# 1. MNOŽINY, REÁLNE ČÍSLA, FUNKCIE

V ďalšom budeme používať tieto označenia:

$\mathbb{N}$ množina všetkých prirodzených čísel ($= \{1, 2, 3, \ldots\}$)

$\mathbb{Z}$ množina všetkých celých čísel ($= \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$)

$\mathbb{Q}$ množina všetkých racionálnych čísel ($= \{p/q;\ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$)

$\mathbb{R}$ množina všetkých reálnych čísel

$\mathbb{R}^+$ množina všetkých kladných reálnych čísel ($= (0, \infty)$)

$\mathbb{R}_0^+$ množina všetkých nezáporných reálnych čísel ($= \langle 0, \infty)$).

Ak pre niektorý prvok a neprázdnej množiny $A \subset \mathbb{R}$ platí

$$\forall x \in A:\ x \leq a \quad (\forall x \in A:\ x \geq a)$$

nazývame tento prvok <u>maximum (minimum) množiny A</u> a označujeme ho max A (min A).

## 1.1. Reálne čísla

3. Nech a je racionálne, b iracionálne číslo. Potom a + b je iracionálne číslo. Dokážte!

4. Nech $a, b \in \mathbb{Q}$ a $\sqrt{ab}$ je iracionálne číslo. Potom $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ je iracionálne číslo. Dokážte!

5. Dokážte iracionálnosť čísel
   1. $\sqrt{5}$ ; 2. $\sqrt{15}$ ; 3. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ; 4. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ; 5. $(4\sqrt{3} - 3)/6$ ;
   $6_o$. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ .

6. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

   $1_o$. $\forall$ $a, b \in \mathbb{R}^+$: $\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln b \leq \ln \frac{a+b}{2}$ ;

   $2_o$. nech $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c > 0$, $a < b$; potom $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ ;

   $3_o$. $(a + b) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ ;

   4. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ ;

   $5_o$. $\forall$ $a, b \in \mathbb{R}^+$: $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ ;

   6. $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ .

7. Nech $b_1 > 0, \ldots, b_n > 0$. Dokážte, že zlomok $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/(b_1 + \ldots + b_n)$ nie je menší ako najmenší a nie je väčší ako najväčší zo zlomkov $a_1/b_1, a_2/b_2, \ldots, a_n/b_n$.

8. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

$1_o$. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$ ;

$2_o$. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$ ;

3. $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ ;

4. $\forall\ n \in \mathbb{N}, n > 1$: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ ;

9. Absolútna hodnota $|x|$ reálneho čísla $x$ je definovaná nasledovne:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ak } x \geq 0 \\ -x, & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$

Dokážte, že

$1_o$. $|x| = \max\{x, -x\}$ ;

2. $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ $(n \in \mathbb{N})$ ;

3. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

$10_o$. Dokážte:

1. ak $x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$, tak $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ;
2. nech $n \in \mathbb{N}$, nech $x_1, \ldots, x_n$ sú reálne čísla rovnakého znamienka všetky väčšie než $-1$; potom $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

11. Dokážte tieto tvrdenia:

$1_o$. $\forall\ n \in \mathbb{N}, n > 1$: $n + 1 < 2^n$ ;

$2_o$. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ;

$3_o$. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ ;

4. $\forall\ n \in \mathbb{N}, n > 1$: $n! < (\frac{n+1}{2})^n$ ;

5. $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$: $2!\ 4!\ 6! \ldots (2n)! > [(n+1)!]^n$ ;

6. $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq 3$: $n^{n+1} > (n+1)^n$.

(Návod: Pokiaľ sa tvrdenia v tvare $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $a_n < b_n$ (kde $a_m > 0$) dokazujú matematickou indukciou, vykoná sa jej druhý krok (tj. odvodenie nerovnosti $a_{n+1} < b_{n+1}$ z nerovnosti $a_n < b_n$) často tak, že sa dokáže nerovnosť $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$. Z nerovností $0 < a_n < b_n$, $0 < a_{n+1}/a_n < b_{n+1}/b_n$ totiž už vyplýva $a_{n+1} < b_{n+1}$ (na základe implikácie: ak $0 < A < B$ a $0 < R \leq S$, tak $0 < AR < BS$).)

12. 1. Dokážte, že platí: ak $x_1 > 1$, $x_2 < 1$, tak $x_1 + x_2 > x_1 x_2 + 1$.

2. Na základe toho dokážte: nech $x_1, \ldots, x_n$ sú kladné čísla také, že $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$; potom $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

3. Dokážte nerovnosti

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} \geq n$, kde $x_1, \dots, x_n$ sú kladné čísla ;

b) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, kde $x_1, \dots, x_n$ sú kladné čísla.

13. Dokážte nerovnosti

1. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ ;

2. $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2.\dots.n} < 3$ .

## 1.2. Ohraničené množiny reálnych čísel, supremum a infimum

Neprázdna množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva <u>zhora (zdola) ohraničená</u>, ak platí

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A: x \leq K \qquad (\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A: x \geq K).$$

Číslo K s uvedenou vlastnosťou sa nazýva <u>horné (dolné) ohraničenie množiny A.</u> $\emptyset$ považujeme za ohraničenú zhora aj zdola.

Množina, ktorá je zhora aj zdola ohraničená, sa nazýva <u>ohraničená</u>. Množina, ktorá nie je ohraničená, sa nazýva <u>neohraničená</u>.

14*. Zistite, či sú dané množiny zhora, resp. zdola ohraničené:

1. $A = \left\{ \sqrt{a + \sqrt{b}} \text{ ; } a, b \in \mathbb{N}, a < b \right\}$ ;

2. $B = \left\{ \frac{1}{x + 1/x} \text{ ; } x \in (0, \infty) \right\}$ ;

3. $C = \left\{ \sin(n!) \text{ ; } n \in \mathbb{N} \right\}$ ;

4. $D = \left\{ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}} \text{ ; } x \in \mathbb{Q} \cap (2,3) \right\}$ ;

5. $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ ; } \exists a, b, c \in \mathbb{Q}: a \neq 0 \wedge ax^2 + bx + c = 0 \right\}$
(teda E je množina koreňov všetkých polynómov druhého stupňa s racionálnymi koeficientami).

15. Ak $A \subset \mathbb{R}$ je neohraničená množina, tak platí

$$\forall a \in A \quad \forall \beta > 0 \quad \exists b \in A: |a - b| > \beta .$$

Dokážte!

16. Nech A, $B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, pričom B je neohraničená. Ak existuje $\beta > 0$ také, že platí

$$\forall x \in B \quad \exists y \in A: |x - y| < \beta , \qquad (*)$$

tak A je neohraničená množina. Dokážte!

Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ sa nazýva <u>supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$</u>, $A \neq \emptyset$, ak

(i) $\forall x \in A: x \leq \alpha$ ;

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A: x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$ .

(Podľa (i) je $\alpha$ horné ohraničenie množiny A; (ii) je negácia výroku „pre niektoré $\varepsilon > 0$ je číslo $\alpha - \varepsilon$ horným ohraničením množiny A", hovorí teda, že neexistuje horné ohraničenie množiny A, ktoré by bolo menšie než $\alpha$. Teda $\alpha$ je najmenšie horné ohraničenie množiny A.) Supremum množiny A označujeme sup A.

Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ sa nazýva <u>infimum množiny $A \subset \mathbb{R}$</u>, $A \neq \emptyset$, ak

(i) $\forall x \in A: x \geq \beta$ ;

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A: x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$ .

(To znamená, že $\beta$ je najväčšie z dolných ohraničení množiny A.) Infimum množiny A označujeme inf A.

Ak usporiadané pole $\mathbb{R}$ reálnych čísel konštruujeme z poľa $\mathbb{Q}$ racionálnych čísel pomocou Dedekindových rezov, môžeme dokázať nasledujúce dve ekvivalentné tvrdenia:

<u>Veta 1</u>. Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má supremum.

<u>Veta 2</u>. Každá neprázdna zdola ohraničená množina reálnych čísel má infimum.

Ak usporiadané pole $\mathbb{R}$ zavádzame axiomaticky, považujeme prvé z uvedených tvrdení za axiómu, z nej možno odvodiť vetu o existencii infima.

17. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce rovnosti:

1. $1 = \inf \left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1} ; x \in \mathbb{R} \right\}$ ;
2. $1 = \sup \left\{ \frac{2x^2}{2x^2+1} ; x \in \mathbb{R} \right\}$ ;
3. $-2 = \inf \left\{ 2x^2 + 8x + 1 ; x \in \mathbb{R} \right\}$ ,
4. $12 = \sup \left\{ 1 + 6x - x^2 ; x \in \mathbb{R} \right\}$ .

Riešenie: 1. Musíme zistiť, či číslo 1 vyhovuje podmienkam (i) a (ii) z definície infima:

1. pretože $\frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{1+x^2}$ a číslo $\frac{1}{1+x^2}$ je kladné pre každé $x \in \mathbb{R}$, platí $\frac{x^2+2}{x^2+1} > 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$; teda číslo 1 vyhovuje podmienke (i);

2. podmienka (ii) má v tomto prípade tvar

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in \mathbb{R}: \frac{a^2+2}{a^2+1} < 1 + \varepsilon ,$$

čo je ekvivalentné s podmienkou

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in \mathbb{R}: a^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 .$$

Odtiaľ už vidíme, že pre každé dané $\varepsilon > 0$ také číslo $a \in \mathbb{R}$ skutočne existuje (pre $\varepsilon > 1$ vyhovuje uvedenej nerovnosti dokonca každé reálne číslo a, pre $\varepsilon \in (0, 1\rangle$ stačí za a zvoliť ľubovoľné číslo, pre ktoré platí $|a| > \sqrt{1/\varepsilon - 1}$); teda pre číslo 1 je splnená aj podmienka (ii).

Pretože číslo 1 vyhovuje obidvom podmienkam z definície infima, platí $1 = \inf \left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1} ; x \in \mathbb{R} \right\}$.

18. Nájdite supremum a infimum nasledujúcich množín (nezabudnite, že svoje tvrdenia musíte dokázať podobne ako v pr. 17):

    1. $A = \{ x \in (2,3)$ ; zápis čísla $x$ v desiatkovej sústave má konečný počet cifier za desatinnou čiarkou $\}$ ;
    2. $B = \{ x \in \langle 0,2)$ ; zápis čísla $x$ v desiatkovej sústave obsahuje len cifry 0, 1 $\}$ ;
    3. $C = \{ \cos \pi(n!) ; n \in \mathbb{N} \}$.

19. Nech $A \subset B \subset \mathbb{R}$, pričom $A$ je neprázdna a $B$ zhora ohraničená množina. Potom $A$ je zhora ohraničená množina a platí $\sup A \leq \sup B$. Dokážte! Sformulujte analogické tvrdenie pre infíma!

20. Nech $A$ je neprázdna ohraničená množina; definujme množinu $-A$ nasledovne: $-A := \{ -z ; z \in A \}$. Potom

$$\sup(-A) = -\inf A,$$
$$\inf(-A) = -\sup A.$$

Dokážte!

Riešenie: Dokážeme prvú z uvedených rovností. Označme $\beta := \inf A$ (pre číslo $\beta$ teda platí: (1) $\forall z \in A: z \geq \beta$ ; (2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists z_\varepsilon \in A: z_\varepsilon < \beta + \varepsilon$ ); máme ukázať, že číslo $-\beta$ je supremom množiny $-A$, tj. že vyhovuje podmienkam (i) a (ii) z definície suprema.

1. Podmienka (i) má v tomto prípade podobu

$$\forall x \in -A: x \leq -\beta ,$$

čo je ekvivalentné s podmienkou

$$\forall z \in A: -z \leq -\beta ,$$

tj.

$$\forall z \in A: z \geq \beta ;$$

posledné tvrdenie je pravdivé, pretože $\beta$ vyhovuje podmienke (1).

2. Podmienka (ii) má tvar

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in -A: x_\varepsilon > -\beta - \varepsilon ,$$

to je ekvivalentné s výrokom

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists z_\varepsilon \in A: -z_\varepsilon > -\beta - \varepsilon ,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists z_\varepsilon \in A: z_\varepsilon < \beta + \varepsilon ,$$

to je ale podmienka (2), ktorá je podľa predpokladov splnená.

21. Nech $A$, $B$ sú neprázdne ohraničené množiny, definujme množinu $A + B$ nasledovne: $A + B := \{ a + b ; a \in A, b \in B \}$. Potom platí

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Dokážte! Sformulujte a dokážte analogické tvrdenie pre infíma!

## 1.3. Funkcie

### 1.3.1. Definícia funkcie. Zložené funkcie. Elementárne funkcie

Nech $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdna množina. Ak je každému číslu $x \in A$ priradené práve jedno číslo $y \in \mathbb{R}$, ktoré označíme $f(x)$, hovoríme, že $f$ je funkcia (funkcia definovaná na množine $A$). Číslo $f(x)$ sa nazýva funkčná hodnota (v bode $x$), množina $A$ definičný obor funkcie $f$ (túto množinu budeme označovať $D(f)$). Na označenie funkcií budeme používať písmená latinskej a gréckej abecedy. Ak chceme zdôrazniť, že definičným oborom funkcie $f$ je množina $A$, použijeme zápis $f : A \to \mathbb{R}$ (prípadne $f : A \to B$, ak pre každé $x \in A$ platí $f(x) \in B$) alebo $f(x)$, $x \in A$. Okrem označení „funkcia $f$", „funkcia $f : A \to \mathbb{R}$" sa možno stretnúť aj so spojeniami „funkcia $y = f(x)$" alebo „funkcia $f(x)$" (istá nepresnosť posledných dvoch spojení spočíva v tom, že symbolom $f(x)$ sa zvykne označovať funkčná hodnota v danom bode $x$; mnohí autori preto rozlišujú označenie $f(x)$ pre funkčnú hodnotu a $f(.)$ pre funkciu).

Hovoríme, že funkcie $f$ a $g$ sa rovnajú, ak $D(f) = D(g)$ a pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$ (teda funkcia je jednoznačne určená predpisom priradenia a definičným oborom).

Funkciu $a$, ktorej definičným oborom je množina $\mathbb{N}$, nazývame postupnosť a označujeme ju spravidla $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; funkčná hodnota v bode $n$ sa nazýva $n$-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označuje sa $a_n$.

Ak $f : A \to \mathbb{R}$ je funkcia a $B \subset A$ neprázdna množina, tak množina $f(B) := \{ f(x) \; ; \; x \in B \}$ sa nazýva obraz množiny $B$ (pri zobrazení $f$). Špeciálne množina $f(A)$ sa nazýva obor hodnôt funkcie $f$.

Nech sú dané funkcie $f$, $g$.

1. Ak je množina $D_1 := D(f) \cap D(g)$ neprázdna, nazývajú sa funkcie $p$, $q$, $r$ definované na množine $D_1$ predpismi

$$p(x) = f(x) + g(x),$$
$$q(x) = f(x) - g(x),$$
$$r(x) = f(x).g(x)$$

súčet, rozdiel a súčin funkcií $f$, $g$ a označujú sa $f + g$, $f - g$, $f.g$.

2. Ak je množina $D_2 := D(f) \cap \{ x \in D(g) \; ; \; g(x) \neq 0 \}$ neprázdna, nazýva sa funkcia $s : D_2 \to \mathbb{R}$ definovaná predpisom

$$s(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

podiel funkcií $f$, $g$ a označuje sa $\frac{f}{g}$.

3. Ak je množina $D_3 := \{ x \in D(f) \; ; \; f(x) \in D(g) \}$ neprázdna, nazýva sa funkcia $t : D_3 \to \mathbb{R}$ daná predpisom

$$t(x) = g(f(x))$$

zložená funkcia z funkcií $f$ a $g$ (superpozícia funkcií $f$ a $g$) a označuje sa $g \circ f$. Funkcia $f$ sa nazýva vnútorná zložka, funkcia $g$ vonkajšia zložka funkcie $g \circ f$.

<u>Základnými elementárnymi funkciami</u> nazývame nasledujúce funkcie:

| názov | predpis | definičný obor |
|---|---|---|
| konštantné | $f(x) \equiv a$ *) <br> $a \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| mocninové | $f(x) = x^a$ <br> $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | 1. ak $a > 0$: <br> $\alpha$/ ak $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p$ je párne alebo $p$ aj $q$ sú nepárne: $\mathbb{R}$ <br> $\beta$/ vo všetkých ostatných prípadoch: $\langle 0, \infty)$ ; <br> 2. ak $a < 0$: <br> $\alpha$/ ak $a = -\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p$ je párne alebo $p$ aj $q$ sú nepárne: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ <br> $\beta$/ vo všetkých ostatných prípadoch: $(0, \infty)$ |
| exponenciálne | $f(x) = a^x$ <br> $a > 0$, $a \neq 1$ | $\mathbb{R}$ |
| logaritmické | $f(x) = \log_a x$ **) <br> $a > 0$, $a \neq 1$ | $\mathbb{R}^+$ |
| goniometrické | $f(x) = \sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $f(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ | $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$ |
| | $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ | $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}\}$ |
| cyklometrické***) | $f(x) = \arcsin x$ | $\langle -1, 1 \rangle$ |
| | $f(x) = \arccos x$ | $\langle -1, 1 \rangle$ |
| | $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$ | $\mathbb{R}$ |

Funkcie, ktoré vzniknú zo základných elementárnych funkcií len použitím operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozície funkcií, sa nazývajú <u>elementárne funkcie</u>.

Všimnime si, že definičný obor funkcie, ktorá je súčtom, rozdielom, súčinom, podielom alebo superpozíciou daných funkcií $f$ a $g$, je jednoznačne určený množinami $D(f)$ a $D(g)$. Teda ak funkcia $h$ vznikne z funkcií $f_1, \dots, f_n$ len použitím operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozície funkcií, je množina $D(h)$ jednoznačne určená množinami $D(f_1), \dots, D(f_n)$. Preto ak napíšeme predpis takejto funkcie $h$ bez toho, aby sme výslovne určili jej definičný obor, považujeme funkciu $h$ za definovanú práve na tej množine, ktorá je určená množinami $D(f_1), \dots, D(f_n)$ na základe definícií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozí-

---

*) symbol $\equiv$ čítame „identicky rovné"

**) špeciálne v prípade $a = 10$ budeme používať označenie $\log x$, v prípade $a = e$ označenie $\ln x$

***) pozri odsek 1.3.4

cie funkcií. (Teda trocha nepresne povedané: za definičný obor takejto funkcie h považujeme množinu všetkých tých $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré má predpis funkcie h „zmysel".)

22. Zložením ktorých základných elementárnych funkcií vzniknú funkcie dané predpismi

1. $\sin^3 x$ ;
2. $\sin (x^3)$ ;
3. $5^{tg^2 x}$ ;
4. $\log_3 \sin^2 \sqrt{b^x}$ ;
5. $\sqrt{\cos (2^{\sin x})}$ ?

23. Nájdite D(f), ak funkcia f je daná predpisom

1. $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$ ;
2. $f(x) = \log (x^2 - 4)$ ;
3. $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ ;
4. $f(x) = \ln (\cos (\ln x))$ ;
5. $f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ ;
6. $f(x) = \sqrt{\cos x^2}$ ;
7. $f(x) = \sin (\ln \frac{1}{3x + 1})$ ;
8. $f(x) = \ln (3 \sin^2 x - 4)$ ;
9. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \ln \frac{x + 1}{x - 2}$ ;
10. $f(x) = \sqrt{\log \frac{5x - x^2}{4}}$ ;
11. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \log_{\frac{1}{4}} x$ ;
12. $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ ;
13. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 2}{\log \cos x}}$ ;
14. $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{2x - 3}{x - 1}}$ ;
15. $f(x) = \ln (1 - \log (x^2 - 5x + 16))$;
16. $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$ ;
17. $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 - 35x - 6x^2}}$ .

24. Napíšte predpis a určte definičný obor funkcií $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ a $g \circ g$, ak

1. $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = 2^x$ ;
2. $f(x) = \operatorname{sgn} x^{+)} := \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0 \\ 1, & \text{ak } x > 0 \\ -1, & \text{ak } x < 0 \end{cases}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x}$ ;
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \leq 0 \\ x, & \text{ak } x > 0 \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x < 0 \\ -x^2, & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$ ;
4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ak } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 3x, & \text{ak } x \notin \langle 0, 1\rangle \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ak } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 4x - 2, & \text{ak } x \notin \langle 0, 1\rangle \end{cases}$;
5. $f(x) = \chi(x)^{++)} := \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x^2}$ ;

---

+) táto funkcia sa nazýva signum

++) táto funkcia sa nazýva Dirichletova funkcia

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{ak } |x| > 1 \end{cases}$, $\qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{ak } |x| \leq 2 \\ -1, & \text{ak } |x| > 2 \end{cases}$.

25. Nech je daná funkcia $f$; označme $f_1 := f$, $f_2 := f \circ f_1$, $f_{n+1} := f \circ f_n$. Nájdite predpis pre $f_n$, ak

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ ; $\qquad$ 2. $f(x) = a + bx$ ;

3. $f(x) = \dfrac{x}{ax + b}$ $\quad (b \neq 1)$ .

Ak $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ sú funkcie, $A \subset B$ a pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$, hovoríme, že funkcia $f$ je <u>zúženie funkcie $g$ na množinu $A$</u> ($f$ je <u>funkcia $g$ zúžená na množinu $A$</u>) a označujeme $f = g/A$.

26. Zistite, či sa rovnajú funkcie $f$ a $g$. Ak nie, nájdite najväčšiu množinu $A \subset \mathbb{R}$, pre ktorú platí $f/A = g/A$.

1. $f(x) = \sqrt{x(x - 1)}$ , $\qquad g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 1}$ ;

2. $f(x) = \ln (x^2 - 4)$ , $\qquad g(x) = \ln (x - 2) + \ln (x + 2)$;

3. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ , $\qquad g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ ;

4. $f(x) = \ln \left| \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right|$ , $\qquad g(x) = -2 \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|$;

5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ , $\qquad g(x) = \begin{cases} -6 & , \text{ ak } x < -2 \\ 2x - 2 & , \text{ ak } x \in \langle -2, 4 \rangle \\ 6 & , \text{ ak } x > 4 \end{cases}$.

### 1.3.2. <u>Graf funkcie</u>

Nech je v rovine daná pravouhlá súradnicová sústava, pričom jednotky dĺžky na súradnicových osiach Ox a Oy sú rovnaké. Množina $\{(x, f(x)) ; x \in A\}$ bodov roviny, kde $f: A \to \mathbb{R}$ je daná funkcia, sa nazýva <u>graf funkcie $f$</u> ($(x, f(x))$ je zápis bodu roviny pomocou jeho súradníc v danej súradnicovej sústave).

V nasledujúcej tabuľke sú opísané elementárne transformácie grafov funkcií:

| funkcia $y = g(x)$ | transformácia grafu funkcie $y = f(x)$ |
|---|---|
| $y = f(x) + c$ | posunutie o $c$ v smere osi Oy |
| $y = f(x - c)$ | posunutie o $c$ v smere osi Ox |
| $y = f(-x)$ | symetria podľa osi Oy |
| $y = -f(x)$ | symetria podľa osi Ox |
| $y = a.f(x)$ | vynásobenie každej y-ovej súradnice číslom $a$ |
| $y = f(ax)$ | vydelenie každej x-ovej súradnice číslom $a$ ($a \neq 0$) |

27. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

$1_o$. $y = \ln(1 + x)$ ;   $2_o$. $y = 1 + e^{-x}$ ;

$3_o$. $y = \sin \frac{x}{2}$ ;   $4_o$. $y = 3 + 2 \cos 3x$ ;

$5_o$. $y = x^2 + 4x + 2$ ;   $6_o$. $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$ ;

7. $y = \frac{1 + x}{1 - x}$ ;   $8_o$. $y = \frac{2 + 3x}{1 - 4x}$ ;

$9_o$. $y = -\sqrt{-x - 2}$ ;   10. $y = \sin 2(x + 3)$ ;

11. $y = \sin(2x + 3)$ ;   12. $y = \frac{1}{3} 2^{1-3x} + 2$ ;

$13_o$. $y = \operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{2})$ ;   $14_o$. $y = 3 - 0{,}5 \sqrt[3]{3x - 2}$ ;

$15_o$. $y = \log_3 (0{,}5x + 2)$ .

Riešenie: 10. Najprv zostrojíme graf funkcie $f(x) = \sin x$, vydelením každej x-ovej súradnice číslom 2 (teda jeho „dvojnásobným zhustením") z neho dostaneme graf funkcie $f(2x) = g(x) = \sin 2x$. Naša funkcia $\sin 2(x + 3)$ má tvar $g(x + 3)$, jej graf teda získame, ak graf funkcie $g$ posunieme pozdĺž osi $Ox$ o 3 jednotky dĺžky doľava.

(Pri zostrojovaní takýchto grafov sa často chybne zamieňa poradie transformácií. Zistime, graf ktorej funkcie by sme dostali pri ich opačnom poradí: posunutím grafu funkcie $f(x) = \sin x$ o 3 jednotky dĺžky vľavo získame graf funkcie $g_1(x) = f(x + 3) = \sin(x + 3)$; ak teraz v tomto grafe vydelíme každú x-ovú súradnicu číslom 2, dostaneme graf funkcie $g_2(x) = g_1(2x) = \sin(2x + 3)$.)

$28_o$. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

1. $y = \ln |x|$;   2. $y = \sin |x|$;

3. $y = |\sin x|$;   4. $y = |x^2 - 2x - 1|$;

5. $y = 2 \cos |x - 2| + 4$ ;   6. $y = x.|x + 2|$;

7. $y = x + \sqrt{x^2}$ ;   8. $y = |\log_{\frac{1}{2}} (|x| - 2)|$;

9. $y = 2|x - 2| - |x + 1| + x$ ;   10. $y = \begin{cases} \sin x & , \text{ ak } x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 2 & , \text{ ak } x \in (0, 1\rangle \\ 1/(x - 1) & , \text{ ak } x \in (1, 4\rangle \end{cases}$ .

29. Nech graf funkcie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je symetrický s grafom funkcie $f$

1. podľa priamky $x = x_0$;
2. podľa priamky $y = y_0$;
3. podľa bodu $(x_0, y_0)$ .

Vyjadrite funkčné hodnoty funkcie $g$ pomocou funkčných hodnôt funkcie $f$!

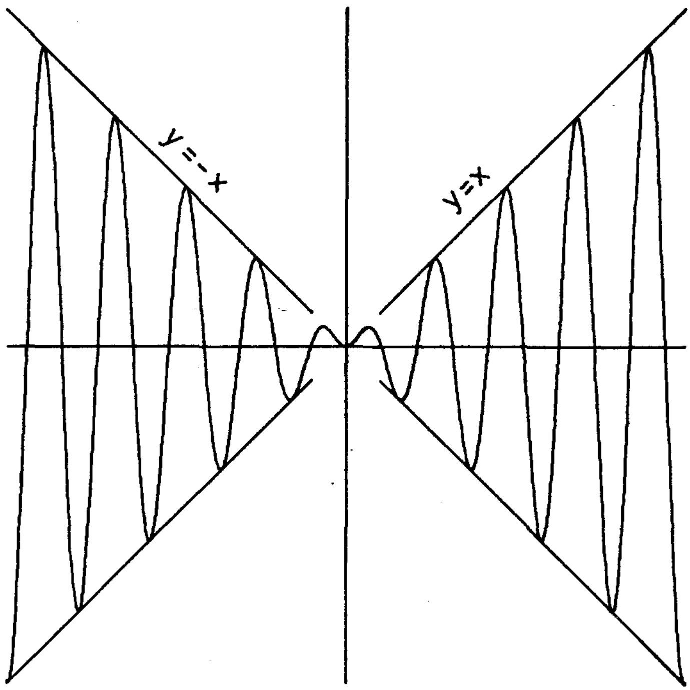
30. Načrtnite približne grafy funkcií:

$1_o$. $y = \sin x^2$;   $2_o$. $y = \sin \frac{1}{x}$ ;

3. $y = x \sin x$ ;   $4_o$. $y = e^x \cos x$ ;

$5_o$. $y = \frac{\sin x}{x}$ ;   $6_o$. $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$ .

Riešenie: 3. Pre $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je $y = 0$, pre $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ležia príslušné body grafu funkcie $y = x \sin x$ na priamke $y = x$, pre $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, na priamke $y = -x$. Pretože pre $x \geq 0$ je $-x \leq x \sin x \leq x$, pre $x < 0$ je $x \leq x \sin x \leq -x$, leží graf funkcie $y = x \sin x$ „medzi" priamkami $y = x$ a $y = -x$. Na základe toho už vieme približne načrtnúť tento obrázok:




Obr. 1

31. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií tak, že predpis $y = a \cos x + b \sin x$ upravíte na tvar $y = A \sin (x - x_0)$:

1. $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ ;   2. $y = \cos x - \sin x$ ;

3. $y = 6 \cos x + 8 \sin x$ .

Riešenie: 1. $y = \sqrt{3} \cos x + 1.\sin x = 2 (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x) = 2(\sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x) = 2 \sin (x + \frac{\pi}{3})$ (táto úprava je analogická úprave algebraického tvaru komplexného čísla $a + bi$ na goniometrický tvar $\sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ).

32. Ukážte, že grafy funkcií $f(x) = x^3 - 3a^2x$ a $g(x) = x^3 - 3ax^2$ možno získať jeden z druhého posunutím.

$33_o$. Do jedného obrázku nakreslite grafy funkcií f a g, ak

1. $f(x) = \sin x$ ,   $g(x) = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ ;

2. $f(x) = \cos x$ , $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}}$ .

$34_o$. Zostrojte graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ak
1. $f(x + 1) = 2\, f(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x(1-x)$ pre $x \in \langle 0, 1\rangle$ ;
2. $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 0$ pre $x \in \langle 0, \pi\rangle$.

### 1.3.3. Niektoré vlastnosti funkcií (ohraničené, monotónne, periodické, prosté funkcie)

Nech $A$, $B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, $B \subset A$. Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená na množine $B$, ak je ohraničená množina $f(B)$. Funkcia ohraničená na svojom definičnom obore sa nazýva ohraničená. Analogicky sa zavádza pojem funkcie ohraničenej zhora, resp. zdola a funkcie ohraničenej zhora, resp. zdola na množine $B$.

Ak je množina $f(B)$ zhora, resp. zdola ohraničená, tak jej supremum, resp. infimum sa nazýva supremum, resp. infimum funkcie $f$ na množine $B$ a označuje sa $\sup\limits_{x \in B} f(x)$, resp. $\inf\limits_{x \in B} f(x)$. Ak existuje maximum, resp. minimum množiny $f(B)$, nazýva sa toto číslo maximum, resp. minimum funkcie $f$ na množine $B$ (často sa používa názov globálne maximum, resp. globálne minimum funkcie $f$ na množine $B$) a označuje sa $\max\limits_{x \in B} f(x)$, resp. $\min\limits_{x \in B} f(x)$.

35. Zistite, či funkcia $f$ je na množine $M$ ohraničená zhora, resp. zdola:
1. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ , $M = (0, 1)$ ;
2. $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$ , $M = \langle 2, \infty)$ ;
3. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 1}$ , $M = (1, 2\rangle$ .

36. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte výrok „hodnota $f(x_0)$ nie je maximom funkcie $f$ na množine $B$ ($x_0 \in B \subset D(f)$)".

$37_o$. Nech je daná funkcia $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Potom funkcia $g$ určená predpisom $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ je ohraničená práve vtedy, keď $\inf\limits_{x \in R} f(x) > 0$. Dokážte!

38. Nech funkcie $f$ a $g$, definované na $\mathbb{R}$, sú zhora ohraničené. Potom
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) .$$
Dokážte!

$39_o$. Uveďte príklad neohraničených funkcií $f$, $g$ definovaných na $\mathbb{R}$, ktorých superpozícia je ohraničená funkcia!

Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, $B \subset A$. Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva rastúca na množine B, resp. neklesajúca na množine B, ak platí

$$\forall\, x, y \in B:\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)\ ,$$

resp.

$$\forall\, x, y \in B:\ x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva klesajúca na množine B, resp. nerastúca na množine B, ak platí:

$$\forall\, x, y \in B:\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)\ ,$$

resp.

$$\forall\, x, y \in B:\ x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

Ak má funkcia f niektorú z uvedených štyroch vlastností, nazýva sa monotónna na množine B; funkcia, ktorá je rastúca na množine B alebo klesajúca na množine B, sa nazýva rýdzomonotónna na množine B.

Funkcia rastúca (klesajúca, nerastúca, neklesajúca, monotónna, rýdzomonotónna) na svojom definičnom obore sa nazýva rastúca (klesajúca, nerastúca, neklesajúca, monotónna, rýdzomonotónna).

40. Vyšetrite rast a klesanie funkcií:
1. $f(x) = \sin x + \cos x$ ;  2. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ .

41. Dokážte: Ak postupnosť $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ($b_n > 0$ pre $n \in \mathbb{N}$) je monotónna, tak aj postupnosť $\left\{ \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

42. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte výroky
1. Funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie je klesajúca na množine M ($\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$) ;
2. Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ nie je monotónna na množine M ($\emptyset \neq M \subset A \subset \mathbb{R}$).

43. Ukážte, že nasledujúce funkcie nie sú monotónne:
1. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ ;  $2_o$. $f(x) = \mathrm{sgn}^2 x$ ;
$3_o$ $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ .

Riešenie: 1. Pre $x = 0$ a $y = 1$ platí $x < y \wedge f(x) > f(y)$; pre $x = 2$ a $y = 3$ platí $x < y \wedge f(x) < f(y)$. Preto funkcia f nemôže byť nerastúca (a teda nemôže byť ani klesajúca), tomu totiž odporuje voľba $x = 2$, $y = 3$; súčasne f nemôže byť neklesajúca (a teda nemôže byť ani rastúca), tomu odporuje voľba $x = 0$, $y = 1$. (Samozrejme, že pri výbere vhodných x, y sme si pomáhali grafom funkcie f.)

$44_o$. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je rastúca na $\langle 0, 1)$, rastúca na $\langle 1, 2)$, ale nie je rastúca na $\langle 0, 2)$ !

45. Nech funkcie f, g sú klesajúce a záporné na množine M. Rozhodnite o monotónnosti nasledujúcich funkcií na množine M a svoje tvrdenia dokážte:
1. $f(x).g(x)$ ;  2. $f^3(x)$ ;

3. $4\, f(x) + 8\, g(x)$ ; 4. $g^6(x)$ .

46. 1. Dokážte, že superpozícia rýdzomonotónnych funkcií je rýdzomonotónna funkcia!
2. Vyšetrite rast a klesanie funkcií
a/ $f(x) = \log (x^2 - 6x + 10)$ ; b/ $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 8x + 20)$.

$47_0$. Uveďte príklady funkcií $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takých, že
1. $f$ je rastúca, $g$ klesajúca, $f + g$ rastúca ;
2. $f$ je rastúca na $(0, 1)$, $g$ klesajúca na $(0, 1)$, $f.g$ nie je rastúca na $(0, 1)$.

Funkcia $f$ sa nazýva periodická, ak existuje číslo $T > 0$ tak, že platí
1. $\forall a \in D(f)$: $D(f) \cap \langle a + T, a + 2T\rangle = \{ x + T ; x \in D(f) \cap \langle a, a + T\rangle \}$ ;
2. $\forall a \in D(f)$: $f(a + T) = f(a)$ .

Každé číslo $T$ s uvedenými vlastnosťami sa nazýva perióda funkcie $f$; ak existuje najmenšie také $T > 0$, nazýva sa najmenšia perióda funkcie $f$ (možno sa stretnúť aj s terminológiou, v ktorej sa pojem perióda používa výlučne v zmysle tu zavedeného pojmu najmenšej periódy).

48. Dokážte, že
$1_0$. každé kladné racionálne číslo je periódou Dirichletovej funkcie ;
2. žiadne kladné iracionálne číslo nie je jej periódou.

49. Ak najmenšou periódou funkcie $f$ je číslo $T$, tak najmenšou periódou funkcie $g(x) := f(ax + b)$ $(a > 0)$ je číslo $T/a$. Dokážte!

$50_0$. Zostrojte graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 1, ak pre $x \in \langle 0, 1)$ platí $f(x) = x^2$.

51. Dokážte: Ak existuje $T > 0$ také, že platí niektorá z nasledujúcich podmienok, tak funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická:

1. $f(x + T) = - f(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ ; 2. $f(x + T) = 1/f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ;

3. $f(x + T) = \dfrac{f(x) + a}{bf(x) - 1}$ , $x \in \mathbb{R}$ ; 4. $f(x + T) = \dfrac{1}{1 - f(x)}$ , $x \in \mathbb{R}$ .

52. Ak graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je symetrický podľa osí $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, tak $f$ je periodická funkcia. Dokážte!

Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva prostá (injektívna, jednojednoznačná), ak platí

$$\forall x, y \in A: x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) .$$

Ak je funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ prostá, tak funkcia s definičným oborom $f(A)$, ktorá každému číslu $x \in f(A)$ priradí to číslo $y \in A$, pre ktoré $f(y) = x$, sa nazýva inverzná funkcia k funkcii $f$ a označuje sa $f^{-1}$.

53. Zistite, či je daná funkcia prostá; ak áno, nájdite k nej inverznú funkciu a určte jej definičný obor:

1. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ;
2. $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$
3. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, $x \leq -1$ ;
4. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$ ;
5. $f(x) = 3^{x/(x-1)}$ ;
6. $f(x) = 2^{x^2-2x}$, $x \leq 1$ ;
7. $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$ ;
8. $f(x) = 1 + \sqrt{3 + e^{2x}}$ ;
9. $f(x) = \log_x 10$ ;
10. $f(x) = 2^{1 + \ln\sqrt{x-2}}$ ;
11. $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x > 0$ ;
12. $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x < 0$ ;
13. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ;
14. $f(x) = \log_2 (x + \sqrt{x^2+1})$ ;
15. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x < 0 \\ 2x, & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$ ;
16. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in Q \\ 1-x, & \text{ak } x \notin Q \end{cases}$ ;
17. $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ak } x < 1 \\ x^2, & \text{ak } x \in \langle 1, 4 \rangle \\ 2^x, & \text{ak } x > 4 \end{cases}$ .

Riešenie: 3. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ nájdime všetky tie $y \in D(f)$, pre ktoré $f(y) = x$, tj. všetky tie $y \leq -1$, pre ktoré $2y/(1-y^2) = x$. Ak je $x$ dané, musia byť hľadané čísla $y$ riešeniami rovnice

$$xy^2 + 2y - x = 0 ;$$

tejto pre $x = 0$ vyhovuje len $y = 0$, pre $x \neq 0$ jej vyhovujú čísla $y_1 = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ a $y_2 = \frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{x}$. Pretože hľadáme len riešenia ležiace v intervale $(-\infty, -1\rangle$, musíme zistiť, kedy $y_1 \leq -1$ a kedy $y_2 \leq -1$. Prvá z týchto nerovností nie je splnená pre žiadne $x \neq 0$, druhá platí pre každé $x > 0$.

Zistili sme teda: pre žiadne $x \leq 0$ neexistuje $y \leq -1$ také, že $f(y) = x$; pre každé $x > 0$ existuje práve jedno číslo $y \leq -1$, pre ktoré $f(y) = x$, toto číslo je určené vzťahom $y = -(1 + \sqrt{1+x^2})/x$. To znamená: 1. funkcia $f$ je prostá; 2. $f((-\infty, -1\rangle) = (0, \infty)$; 3. inverzná funkcia $f^{-1}$ je definovaná na množine $f((-\infty, -1\rangle)$ predpisom $f^{-1}(x) = -(1 + \sqrt{1+x^2})/x$.

54. Dokážte, že graf funkcie $y = \ln(1 - e^x)$ je symetrický podľa priamky $y = x$.

55. $1_o$. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je prostá, a nie je monotónna na $\mathbb{R}$!

2. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je prostá, a nie je monotónna na žiadnom intervale $I \subset \mathbb{R}$!

56. Rozhodnite o pravdivosti tohto tvrdenia: „Ak aspoň jedna z funkcií f, g definovaných na $\mathbb{R}$ nie je prostá, tak funkcia $f \circ g$ nie je prostá."!

### 1.3.4. Cyklometrické a hyperbolické funkcie

Inverzné funkcie k funkciám $\sin/\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, $\cos/\langle 0,\pi\rangle$, $tg/(-\pi/2, \pi/2)$, $ctg/(0,\pi)$ sa nazývajú arkussínus, arkuskosínus, arkustangens a arkuskotangens a označujú sa arcsin, arccos, arctg, arcctg. Tieto funkcie majú spoločný názov cyklometrické.

57. Vypočítajte:

1. $\arcsin(\sin \frac{7}{3}\pi)$ ;
2. $\sin(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}})$ ;
3. $\arccos(\sin \frac{\pi}{6})$ ;
4. $\arcsin(\cos \frac{13}{3}\pi)$ ;
5. $tg(\arccos \frac{1}{2})$ .

58. 1. Pomocou funkcie arcsin vyjadrite inverznú funkciu k zúženiu funkcie sin na interval a/ $\langle 3\pi/2, 5\pi/2\rangle$ ; b/ $\langle \pi/2, 3\pi/2\rangle$ .

2. Zostrojte grafy funkcií $\sin(\arcsin x)$, $\arcsin(\sin x)$, $\cos(\arccos x)$, $\arccos(\cos x)$ !

59. Nájdite inverznú funkciu k funkcii

1. $f(x) = \sin^3 x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ ;
2. $f(x) = \sin^3 x,\ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$ ;
3. $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2}),\ x \in \langle 2\pi, 3\pi\rangle$ ;
4. $f(x) = tg\, x,\ x \in \langle -\pi, 0)\setminus\{-\frac{\pi}{2}\}$ ;
5. $f(x) = arctg \frac{1}{x}$ ;
6. $f(x) = 4 \arcsin\sqrt{1 - x^3}$ ;
7. $f(x) = 3 + 4\arccos(2x - 1)$ ;
8. $f(x) = 2^{3+arctg\, x}$ ;
9. $f(x) = \sin(3x - 1),\ |6x - 2| < \pi$ .

60. Dokážte rovnosť funkcií $\sin(\arccos x)$ a $\sqrt{1 - x^2}$! Analogickým spôsobom vyjadrite funkcie dané predpismi

1. $\cos(\arcsin x)$ ;
2. $\sin(2 \arcsin x)$ ;
3. $\cos^2(arctg\, x)$ ;
4. $\sin^2(arcctg\, x)$ ;
5. $\sin(arcctg\, x)$ ;
6. $tg(3\, arctg\, x)$ .

Riešenie: Pretože $\arccos x \in \langle 0,\pi\rangle$ pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ a rovnosť $\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u}$ platí pre každé $u \in \langle 0,\pi\rangle$ , je $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$ .

61. Zistite, pre ktoré $x \in \mathbb{R}$ platí rovnosť

1. $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$ ;
2. $\arccos\sqrt{1 - x^2} = -\arcsin x$ ;

3. $\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$ ;    4. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ ;

5. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}$ .

Riešenie: 1. Pre $x \in \langle -1, 0)$ nemôže uvedená rovnosť platiť, pretože vtedy $\arccos \sqrt{1 - x^2} \geq 0 > \arcsin x$. Ak $x \in \langle 0, 1 \rangle$, ležia hodnoty $\arccos \sqrt{1 - x^2}$ aj $\arcsin x$ v intervale $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Využijeme, že na tomto intervale je funkcia cos prostá, tj. že pre $\alpha$, $\beta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ platí

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \cos \alpha = \cos \beta .$$

V našom prípade $\cos (\arccos \sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{1 - x^2} = \cos (\arcsin x)$ (pozri pr. 60), teda pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $\arccos \sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$ .

62. Dokážte rovnosti

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ;    2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$ .

Funkcie definované predpismi $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (<u>sínus hyperbolický</u>), $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (<u>kosínus hyperbolický</u>), $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (<u>tangens hyperbolický</u>) a $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (<u>kotangens hyperbolický</u>) sa nazývajú <u>hyperbolické funkcie</u>.

$63_0$. Dokážte vzorce

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ;    2. $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$ ;

3. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ ;    4. $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ .

64. Pre hyperbolické funkcie platia vzorce podobné goniometrickým. Odvoďte nasledujúce:

1. $\operatorname{sh} (x + y)$ ;    2. $\operatorname{ch} (x + y)$ ;

3. $\operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;    4. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y$ ;

5. $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y$ .

## 1.4. Ďalšie príklady

65. Rozhodnite o platnosti vety: „Nech A, B $\subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech platí

$$\forall x \in A \quad \forall \beta > 0 \quad \exists y \in B: |x - y| > \beta .$$

Potom B nie je ohraničená." Svoje tvrdenie dokážte!

66. Rozhodnite o platnosti vety: „Nech A, B $\subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech platí

$$\forall \beta > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in B: |x - y| > \beta .$$

Potom B nie je ohraničená." Svoje tvrdenie dokážte!

$67_0$. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú ohraničené množiny, nech $A \cap B \neq \emptyset$. Potom $A \cap B$ je ohraničená množina a $\inf (A \cap B) \geq \max \{ \inf A, \inf B \}$. Dokážte; na konkrétnom príklade ukážte, že v uvedenom vzťahu nemusí platiť rovnosť!

68. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech platia nasledujúce výroky:

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B: \ x < y \tag{*}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in B: \ y - x < \varepsilon. \tag{**}$$

Potom platí $\sup A = \inf B$. Dokážte! (Nezabudnite, že najprv treba ukázať existenciu čísel $\sup A$, $\inf B$ !)

69. Nech $k \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdna ohraničená množina, nech $kA := \{ kx \ ; \ x \in A \}$. Dokážte, že $kA$ je ohraničená množina, vyjadrite $\sup (kA)$, $\inf (kA)$ pomocou $\sup A$, $\inf A$ !

$70_0$. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je daná neprázdna množina $A_n \subset \mathbb{R}$, nech $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $(:= \{ x \in \mathbb{R} \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}: x \in A_n \})$ je ohraničená množina. Dokážte, že $\sup B = \sup \{ \sup A_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$ !

71. Rozhodnite, či platí toto tvrdenie: „Ak funkcia $f$ je ohraničená na intervale $I$, tak

$$\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) = \sup \{ |f(x) - f(y)| \ ; \ x, y \in I \} ".$$

72. Nech $f$, $g$ sú funkcie ohraničené na $\mathbb{R}$. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

$1_0$. $\sup_{x \in R} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in R} |f(x)| + \sup_{x \in R} |g(x)|$ ;

2. $\left| \sup_{x \in R} |f(x)| - \sup_{x \in R} |g(x)| \right| \leq \sup_{x \in R} |f(x) - g(x)|$ .

73. Zostrojte funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktorú platí: na každom intervale $I \subset \mathbb{R}$ je $f$ zhora (zhora aj zdola) neohraničená.

$74_0$. Uveďte príklad funkcie, ktorá je prostá a ohraničená na $\mathbb{R}$ a nie je monotónna na žiadnom intervale $I \subset \mathbb{R}$.

$75_0$. Ukážte, že funkcie $x + \cos x$, $\sin \sqrt{x}$ nie sú periodické !

76. Ak je funkcia $\sin x + \cos ax$ periodická, tak $a \in \mathbb{Q}$. Dokážte!

77. Existuje funkcia, ktorej periódou je každé kladné iracionálne číslo a žiadne kladné racionálne?

$78_0$. Nech funkcia $f$ je definovaná na $R$ a $f(R)$ nie je jednoprvková množina. Potom existuje $a > 0$, ktoré nie je periódou funkcie $f$.

79. Nech graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je symetrický vzhľadom na bod $(a, y_0)$ a na priamku $x = b$ $(a \neq b)$. Potom $f$ je periodická funkcia.

80. Funkcia $f$ je definovaná na intervale $(0, 1)$. Nájdite definičné obory funkcií
1. $f(x^2)$ ; 2. $f(\sin x)$ ; 3. $f(\ln x)$ .

81. Nájdite predpis pre funkciu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ak

1. $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ ; 2. $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ;

3. $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$ ; 4. $f(\frac{x}{1+x}) = x^2$ .

82. Existuje funkcia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tak, že $f(x^2) \equiv 1 + x$ ?

83. 1. Zostrojte funkcie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tak, aby boli obidve nekonštantné na každom intervale $I \subset \mathbb{R}$ a funkcia $f \circ g$ bola konštantná na $\mathbb{R}$. Možno tieto funkcie zostrojiť tak, aby pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platilo $f(x) \neq g(x)$ ?

2. Možno naviac požadovať, aby $g$ bola prostá funkcia?

84. Nájdite maximum a minimum funkcií:

1. $f(x) = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - \sin^2 x + 5$ ; 2. $f(x) = 3^{(x^2-2)^3+8}$ ;

3. $f(x) = a\cos x + b\sin x \quad (a^2 + b^2 > 0)$ ; 4. $f(x) = \sin x \cos x + \cos^2 x$ .

85. Vyšetrite rast a klesanie funkcie $f(x) = 2\log_2(1+x^2) - \log_2^2(1+x^2)$.

$86_o$. Nech $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sú rastúce funkcie také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) .$$

Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(f(x)) \leq g(g(x)) \leq h(h(x)).$$

87. Dokážte nasledujúce rovnosti:

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi$ , kde $\varepsilon$ nadobúda jednu z hodnôt $-1, 0, 1$ $(xy \neq 1)$ ;

$2_o$ $\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon}\arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$,

kde $\varepsilon = \begin{cases} 0 & , \text{ ak } xy \leq 0 \vee x^2 + y^2 \leq 1 \\ \operatorname{sgn} x, & \text{ak } xy > 0 \wedge x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ ;

$3_o$ $\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon}\arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) + 2\pi\varepsilon \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$,

kde $\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{ak } x + y \geq 0 \\ 1, & \text{ak } x + y < 0 \end{cases}$ .

88. Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = 1 + 2\sin\frac{x-1}{x+1}$ , $x \in \left\langle \frac{2-5\pi}{2+5\pi}, \frac{2-3\pi}{2+3\pi} \right\rangle$.

89. Rozhodnite o platnosti tohto tvrdenia: „Nech $f$ je funkcia definovaná na $\mathbb{R}$, nech pre každý otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $f(I) \subset I$. Potom $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$."