;
2. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$.

Riešenie: 1. Uvedieme dva rôzne návody: a/ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x^2+4}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x^2+4)}}{x-2}$

b/ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x^2+4}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2 + 2 - \sqrt[3]{x^2+4}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} + \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - \sqrt[3]{x^2+4}}{x-2}$

(číslo 2, ktoré sme pripočítali a odpočítali, je spoločnou funkčnou hodnotou funkcií $\sqrt{x+2}$ a $\sqrt[3]{x^2+4}$ v bode 2); ďalší postup je potom rovnaký ako v pr. 120.

122. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ $(n \in \mathbb{N})$;
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$;
4. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$.

Riešenie: 2. Aby sme sa v limitovanom výraze zbavili odmocniny, položme $\sqrt[n]{1+x} = t$ (odtiaľ $x = t^n - 1$). Použiť túto substitúciu neznamená nič iné, ako napísať funkciu $y = \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ v tvare superpozície funkcií $y = \frac{t-1}{t^n - 1}$ a $t = \sqrt[n]{1+x}$. Výpočet limity sa potom zakladá na vete o limite zloženej funkcie: limita vnútornej zložky (predstavujúcej substitúciu) je ($\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{1+x} =$) 1; podmienka (*) z vety 3 je splnená, pretože $\sqrt[n]{1+x}$ je prostá funkcia.
Hľadaná limita sa preto rovná limite vonkajšej zložky v bode 1; teda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t^n - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1)} = \frac{1}{n} .$$

123. Nájdite limity:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 6} + |x|}{\sqrt[6]{x^4 + 2} - |x|}$;
4. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$;
5. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$;
6. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x)$;
7. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$;
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} - 1)$.

124_0. Dokážte túto modifikáciu vety o limite zloženej funkcie: Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f \circ g)$, nech $A \in \mathbb{R} \cap D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. Ak $\lim_{x\to a} g(x) = A$, $\lim_{x\to A} f(x) = f(A)$, tak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(A)$.

(Výhodou tejto modifikácie je, že pri jej použití netreba overovať podmienku (*) vystupujúcu vo vete 3.)

125. Existujú funkcie f, g definované na $\mathbb{R}$ také, že $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existuje a $\lim_{x\to 1} f(g(x))$ neexistuje?

Veta 5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Nájdite limity:

126. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin (x+1)}{x+1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m, n \neq 0)$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin (x^3 + 2x)}{x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} x.\mathrm{ctg}\, 3x$; 6. $\lim\limits_{n\to \infty} 2^n \sin \dfrac{x}{2^n}$ $(x \neq 0)$.

127. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{\sin^3 x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\sin 2x \sin x} - \dfrac{1}{\sin^2 x} \right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$ $(p \neq 0$

128. 1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$; 2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}\, a}{x - a}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos (a+2x) - 2 \cos (a+x) + \cos a}{x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin (a+x) \sin (a+2x) - \sin^2 a}{x}$

129. 1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, 2x\, \mathrm{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} - x \right)$; 2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$;

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \mathrm{ctg}^3 x}{2 - \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}^3 x}$; 4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)\, \mathrm{tg} \dfrac{\pi x}{2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Riešenie: 4. Takéto limity sa pohodlnejšie počítajú v bode 0, použijeme preto substitúciu $x - \dfrac{\pi}{3} = t$ (táto funkcia je prostá, podmienka (*) z vety o limite zloženej funkcie je teda splnená) a dostaneme

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sin (x - \pi/3)}{1 - 2\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1 - 2\cos (t + \pi/3)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1 - 2\left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{3}\sin t + 1 - \cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\sqrt{3}\,\frac{\sin t}{t} + \frac{1 - \cos t}{t^2}.t} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(pritom sme využili rovnosť $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$; pozri pr. 127.1).

130. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

2.4. Vety o limitách II (porovnávacie vety, vety o nevlastných limitách, jednostranné limity)

Veta 6. Nech sú dané funkcie f, g, h, nech $a\in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(g)$ a nech pre niektoré jeho prstencové okolie [*)] $O^*(a)$ platí $O^*(a)\cap D(f) = O^*(a)\cap D(g) = O^*(a)\cap D(h) =: D$. Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ $(\in \mathbb{R})$ a pre všetky $x\in D$ je $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, tak existuje aj $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a rovná sa b.

Veta 7. Nech sú dané funkcie f, g, nech $a\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)\cap D(g)$. Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená v niektorom prstencovom okolí bodu a (tj. na niektorej z množín $(O(a)\setminus\{a\})\cap D(g)$), tak $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = 0$.

131. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{2x^2-\cos x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+\ln(e+x\sin\frac{1}{x})}{\cos x+\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos 2\pi x}{2+(e^{\sqrt{x-1}}-1)\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x-1}}$.

132. Dokážte, že

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$;

---

*) Prstencovým okolím bodu a sa nazýva množina $O(a)\setminus\{a\}$, kde $O(a)$ je okolie bodu a. (Teda každé okolie bodov $+\infty$, $-\infty$ je súčasne aj ich prstencovým okolím.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{5^n} = 0$.

Riešenie: 1. Pre $n \geq 3$ platí $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot ($

Teda pre $n \geq 3$ platí $0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n = 0$ (pozri pr.

105.5). Preto (podľa vety 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

133. 1. Nech $0 < q < 1$ a nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel spĺňa podmie-
ku $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte!

2. Rozhodnite o platnosti tvrdenia „Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čí-
sel spĺňa podmienku $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$."!

3. Nájdite limity:

a/ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!}{(3n)^n}$;   b/ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1001 \cdot 1002 \cdot \ldots \cdot (1000+}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$

134. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{7}{n})^n$;   2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n^2} \right)^n$.

135. Dokážte, že

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$;   2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Riešenie: 1. Tvrdenie *) zrejme platí pre $a = 1$. Predpokladajme teraz, že $a > 1$, a označme $\omega(n) := \sqrt[n]{a} - 1$. Potom iste $\omega(n) \geq 0$ a umocnením obidvoch strán rovnosti $\sqrt[n]{a} = 1 + \omega($
na n-tú dostaneme

$$a = 1 + n\omega(n) + \binom{n}{2} \omega^2(n) + \ldots + \omega^n(n) \geq 1 + n\,\omega(n) .$$

Odtiaľ

$$\omega(n) \leq \frac{a-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teda

$$0 \leq \omega(n) \leq \frac{a-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pritom $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, preto (podľa vety 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(n) = 0$. Z rovnosti $\sqrt[n]{a} = 1 + \omega(n)$ potom (podľa vety o limite súčtu) vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \omega(n))$
$= 1$.

---

*) Uvedenú rovnosť možno veľmi ľahko dokázať pomocou vety 3 a vety 4 ($\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim\limits_{u\to 0} a^u$ $= 1$). Tu uvedený postup nevyužívajúci vetu 4 sa používa práve pri dôkaze skutočnosti, že tvrdenie vety 4 platí pre exponenciálne funkcie.

Zostal ešte prípad $0<a<1$; tu už bude dôkaz jednoduchý: ak $0<a<1$, tak $b := \frac{1}{a} > 1$. Podľa predchádzajúceho teda $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Z rovnosti $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ potom (podľa vety o limite podielu) vyplýva $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1$.

136. Nájdite limity:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n\,3^n + 1}{n! + 1}$;
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$;
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$;
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}}$.

Veta 8. Nech sú dané funkcie f, g, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$ a nech pre niektoré jeho rýdze okolie $O^*(a)$ platí $O^*(a) \cap D(f) = O^*(a) \cap D(g) =: D$. Ak $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ $(-\infty)$ a pre všetky $x \in D$ platí $f(x) \geq g(x)$ $(f(x) \leq g(x))$, tak existuje aj $\lim_{x\to a} f(x)$ a rovná sa ∞ $(-\infty)$.

Veta 9. Nech sú dané funkcie f, g, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)\cap D(g)$, nech existujú $\lim_{x\to a} f(x) =: A$, $\lim_{x\to a} g(x) =: B$. Potom

1. ak $A = +\infty$, $B \in \mathbb{R}$ alebo $B = +\infty$, tak $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$;
2. ak $A = +\infty$, $B > 0$ alebo $B = +\infty$, tak $\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = +\infty$.

Veta 10. Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$, tak $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Poznámka. Predchádzajúce tvrdenia (spolu s ďalšími, analogickými) si ľahko zapamätáme pomocou nasledujúcich rovností (ktoré ovšem považujeme len za mnemotechnickú pomôcku):

$$A \pm\infty = \pm\infty \qquad A\,.\,(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{ak } A>0 \\ \mp\infty, & \text{ak } A<0 \end{cases}$$

$$\pm\infty \pm\infty = \pm\infty \qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0 \qquad \infty\,.\,(\pm\infty) = \pm\infty$$

(A označuje reálne číslo.)

Všimnime si, že žiadna z uvedených viet sa nevzťahuje na limity funkcií typu $+\infty - \infty$, $0\,.\,(\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$. Také funkcie budeme nazývať neurčitými výrazmi *); práve im je venovaná väčšina príkladov na výpočet limít.

*) neskôr tento pojem ešte zovšeobecníme (pozri *) v úvode odstavca 2.5 a poznámku na konci toho istého odstavca)

Veta 11. Nech je daná funkcia f, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D := \{ x \in D(f)$; $f(x) \neq 0 \}$, nech $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Ak existuje také prstencové okolie $O^*(a)$ bodu a, že pre všetky $x \in D \cap O^*(a)$ platí $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$, tak existuje $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$ a rovná sa $+\infty$ (-

Nájdite limity:

137. 1. $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$; 2. $\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$;

3. $\lim_{x \to \infty} x^2 \arcsin \left(\frac{x^2+1}{3x^2-2}\right)$; 4. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$;

5. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^3 + \sqrt{x^3+1}}}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^2+1}}}$; 6. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{10}\right)^n$;

7. $\lim_{x \to \infty} (2x + x \sin x)$.

138. 1. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x}$; 2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3}$;

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x^2}$; 4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x^3+1} - 1}$;

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{(2x - \pi)^4}$; 6. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

139. Uveďte príklady funkcií f, g definovaných v niektorom prstencovom okolí bodu 1 takých, že $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1} g(x) = -\infty$ a $\lim_{x \to 1} (f(x) + g(x))$

1_o. je konečná; 2_o. je nevlastná; 3. neexistuje.

140. Uveďte príklady postupností nenulových čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takých, že $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ a $\lim_{n \to \infty} a_n b_n$

1_o. $= 0$; 2_o. $= +\infty$; 3_o. je konečná a nenulová; 4. neexistuje.

141. Nech R je racionálna funkcia, tj. funkcia daná predpisom $R(x) =$ $= \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$ $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ m,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Čomu sa rovná $\lim_{x \to \infty} R(x)$?

Nech je daná funkcia f, nech $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D^+ := D(f) \cap (a, \infty)$ (množiny $D^- := D(f) \cap (-\infty, a)$); označme $\bar{f}$ zúženie funkcie na množinu D^+ (na množinu D^-). Ak existuje limita funkcie $\bar{f}$ v bode a, nazývame ju <u>limitou funkcie f v bode a sprava (zľava)</u> a označujeme $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ $(\lim\limits_{x \to a-} f(x))$. Pre limity sprava a zľava sa používa súhrnný názov <u>jednostranné limity</u>.

<u>Veta 12</u>. Nech je daná funkcia f, nech a je hromadný bod množín $D(f) \cap (-\infty, a)$ a $D(f) \cap (a, \infty)$. Potom $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje práve vtedy, keď v bode a existujú obidve jednostranné limity a platí $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$; pritom $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ sa rovná spoločnej hodnote týchto jednostranných limít.

142. Pomocou kvantifikátorov a nerovností zapíšte tvrdenia:

1. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$; 2. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$.

$(a, b \in \mathbb{R})$.

143. Nájdite jednostranné limity funkcie f v bode a, ak

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$, $a = 1$; 2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$, $a = 0$;

3. $f(x) = \dfrac{5}{(x - 2)^3}$, $a = 2$; 4. $f(x) = \dfrac{1}{2 - 2^{1/x}}$, $a = 0$.

144. Vyšetrite existenciu nasledujúcich limít:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sgn} x$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$.

145_0. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takej, že

1. $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) > \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ neexistuje, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ je nevlastná.

146. 1_0. Nech $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ $(\in \mathbb{R}^*)$. Potom existuje aj $\lim\limits_{x \to 0} f(\frac{1}{x})$ a rovná sa b. Dokážte!

2. Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nepárna funkcia. Akú hodnotu musí mať $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, aby existovala $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? (Funkcia φ sa nazýva párna (nepárna), ak vyhovuje nasledujúcim podmienkam: 1. $\forall x \in D(\varphi): -x \in D(\varphi)$; 2. $\forall x \in D(\varphi): \varphi(x) = \varphi(-x)$ $(\forall x \in D(\varphi): \varphi(-x) = -\varphi(x))$.)

2.5. Limity mocninovo-exponenciálnych funkcií

Veta 13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e, \quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$

147. Nech je daná funkcia g a kladná funkcia f, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap D(g)$. Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, tak existuje aj $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ a rovná sa A^B. Dokážte!

Riešenie: Aby sme mohli použiť vety o limitách, napíšme funkciu f^g v tvare $e^{g \ln f}$. Pretože $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^+$ a $\lim\limits_{u\to A} \ln u = \ln A$ (ln je elementárna funkcia a $A \in D(\ln)$), je podľa vety o limite zloženej funkcie z pr. 124 $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \ln A$. Podľa vety o limite súčinu $\lim\limits_{x\to a} (g(x) \,.\, \ln f(x)) = B \,.\, \ln A$. Napokon opäť podľa vety z pr. 124 je $\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{B\,.\,\ln A} = A^B$. Teda $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

Analogicky sa dá postupovať v prípade funkcií typu $a^{\pm\infty}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $(+\infty)^a$ $(a \neq 0)$, $(+\infty)^{\pm\infty}$. Nemožno však odvodiť všeobecné pravidlá na výpočet limít typu $1^{\pm\infty}$, 0^0, $(+\infty)^0$; vtedy totiž exponent $g \,.\, \ln f$ je neurčitým výrazom typu $0.(+\infty)$ alebo $0.(-\infty)$.

V ďalšom budeme symbol $1^{\pm\infty}$ chápať trocha všeobecnejšie: znak $\pm\infty$ bude okrem funkcií s limitou $+\infty$ alebo $-\infty$ označovať aj tie exponenty, ktoré síce nemajú limitu, ale ich jednostranné limity sú nevlastné [*]. Dôležitým príkladom limity tohto typu je $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Ukážeme teraz, ako sa rovnosť $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ využíva pri výpočte ďalších limít typu $1^{\pm\infty}$.

148. Nájdite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$!

Riešenie: Ide skutočne o funkciu typu $1^{\pm\infty}$, pretože $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$. Zapíšme funkciu $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ v tvare

---

[*] rovnako možno zovšeobecniť aj pojem neurčitého výrazu typu $0.(\pm\infty)$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; ďalšie zovšeobecnenie pozri v poznámke na konci tohto odseku

$\left[(1 + (\sin x - 1)^{\frac{1}{\sin x - 1}} \right]^{(\sin x - 1).\mathrm{tg}\, x}$, tj. zasa ako mocninovo-exponenciálnu funkciu $f_1(x)^{g_1(x)}$, kde $g_1(x) = (\sin x - 1).\mathrm{tg}\, x$ a f_1 označuje funkciu v hranatej zátvorke. Vypočítajme teraz limity funkcií f_1, g_1:

a/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f_1(x) = e$ podľa vety o limite zloženej funkcie (vnútornou zložkou je funkcia $\sin x - 1$, vonkajšou funkcia $(1 + u)^{1/u}$; využili sme pritom poznámku uvedenú za vetou o limite zloženej funkcie;

b/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g_1(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1) \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(- \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 0.$

Podľa pr. 147 je preto $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f_1(x)^{g_1(x)} = e^0 = 1.$

Poznámka. I keď uvedený postup môže na prvý pohľad pôsobiť deprimujúcim dojmom, nie je až také ťažké zapamätať si ho: funkciu f^g typu $1^{\pm\infty}$ prepisujeme na tvar $f_1^{g_1}$ tak, aby limita funkcie f_1 bola rovná e; preto položíme $f_1 = (1 + (f - 1))^{\frac{1}{f - 1}}$. Teraz stačí „dorobiť" g_1 tak, aby platilo $(f^{1/(f-1)})^{g_1} = f^g$ (teda položíme $g_1 = (f - 1) \cdot g$).

149. Sformulujte a dokážte pravidlá pre výpočet limít typu

1. $a^{+\infty}$, kde $a \in (0, 1)$; 2. $a^{-\infty}$, kde $a \in (0, 1)$;

3. $a^{+\infty}$, kde $a \in (1,\infty) \cup \{+\infty\}$; 4. $a^{-\infty}$, kde $a \in (1,\infty) \cup \{+\infty\}$.

Nájdite nasledujúce limity:

150. 1. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}}$; 2. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x^2 - 4}\right)^{1/x}$;

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + 7}{x^2 + 3}\right)^{\frac{3x^3 - 11}{4x^2 - 12}}$; 4. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1 + \cos \pi x}{\mathrm{tg}^2 \pi x}\right)^{x^2}$;

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n + 1}$; 6. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)^{-1/x^2}$;

7. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$; 8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)^{1/x}$.

151. 1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt[x]{1 - 2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

5. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$; 8. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$.

152. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x-\ln a}{x-a}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+\sin 5x)}$;

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

Riešenie: 4. Využijeme, že $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (pr. 152.1); potom $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+\sin 5x)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{\sin 5x \cdot \frac{\ln(1+\sin 5x)}{\sin 5x}} \quad \left(= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 5x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 5x)}{\sin 5x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}$$ *).

153. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x-x^2}{x-2}$; 4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+5x)}{e^{x\sin 4x}-1}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$ $(\alpha\neq\beta)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$; 8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Riešenie: 4. Využijeme, že $\lim\limits_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$ (pr. 153.1); potom $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x-x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} x^a \cdot \frac{x^{x-a}-1}{x-a}$

$$\left(= \lim_{x\to a} x^a \cdot \lim_{x\to a} \frac{x^{x-a}-1}{x-a} \right) \overset{**)}{=} a^a \cdot \lim_{x\to a} \left(\frac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x} \cdot \ln x \right) =$$

---

*) všeobecným pohľadom na takýto spôsob výpočtu je pr. 193

**) funkcia x^a je elementárna, preto $x^a \to a^a$, ak $x\to a$

$$= a^a \cdot \lim_{x\to a} \frac{e^{(x-a)\ln x} - 1}{(x-a)\ln x} \cdot \lim_{x\to a} \ln x\,) = a^a \cdot 1 \cdot \ln a = a^a \ln a\,.$$

54. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{3x})}$; 2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{3x})}$;

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{3x})}$.

Riešenie: 2. Využijeme, že $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^{3x}} = 0$ (pozri pr. 192); potom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{3x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln (e^x(1 + \frac{x^2}{e^x}))}{\ln (e^{3x}(1 + \frac{x^4}{e^{3x}}))} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x + \ln (1 + \frac{x^2}{e^x})}{\ln e^{3x} + \ln (1 + \frac{x^4}{e^{3x}})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln (1 + \frac{x^2}{e^x})}{3x + \ln (1 + \frac{x^4}{e^{3x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\ln (1 + x^2/e^x)}{x}}{3 + \frac{\ln (1 + x^4/e^{3x})}{x}} = \frac{1}{3} \qquad \Big(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (1 + x^2/e^x)}{x} =$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \ln (1 + \dfrac{x^2}{e^x}) = 0 \cdot 0 = 0$; rovnako sa vypočíta aj limita druhého sčítanca menovateli).

Poznámka (o symbole ∞). Niekedy sa okrem symbolov $+\infty$ a $-\infty$ zavádza aj symbol ∞ ; jeho okolím sa nazýva každá množina tvaru $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. (Zápis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ potom znamená $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, tvrdenie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ $(A \in \mathbb{R}^*)$ je ekvivalentné s tvrdením $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.) Nami používaný pojem neurčitých výrazov typu $0 \cdot (\pm\infty)$, ... možno potom zovšeobecniť na neurčité výrazy typu $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$. Opätovne upozorňujeme, že v týchto skriptách nepoužívame symbol ∞ v takomto význame; nami používaný symbol ∞ má taký význam ako symbol $+\infty$.

2.6. Limity monotónnych postupností

Veta 14. Každá zhora ohraničená neklesajúca postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora neohraničená neklesajúca postupnosť, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Analogické tvrdenie pre nerastúcu postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dostaneme, ak predchádzajúcu vetu aplikujeme na postupnosť $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

155. Dokážte, že nasledujúce postupnosti sú konvergentné:

1. $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2^n})$;

2. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$;

3. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$;

4. $a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \frac{1}{5^n+n}$;

5. $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$.

156. Dokážte, že nasledujúce postupnosti sú konvergentné a nájdite ich limity

1. $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ... ;

2. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$;

3. $a_1 > 0$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2 + a_{n-1}}$;

4. $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$;

5. $a_n = \underbrace{\sin \sin \dots \sin}_{n\text{-krát}} x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Riešenie: 1. Najprv matematickou indukciou dokážeme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ktorú možno zadať rekurentným vzťahom $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$) je rastúca a zhora ohraničená.

1. Zrejme $a_1 < a_2$; z predpokladu $a_n < a_{n+1}$ vyplýva $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$ (využili sme, že $\sqrt{x}$ je rastúca funkcia). Teda $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť.

2. Dokážeme, že $a_n < 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Toto tvrdenie zrejme platí pre $n = 1$. Z predpokladu $a_n < 2$ vyplýva $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Pretože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená rastúca postupnosť, existuje konečná $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$; potom $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a}$. Z rovnosti $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ potom vyplýva

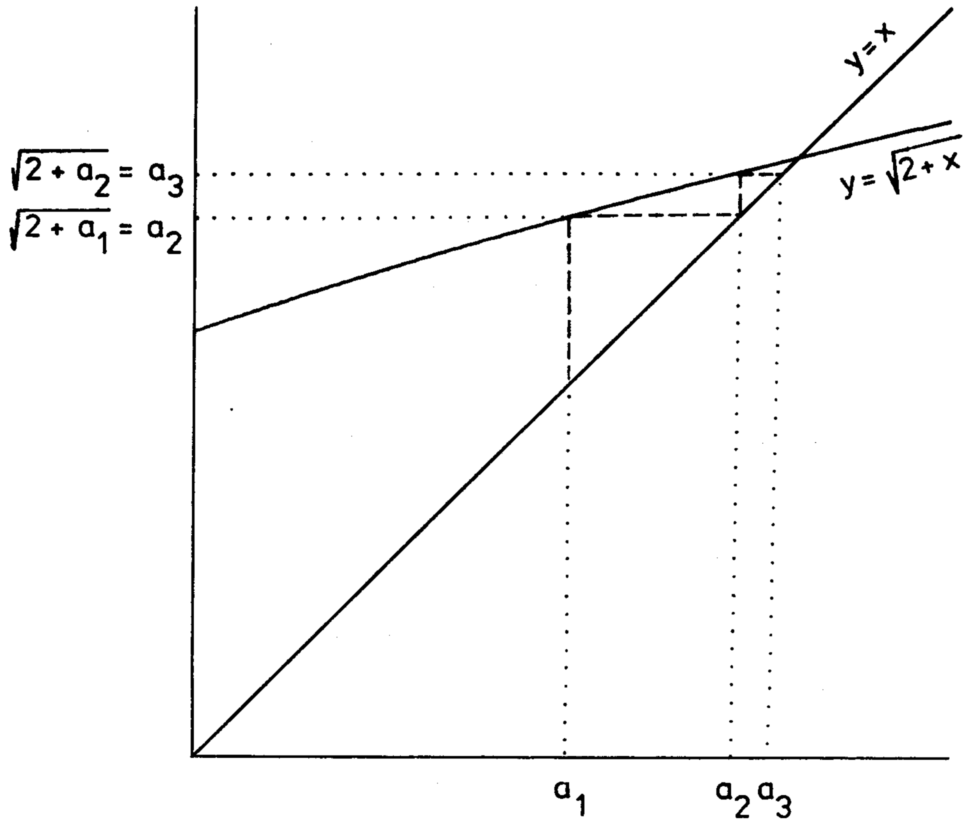
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} \qquad (*)$$

Teda hľadaná limita musí byť riešením rovnice

$$a = \sqrt{2 + a} \ ,$$

preto a = 2 (využili sme pritom evidentnú skutočnosť, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$).

Konvergenciu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ názorne ukazuje nasledujúci obrázok:



Obr. 2

Poznámka: Rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ vyplýva z rovnosti (*), mohlo by sa teda zdať, že stačilo len v rekurentnom vzťahu $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ prejsť k limite, a príklad by bol vyriešený, t.j. všetky úvahy o monotónnosti a ohraničenosti boli vlastne zbytočné. To je ovšem omyl; skôr, ako napíšeme (*), sa totiž musíme presvedčiť, že limity, ktoré tam vystupujú, skutočne existujú.

7. Dokážte, že postupnosť $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je klesajúca a zdola ohraničená. Na základe toho dokážte nerovnosť $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

2.7. Heineho definícia limity

__Veta 15__. Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičného oboru D(f) funkcie f a $b \in R^*$. Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

2. pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z $D(f) \setminus \{a\}$, ktorej limitou je a, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

Limitu funkcie možno definovať aj bez použitia pojmu okolia; v takom prípade sa zave die len pojem vlastnej a nevlastnej limity postupnosti a na definíciu limity funkcie f v b de a sa použije vlastnosť 2 z uvedenej vety. Definícia limity funkcie v takejto podobe sa nazýva Heineho definíciou limity. Veta 15 teda hovorí, že definícia limity pomocou okol a Heineho definícia limity sú ekvivalentné.

158. Dokážte, že neexistujú nasledujúce limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$;
2$_o$. $\lim\limits_{x\to a} \chi(x)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$;
3$_o$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{\pi}{x}$;
4$_o$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, ak f je nekonštantná periodická funkcia.

Riešenie: 1. Pre postupnosti $a_n = n\pi$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin b_n = 1$. Pre žiadne $b \in \mathbb{R}^*$ teda nemôže byť splnená vlastnosť 2 z vety 15, preto neexistuje $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

159. Nech f je funkcia definovaná na $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$. Rozhodnite, či tvrdenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ je ekvivalentné s niektorým z nasledujúcich výrokov:

1. pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionálnych čísel takú, že $a_n \neq a$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$;
2. pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, pričom množina $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ je podmnožinou $\mathbb{Q} \setminus \{a\}$ alebo podmnožinou $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{a\})$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

2.8. Hromadné hodnoty, limes inferior a limes superior postupnosti

Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosťou (vybranou postupnosťou z) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak existuje rastúce zobrazenie $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $b_n = a_{k(n)}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak je limitou niektorej jej podpostupnosti (to je ekvivalentné s podmienkou: pre každé okolie $O(a)$ bodu a je množina $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n \in O(a)\}$ nekonečná).

Veta 16. Každá postupnosť má aspoň jednu hromadnú hodnotu.

Nech $H \subset \mathbb{R}^*$ je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Supremum (infimum) množiny H v množine $\mathbb{R}^*$ sa nazýva limes superior (limes inferior) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označuje sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) alebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$). (Supremum (infimum) množiny H v $\mathbb{R}^*$ sa definuje ako najmenšie (najväčšie) z jej horných (dolných) ohraničení, pritom ako horné a dolné ohraničenia prichádzajú do úvahy aj body $+\infty$, $-\infty$ [*].)

Veta 17. Limes superior a limes inferior postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú jej hromadnými hodnotami.

Veta 18. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, nech $b \in \mathbb{R}$. Rovnosť $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = b$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = b$) platí práve vtedy, keď

1. b je hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$;
2. pre každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n \geqslant b + \varepsilon\}$ ($\{n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n \leqslant b - \varepsilon\}$) konečná.

Veta 19. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu práve vtedy, keď $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$; limitou je pritom spoločná hodnota $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

160. Nájdite limes superior a limes inferior nasledujúcich postupností:

1. $a_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$;
2. $a_n = 1 + 2.(-1)^{n+1} + 3.(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
3. $a_n = \cos\frac{n\pi}{3}$;
4. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$;
5. $a_n = n^{(-1)^n}$;
6. $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n.(-1)^n}}$;
7. $1, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{2}{10^2}, \dots, \frac{99}{10^2}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots, \frac{10^n-1}{10^n}, \dots$;
8. $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{5}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n+1}{2^n}, \dots$.

161. Zostrojte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby množina jej hromadných hodnôt bola:

[*] Teda napr. supremom zhora neohraničenej množiny $H \subset \mathbb{R}$ je v množine $\mathbb{R}^*$ bod $+\infty$; $\sup\{-\infty\} = -\infty$ a pod. Pre zhora (zdola) ohraničenú množinu $H \subset \mathbb{R}$ je jej supremum (infimum) v $\mathbb{R}^*$ zhodné s jej supremom (infimom).

1_0. $\{1\}$; 2_0. $\{0, 1\}$; 3_0. daná konečná množina $\{a_1, \dots, a_n\}$;
4. $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

162_0. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť taká, že $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ (taká postupnosť existuje, pretože $\mathbb{Q}$ je spočítateľná množina). Potom množina hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je $\mathbb{R}^*$. Dokážte!

163. Nech ohraničená postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má práve dve hromadné hodnoty; označme $a := \liminf_{n\to\infty} a_n$, $b := \limsup_{n\to\infty} a_n$. Dokážte: pre každé $\varepsilon \in (0, \frac{b-a}{2})$ je množina $N_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} ; a_n \in \langle a+\varepsilon , b-\varepsilon\rangle\}$ konečná.

164. Nech pre ohraničenú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\forall \varepsilon > 0: \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \varepsilon .$$

Potom je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná. Dokážte!

165. 1. Nech a je hromadný bod množiny A hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom a je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Existuje postupnosť, ktorej množina hromadných hodnôt je $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$?

166. 1. Nech sú dané ohraničené postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

a/ ak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} a_n$, tak

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \; ;$$

b/ $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leq$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n .$$

2. Uveďte príklady postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré budú jednotlivé nerovnosti v pr. 166.1b/ ostré.

Riešenie: Dokážeme druhú nerovnosť z pr. 166.1b/. (Skôr ako začneme vlastný dôkaz, musíme si uvedomiť, že $\underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n)$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$ sú reálne čísla, pretože postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené.) Využijeme nasledujúce nerovnosti:

Ak $\{c_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť vybraná z postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} c_n \overset{(1)}{\leq} \underline{\lim_{k\to\infty}} c_{n(k)} \overset{(2)}{\leq} \overline{\lim_{k\to\infty}} c_{n(k)} \overset{(3)}{\leq} \overline{\lim_{n\to\infty}} c_n \qquad (*)$$

(nerovnosť (2) je zrejmá, nerovnosti (1) a (3) vyplývajú z faktu, že každá hromadná hodnota postupnosti $\{c_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je aj hromadnou hodnotou postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. že množina hromadných hodnôt postupnosti $\{c_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je podmnožinou množiny hromadných hodnôt postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Nech $a := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, potom existuje postupnosť $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Podľa pr. 166.1a/ je $\underline{\lim}_{k\to\infty} (a_{n(k)} + b_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} a_{n(k)} + \underline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)}$ ($= \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)}$). Na dokončenie dôkazu teraz už stačí len niekoľkokrát použiť nerovnosti z (*):

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \overset{(I)}{\leqq} \underline{\lim}_{k\to\infty} (a_{n(k)} + b_{n(k)}) = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)} \overset{(II)}{\leqq}$$

$$\overset{(II)}{\leqq} \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)} \overset{(III)}{\leqq} \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(ak zapíšeme nerovnosť (1) z (*) pre postupnosti $c_n = a_n + b_n$, $c_{n(k)} = a_{n(k)} + b_{n(k)}$, dostaneme (I); nerovnosť (II) dostaneme, ak k obidvom stranám nerovnosti (2) z (*) zapísanej pre postupnosť $\{b_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ pripočítame číslo $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$; podobne vyplýva (III) z nerovnosti (3) v (*)).

2.9. Ďalšie príklady

167$_0$. Uveďte príklad neprázdnej množiny $A \subset \mathbb{R}$ takej, že $A' \neq \emptyset$ a platí

1. $A' \subsetneq A$; 2. $A' = A$; 3. $A \subsetneq A'$; 4. $A' \cap A = \emptyset$; 5. $A \not\subset A' \wedge A' \not\subset A \wedge A' \cap A \neq \emptyset$.

168. Ak $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny A', tak a je aj hromadný bod množiny A (teda $(A')' \subset A'$). Dokážte!

169. Existuje množina A taká, že $A' = (0, 1)$?

170. Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $A \cup B$. Potom a je hromadný bod množiny A alebo a je hromadný bod množiny B (teda $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$). Dokážte!

171. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, definujme postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ predpisom

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) .$$

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, tak existuje aj $\lim_{n\to\infty} b_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Dokážte; ďalej ukážte, že obrátená implikácia vo všeobecnosti neplatí.

172. Nájdite limity:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$; 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}})$.

173. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť taká, že $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a rovná sa $+\infty$.

2. Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva prerovnaním postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak existuje tak bijekcia $p: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, že $b_n = a_{p(n)}$ $(n\in\mathbb{N})$. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ $(b \in \mathbb{R}^*)$, tak každé prerovna nie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tiež limitu rovnú b. Dokážte!

174. Zostane tvrdenie z pr. 173.1 v platnosti, ak v ňom
1. vynecháme predpoklad „$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť" ? ;
2. predpoklad „$\{a_n ; n\in\mathbb{N}\} = \mathbb{N}$" nahradíme predpokladom „$\{a_n ; n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$" ?

175. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| =: b$ a neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dokážte, že
1. $b \neq 0$;
2. množiny $N^+ := \{ n\in\mathbb{N} ; a_n > 0 \}$ a $N^- := \{ n\in\mathbb{N} ; a_n < 0\}$ sú nekonečné ;
3. množina $\mathbb{N} \setminus (N^+ \cup N^-)$ je konečná.

176_0. Na základe definície limity dokážte:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

177. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ktorá má limitu len v bode 0.

178. Dokážte, že postupnosť $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

179. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ $(m, n\in\mathbb{N})$; 2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3} + \dfrac{1}{x-1} \right)$; 4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n} \right)$ $(m, n\in\mathbb{N})$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left[\left(x + \dfrac{a}{n}\right)^2 + \left(x + \dfrac{2a}{n}\right)^2 + \dots + \left(x + \dfrac{n-1}{n} a\right)^2 \right]$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)\dots(x^n+1)}{\left[(nx)^n + 1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$; 7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 3 + \dots + (2n-1)}{1 + 4 + \dots + (3n-2)}$; 9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n}{n}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{13}{36} + \dots + \dfrac{2^n + 3^n}{6^n} \right)$.

180. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť. Potom existuje maximum alebo minimum množiny $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Dokážte!

181. Dokážte, že neexistuje racionálna funkcia R s celočíselnými koeficientami taká, aby platilo

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exists k \in \mathbb{Z}: R(k) = r .$$

182. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ $(m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$ $(m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+1}} \right)$;

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \arcsin \left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)$;

6. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125\, n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n}$;

7. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)$;

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

183_0. Nech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú periodické funkcie a $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Potom $f = g$. Dokážte!

184. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) - 1}{\sin x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + 2}{x^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}\, \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$;

9. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\arccos x}{(2x-1)^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}} + \sqrt[3]{\sin\frac{3\pi x}{2}}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}$;

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x^3+3x}-\sqrt{3x^2+1}}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dfrac{(2x-\pi)\sin\frac{x}{2x-\pi}}{\cos 4x}}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\ln(x+1) - \sin\ln x)$.

185. 1_o. Nech $q\in(0,1)$, nech pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných čísel platí $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ $(n\in\mathbb{N})$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte!

2. Nájdite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

186. Dokážte, že

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(k\in\mathbb{R},\ a>1)$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

187. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$ $(a,\ b>0)$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+n\,2^n}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+11^n)^{\frac{1}{n+2}}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n\,n!}{n^n}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n\,n!}{n^n}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{4^n}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{1-\sqrt[n]{n}}$.

188. Nech $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; ukážeme dva spôsoby výpočtu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

a/ odhadneme x_n zhora a zdola:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = 1 \ ;$$

teda

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant x_n \leqslant 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} 1$, je podľa vety 6 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b/ Podľa vety o limite súčtu je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0+0+\ldots+0 = 0.$$

Zrejme aspoň jeden z uvedených postupov je nesprávny. Ktorý to je a v čom spočíva chyba?

189. Sformulujte a dokážte pravidlo pre výpočet limít typu $0^{+\infty}$ a $0^{-\infty}$!

190. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2^x}{1 + 2^{x+1}} \right)^{-x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x)^{1/x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right)^{\operatorname{tg} 2x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$;
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} (\cos x)^{\frac{1}{(3x-\pi)^3}}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x \quad (a_1,\ a_2 > 0)$;
10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$;
11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+a)^{x+a}\,(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

191. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \log_x 2$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} \quad (a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0)$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a,\ b > 0)$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$; 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$ $(a, b>0)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a, b>0)$; 10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x e^x) - \cos(x e^{-x})}{x^3}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2 \pi x^\alpha}{\sin^2 \pi x^\beta}$ $(\beta \neq 0)$; 12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2 \pi 2^x}{\ln(\cos \pi 2^x)}$.

192. 1. Dokážte, že

a/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$ $(a>1, \alpha>0)$; b/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$ $(a>1, \alpha>0)$.

2. Nájdite:

a/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$; b/ $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$;

c/ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}$.

Poznámka. Tvrdenie z pr. 192.1 si možno zapamätať v nasledujúcej symbolickej podobe

$$\log_a x \ll x^\alpha \ll a^x \quad \text{(pre x dostatočne veľké, } \alpha > 0,\ a > 1\text{)}$$

kde $f \ll g$ (pre dostatočne veľké x) znamená $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Pre postupnosti platí (pozri aj pr. 186):

$$\log_a n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \quad \text{(pre n dostatočne veľké, } \alpha > 0,\ a > 1\text{)}$$

193_o. Nech $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}$ a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}$ sú konečné a nenulové. Potom $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ existuje práve vtedy, keď existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. Dokážte!

194. Nech f je definovaná na $\mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Zostrojte funkciu $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pre ktorú existuje nenulová $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ a neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

195. Dokážte, že nasledujúce postupnosti sú konvergentné:

1. $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, kde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$

2. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

3. $a_n = (1 + \dfrac{1}{2}) \cdot (1 + \dfrac{1}{4}) \cdot \ldots \cdot (1 + \dfrac{1}{2^n})$.

196. Nech $b_1 = 1$, $b_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}}$. Potom $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť. Dokážte!

197. Nájdite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ak

1. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$; 2. $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

198. Nech f je funkcia definovaná na $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$. Rozhodnite, či tvrdenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ je ekvivalentné s niektorým z nasledujúcich výrokov:

1. pre každú monotónnu postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, pričom $a_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$;

2. z každej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej limitou je a, pričom $a_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, možno vybrať postupnosť $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ takú, že $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_{n(k)}) = b$.

199_0. Nech a je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. Dokážte, že nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:

a/ neexistuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

b/ existujú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z $D(f) \setminus \{a\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ existujú a nerovnajú sa.

200. Nech je daná ohraničená postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokážte, že

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf \{ \sup\limits_{k\geq n} a_k \,;\, n \in \mathbb{N} \}$; 2. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup \{ \inf\limits_{k\geq n} a_k \,;\, n \in \mathbb{N} \}$.

201. Existuje postupnosť taká, že množina jej hromadných hodnôt je 1. $\langle 0, 1 \rangle$; 2. $(0, 1)$?

202. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť a $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Dokážte, že množina H hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je množina $\{ x \in \mathbb{R} \,;\, \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq x \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \}$.

203_0. Nech v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú podpostupnosti $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$. Dokážte, že potom konverguje aj postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$!

204. Aké postupnosti vyhovujú podmienke

1. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \in \mathbb{N},\ n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$;

2. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \in \mathbb{N},\ n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$?

205. 1. Nech pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel platí $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 1$. Potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť. Dokážte!

2. Pre ktoré postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel platí vzťah $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 1$?

206. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené postupnosti nezáporných čísel. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. ak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, tak $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n . b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$;

2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n . \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n.b_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n . \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n.b_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n . \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

207. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel, nech $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa indexov n takých, že platí

$$\forall k \in N: k < n \Rightarrow a_k > a_n$$

(tj. a_n je menšie než všetky predchádzajúce členy postupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$).