Determinanty

Determinanty sa definujú len pre štvorcové matice.
Matica typu 2×2: $\left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Sarusovo pravidlo:

$$\left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ako A si označme ľubovoľnú maticu typu $n \times n$.
Laplaceov rozvoj (podľa i-teho riadku)

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ a M_{ij} je matica, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.

$|A| = |A^T|$ (To znamená, že všetko, čo platí pre riadkové úpravy bude platiť aj pre stĺpcové. Takisto Laplaceov rozvoj sa dá robiť aj podľa stĺpca.)

Ak B vznikne z A pripočítaním násobku jedného riadku k inému, tak $|B| = |A|$.
Ak B vznikne z A vynásobením niektorého riadku konštantou c, tak $|B| = c|A|$.
Ak B vznikne z A výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$.

Pretože vieme, ako sa zmení determinant pri vykonaní riadkových úprav, môžeme počítať determinanty podobným spôsobom, ako sme postupovali pri úprave na RTM. Platí $|A| = |A^T|$, čiže môžeme kombinovať riadkové a stĺpcové úpravy. Determinant hornej trojuholníkovej matice je súčin prvkov na diagonále.

$$\left|\begin{smallmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{smallmatrix}\right| = a_1 a_2 \ldots a_n$$

Determinant súčinu je súčin determinantov.

$$|A.B| = |A||B|$$

Matica A je regulárna (t.j. k A existuje inverzná matica) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
Hodnosť matice A je $n \Leftrightarrow |A| \neq 0$. [1]

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu:[2]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo: Ak A je regulárna matica, tak sústava rovníc určená maticou A s pravými stranami $b_1, \ldots, b_n$ má jediné riešenie, a to takéto:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = |A_j||A|^{-1},$$

pričom A_j je matica, ktorá vznikne z A nahradením j-teho stĺpca stĺpcom $\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{smallmatrix}\right)$

[1] Platí tu ekvivalencia, to znamená, že ak je determinant nulový, tak hodnosť musí byť menšia ako n.
[2] Pozor na to, že sú tu vymenené indexy.

Úloha 1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant. Výsledky (bez záruky): 0,8,8.

Úloha 2. Vyriešte v Z_5 pomocou Cramerovho pravidla: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Úloha 3. Pomocou Cramerovho pravidla riešte:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & =1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$

(Návod: Skúste zvoliť x_3, x_4 za parametre.)

Úloha 4. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnosť?
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Úloha 5. Nájdite inverznú maticu k maticiam z cvičenia 7 pomocou determinantu.

Úloha 6. Vypočítate inverznú maticu:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & -1 \end{pmatrix}$

Úloha 7*. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 8*. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Úloha 9*. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$

Úloha 10*. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Riešené úlohy

Úloha 8*:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

V kroku (1) sme použili Laplaceov rozvoj podľa prvého riadku, v kroku (2) podľa prvého stĺpca.

Dostali sme rekurentný vzťah $D_n = 2D_{n=1} - D_{n-2}$. Vypočítajme niekoľko prvých hodnôt (prvé dve priamym výpočtom, pri ostatných už môžeme použiť rekurenciu): $D_1 = 2, D_2 = 3, D_3 = 4, \dots$

Hypotézu, že $D_n = n+1$ ľahko dokážeme matematickou indukciou. Indukčný krok: $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1$.

Úloha 9*:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (a+b)D_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

Tentoraz sme robili najprv rozvoj podľa prvého stĺpca a potom podľa prvého riadku.

$D_n = (a+b)D_{n=1} - abD_{n-2}$. Opäť vyrátame niekoľko prvých hodnôt: $D_1 = a+b, D_2 = a^2 + ab + b^2, D_3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3, \dots$

Matematickou indukciou sa budeme snažiť dokázať, že $D_n = a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$. Indukčný krok: $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} = (a+b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k - ab\sum\limits_{k=0}^{n-2} a^{n-2-k}b^k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-2} a^{n-1-k}b^k + 1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k + b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$.

Úloha 10*:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix} =$$

$\underline{\underline{(n+1)(n-1)^{n-1}}}$ V kroku (1) sme od prvého riadku odpočítali všetky ostatné. V kroku (2) sme od ostatných riadkov odpočítali prvý riadok. Nakoniec sme dostali determinant matice, ktorá má pod diagonálou samé nuly. Tento determinant vyrátame ako súčin diagonálnych prvkov.