

Obsah

1 Úvod	3
1.1 Sylaby a literatúra	3
1.2 Základné označenia	3
2 Množiny a zobrazenia	4
2.1 Dôkazy	4
2.1.1 Základné typy dôkazov	4
2.1.2 Matematická indukcia	4
2.1.3 Drobné rady ako dokazovať	4
2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie	4
2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi	4
2.2 Množiny a zobrazenia	4
2.2.1 Množiny	4
2.2.2 Zobrazenia	5
2.2.3 Vzor a obraz množiny*	6
2.3 Permutácie	6
3 Grupy a polia	7
3.1 Binárne operácie	7
3.1.1 Zovšeobecnený asociatívny zákon*	8
3.2 Grupy	8
3.3 Polia	8
4 Vektorové priestory	11
4.1 Vektorový priestor	11
4.2 Podpriestory	11
4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť	12
4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal	12
4.3.2 Lineárna nezávislosť	13
4.4 Báza a dimenzia	13
4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov	14
5 Lineárne zobrazenia a matice	15
5.1 Matice	15
5.2 Riadková ekvivalencia a hodnosť matice	16
5.3 Lineárne zobrazenia	17
5.4 Súčin matic	17
5.5 Inverzná matica	18

5.6	Elementárne riadkové operácie a súčin matíc	19
5.7	Sústavy lineárnych rovníc	19
5.7.1	Homogénne sústavy lineárnych rovníc	20
5.7.2	Gaussova eliminačná metóda	20
5.7.3	Frobeniova veta	20
5.8	Jadro a obraz lineárneho zobrazenia	20
5.9	Hodnosť transponovanej matice	21
5.10	Násobenie blokových matíc*	21
6	Determinanty	22
6.1	Motivácia	22
6.2	Definícia determinantu	22
6.3	Výpočet determinantov	22
6.3.1	Laplaceov rozvoj	22
6.3.2	Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií	22
6.4	Determinant súčinu matíc	23
6.5	Využitie determinantov	23
6.5.1	Výpočet inverznej matice	23
6.5.2	Cramerovo pravidlo	23
A	Delenie so zvyškom	24
B	Komplexné čísla	25
B.1	Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla	25
B.2	Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta	25
B.3	Riešenie rovníc v komplexných číslach	26
B.3.1	Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi	26
B.3.2	Binomické rovnice	26
B.4	Zopár ďalších vecí súvisiacich s komplexnými číslami	26

Kapitola 1

Úvod

1.1 Sylaby a literatúra

1.2 Základné označenia

Kapitola 2

Množiny a zobrazenia

2.1 Dôkazy

2.1.1 Základné typy dôkazov

Tvrdenie 2.1.1. *Nech n je celé číslo. Potom zvyšok čísla n^2 po delení 4 je 0 alebo 1. Pritom ak n je párne, tak n^2 je deliteľné 4 a ak n je nepárne tak n^2 má zvyšok 1.*

Tvrdenie 2.1.2. *Ak pre celé čísla a, b, c platí rovnosť $a^2 + b^2 = c^2$, tak aspoň jedno z čísel a, b je párne.*

Tvrdenie 2.1.3. *Nech n je prirodzené číslo. Ak n^2 je deliteľné štyrmi, tak n je párne.*

2.1.2 Matematická indukcia

2.1.3 Drobné rady ako dokazovať

2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie

Definícia 2.1.4. *Negáciou výroku P rozumieme výrok „neplatí P “. Označujeme ju $\neg P$.*

Pre dva výroky P a Q nazývame ich konjunkciou výrok „ P a Q “, označujeme $P \wedge Q$.

Disjunkcia je výrok „ P alebo Q “, označujeme $P \vee Q$.

Pod implikáciou rozumieme výrok „ak platí P , tak platí Q “, označujeme $P \Rightarrow Q$.

Ekvivalencia výrokov P a Q je výrok „ P platí práve vtedy, keď platí Q “, označujeme $P \Leftrightarrow Q$.

2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi

2.2 Množiny a zobrazenia

2.2.1 Množiny

Definícia 2.2.1. *Vzťah byť prvok množiny zapisujeme ako $x \in A$, čítame „ x patrí A .“*

Hovoríme, že množiny A a B sa rovnajú (označujeme $A = B$), ak platí

$$(x \in A) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in B)$$

pre ľubovoľný prvok x .

Množiny, ktorá nemá nijaké prvky nazývame prázdna množina a označujeme \emptyset .

Definícia 2.2.2. Hovoríme, že A je *podmnožinou* B , ak každý prvok množiny A patrí aj do B , označujeme $A \subseteq B$. Inak povedané, $A \subseteq B$ ak pre každé x platí

$$(x \in A) \quad \Rightarrow \quad (x \in B).$$

Vzťah množín A a B , pre ktoré platí $A \subseteq B$ sa tiež zvykne nazývať *inklúzia*.

Definícia 2.2.3. *Zjednotenie* dvoch množín A a B je množina

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}.$$

Prienik dvoch množín A a B je množina

$$A \cap B = \{x \in A; x \in B\}.$$

Rozdiel dvoch množín A a B je množina

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$$

Definícia 2.2.4. Ak A, B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

2.2.2 Zobrazenia

Definícia 2.2.5. *Zobrazenie* $f: X \rightarrow Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.

Množinu X budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia f a množina Y je *obor hodnôt* zobrazenia f .

Namiesto zápisu $(x, y) \in f$ budeme používať zápis $y = f(x)$.

Definícia 2.2.6. Hovoríme, že dve zobrazenia $f: X \rightarrow Y$ a $g: Z \rightarrow W$ sa *rovnajú*, ak $X = Z$, $Y = W$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in X$. (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme $f = g$.

Definícia 2.2.7 (Skladanie zobrazení). Ak $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení* f a g nazývame zobrazenie $g \circ f: X \rightarrow Z$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Tvrdenie 2.2.8 (Asociatívnosť skladania zobrazení). *Nech* $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ sú zobrazenia, potom

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Definícia 2.2.9. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je *injektívne (prosté) zobrazenie* (alebo tiež *injekcia*), ak pre všetky $x, y \in X$ také, že $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$.

Hovoríme, že f je *surjekcia (surjektívne zobrazenie, zobrazenie na)*, ak pre každé $y \in Y$ existuje také, $x \in X$, že $f(x) = y$.

Hovoríme, že f je *bijekcia (bijektívne zobrazenie)*, ak f je súčasne injekcia aj surjekcia.

Tvrdenie 2.2.10. Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.

Definícia 2.2.11. Zobrazenie $id_X: X \rightarrow X$ také, že $id_X(x) = x$ pre každé $x \in X$ sa nazýva *identické zobrazenie (identita)*.

Definícia 2.2.12. Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ sú zobrazenia. Ak platí

$$g \circ f = id_X$$

$$f \circ g = id_Y$$

tak hovoríme, že zobrazenie g je *inverzné zobrazenie k f* . Inverzné zobrazenie k zobrazeniu f označujeme f^{-1} .

Tvrdenie 2.2.13. Inverzné zobrazenie k f existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Tvrdenie 2.2.14. Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú bijekcie. Potom

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Dôsledok 2.2.15. Ak f je bijekcia, tak aj f^{-1} je bijekcia.

2.2.3 Vzor a obraz množiny*

Definícia 2.2.16. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Množinu

$$f[A] = \{f(a); a \in A\}$$

nazývame *obrazom* množiny A v zobrazení f . Množinu

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

nazývame *vzorom* množiny B v zobrazení f .

2.3 Permutácie

Definícia 2.3.1. Ak M je konečná množina, tak bijekciu $\varphi: M \rightarrow M$ budeme nazývať *permutáciou množiny M* .

Kapitola 3

Grupy a polia

3.1 Binárne operácie

Definícia 3.1.1. Binárna operácia $*$ na množine A je zobrazenie z množiny $A \times A$ do A .

Namiesto $*(a, b)$ budeme používať označenie $a * b$, tento zápis budeme niekedy skracovať ako ab .

Definícia 3.1.2. Nech $*$ je binárna operácia na množine M . Hovoríme, že $e \in M$ je *ľavý neutrálny prvok* operácie $*$, ak pre všetky $m \in M$ platí

$$e * m = m.$$

Podobne, e je *pravý neutrálny prvok*, ak

$$m * e = m$$

pre každé $m \in M$.

Ak e je súčasne ľavý aj pravý neutrálny prvok operácie $*$, hovoríme, že e je *neutrálny prvok*.

Tvrdenie 3.1.3. Nech $*$ je binárna operácia na množine M . Ak e_1 je jej ľavý neutrálny a e_2 je jej pravý neutrálny prvok, tak $e_1 = e_2$.

Špeciálne, ak má binárna operácia $$ na množine M neutrálny prvok, tak tento neutrálny prvok je jediný.*

Definícia 3.1.4. Binárna operácia $*$ na množine M je *komutatívna*, ak pre všetky $x, y \in M$ platí

$$x * y = y * x.$$

Definícia 3.1.5. Binárna operácia $*$ na množine M je *asociatívna*, ak pre všetky $x, y, z \in M$ platí

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Definícia 3.1.6. Nech $*$ je binárna operácia na množine M . Nech $a \in M$ a nech e je neutrálny prvok operácie $*$. Prvok $b \in M$ je *inverzný* k prvku a , ak platí

$$a * b = b * a = e.$$

V prípade, že platí $a * b = e$, b nazývame *pravý inverzný prvok* k a . Ak $b * a = e$, tak b je *ľavý inverzný prvok* k a .

Tvrdenie 3.1.7. Nech $*$ je asociatívna operácia na množine M a $*$ má neutrálny prvok e . Ak existuje inverzný prvok k a , tak je jednoznačne určený.

3.1.1 Zovšeobecnený asociatívny zákon*

Tvrdenie 3.1.8 (Zovšeobecnený asociatívny zákon). *Nech \cdot je asociatívna binárna operácia na množine A . Potom súčin $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ nezávisí od spôsobu uzátvorkovania.*

3.2 Grupy

Definícia 3.2.1. Dvojica $(G, *)$, kde G je množina a $*$ je binárna operácia na G , sa nazýva *grupa*, ak

- (i) operácia $*$ je asociatívna,
- (ii) operácia $*$ má neutrálny prvok, (neutrálny prvok budeme spravidla označovať e)
- (iii) ku každému prvku $g \in G$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $*$. (Tento inverzný prvok budeme označovať g^{-1} .)

Definícia 3.2.2. Grupa $(G, *)$ sa nazýva *komutatívna*, ak operácia $*$ na G je komutatívna. (Tiež sa používa termín *abelovská grupa*.)

Veta 3.2.3 (Zákony o krátení). *Ak $(G, *)$ je grupa, tak pre ľubovoľné $a, b, c \in G$ platí*

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\Rightarrow b = c \\ b * a = c * a &\Rightarrow b = c \end{aligned}$$

Veta 3.2.4. *Nech $(G, *)$ je grupa. Potom pre ľubovoľné $a, b \in G$ platí*

$$\begin{aligned} (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

3.3 Polia

Definícia 3.3.1. Nech F je množina, $+$ a \cdot sú binárne operácie na F . Hovoríme, že trojica $(F, +, \cdot)$ je *pole*, ak

- (i) $(F, +)$ je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať 0 ;
- (ii) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať 1 ;
- (iii) pre ľubovoľné $a, b, c \in F$ platí

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac, \\ (a + b)c &= ac + bc. \end{aligned}$$

(Túto vlastnosť nazývame *distributívnosť*.)

Pre inverzný prvok v grupe $(F, +)$ budeme používať označenie $-a$, t.j. pre túto grupu používame aditívny zápis. Prvok $-a$ nazývame *opačný prvok* k prvku a .

Pre grupu $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ budeme používať multiplikatívny zápis, teda inverzný prvok k prvku $a \neq 0$ poľa F vzhľadom na operáciu \cdot budeme značiť a^{-1} . Ak použijeme termín *inverzný prvok* v súvislosti s poľom a nešpecifikujeme binárnu operáciu, myslí sa tým práve prvok a^{-1} .

Namiesto $b + (-c)$ budeme používať stručnejší zápis $b - c$.

Definícia 3.3.2. Pole je množina F , na ktorej sú definované 2 binárne operácie $+$ a \cdot spĺňajúce:

- (i) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a + (b + c) = (a + b) + c$,
- (ii) pre všetky $a, b \in F$ platí $a + b = b + a$,
- (iii) existuje prvok $0 \in F$ taký, že pre každé $a \in F$ sa $a + 0 = a$,
- (iv) ku každému $a \in F$ existuje $b \in F$ tak, že $a + b = 0$,
- (v) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a.(b.c) = (a.b).c$,
- (vi) pre všetky $a, b \in F$ platí $a.b = b.a$,
- (vii) existuje prvok $1 \in F$ taký, že $1 \neq 0$ a pre každé $a \in F$ sa $a.1 = a$,
- (viii) ku každému $a \in F$, $a \neq 0$ existuje $b \in F$ tak, že $a.b = 1$,
- (ix) pre všetky $a, b, c \in F$ sa $a.(b + c) = a.b + a.c$.

Tvrdenie 3.3.3. *Nech $(F, +, \cdot)$ je pole. Potom pre $a, b, c \in F$ platí*

- (i) $a.0 = 0$, $0.a = 0$,
- (ii) $a.b = b.a$,
- (iii) $1.a = a.1 = a$,
- (iv) $(-a).b = -a.b$,
- (v) $(-a).(-b) = a.b$,
- (vi) $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$,
- (vii) $a.b = a.c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$,
- (viii) $a.a = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$.

Definícia 3.3.4. Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Množinu \mathbb{Z}_n definujeme ako $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$. (Teda množina \mathbb{Z}_n obsahuje všetky možné zvyšky po delení číslom n .)

Na množine \mathbb{Z}_n zavedieme operácie \oplus a \odot predpisom

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (a + b) \bmod n, \\ a \odot b &= (ab) \bmod n, \end{aligned}$$

kde operácia \bmod označuje zvyšok po delení číslom n (pozri dodatok A).

Definícia 3.3.5. Číslo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, nazývame *zloženým číslom*, ak $n = m.k$ pre nejaké $m, k \in \mathbb{N}$ také, že $1 < m, k < n$.

Ak $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, nie je zložené, tak ho nazývame *prvočíslo*.

Číslo 1 nepovažujeme ani za prvočíslo ani za zložené číslo.

Veta 3.3.6. *Ak p je prvočíslo, tak $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ je pole.*

Definícia 3.3.7. Ak n je celé číslo a a, b sú prvky poľa F , tak definujeme $n \times a$ takto:

$$0 \times a = 0,$$

$$(n + 1) \times a = n \times a + a \text{ (zatiaľ sme to indukciou definovali pre prirodzené čísla),}$$

Ak $n > 0$ tak definujeme $(-n) \times a = -(n \times a)$ (tým sme rozšírili definíciu aj na záporné čísla).

Podobne definujeme pre $a \neq 0$:

$$a^0 = 1,$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} \text{ (} n > 0 \text{)}.$$

Kapitola 4

Vektorové priestory

4.1 Vektorový priestor

Definícia 4.1.1. Nech F je pole a $V \neq \emptyset$ je množina. Nech $+$ je binárna operácia na V a každej dvojici $c \in F$, $\vec{\alpha} \in V$ je priradený prvok $c.\vec{\alpha} \in V$, pričom platí pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$:

(i) $(V, +)$ je komutatívna grupa,

(ii) $c.(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c.\vec{\alpha} + c.\vec{\beta}$,

(iii) $(c + d).\vec{\alpha} = c.\vec{\alpha} + d.\vec{\alpha}$,

(iv) $(c.d).\vec{\alpha} = c.(d.\vec{\alpha})$,

(v) $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad poľom F .

Veta 4.1.2. Nech V je vektorový priestor nad poľom F , $c \in F$ a $\vec{\alpha} \in V$.

(a) $0.\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(b) $c.\vec{0} = \vec{0}$,

(c) $c.\vec{\alpha} = \vec{0}$ práve vtedy, keď $c = 0$ alebo $\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(d) $(-c).\vec{\alpha} = -c.\vec{\alpha}$.

4.2 Podpriestory

Definícia 4.2.1. Ak V je vektorový priestor nad poľom F , $S \neq \emptyset$ a $S \subseteq V$, tak S nazveme *podpriestorom* (alebo tiež *vektorovým podpriestorom*) priestoru V , ak

(i) pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$,

(ii) pre ľubovoľné $\vec{\alpha} \in S$ a $c \in F$ platí $c.\vec{\alpha} \in S$.

Tvrdenie 4.2.2 (Kritérium vektorového podpriestoru). *Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Potom S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí*

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \quad \Rightarrow \quad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \quad (4.1)$$

Veta 4.2.3. *Ak S a T sú podpriestory vektorového priestoru V , tak aj $S \cap T$ je podpriestor V .*

Dôsledok 4.2.4. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak S_1, S_2, \dots, S_n sú podpriestory priestoru V , tak aj $\bigcap_{i=1}^n S_i$ je podpriestor priestoru V .*

Veta 4.2.5. *Nech $I \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina a S_i je podpriestor priestoru V pre každé $i \in I$. Potom aj $\bigcap_{i \in I} S_i$ je podpriestor priestoru V .*

4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť

4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal

Definícia 4.3.1. *Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Hovoríme, že vektor $\vec{\alpha}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$, ak existujú skaláry $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ také, že*

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Skaláry c_1, c_2, \dots, c_n nazývame *koeficienty lineárnej kombinácie*.

Tvrdenie 4.3.2. *Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, tak množina*

$$M = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n; n \in \mathbb{N}, c_i \in F, \vec{\alpha}_i \in V \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\}$$

je podpriestor vektorového priestoru V .

Tento podpriestor nazývame lineárny obal vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ alebo podpriestor generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$. Označujeme ho

$$M =: [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n].$$

Ak platí $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ generujú vektorový priestor V .

Lema 4.3.3. *Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F , aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia $c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$ patrí do podpriestoru S .*

Veta 4.3.4. *Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F , tak $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$.*

Veta 4.3.5. *Nech $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, $\vec{\beta} \in V$, kde V je vektorový priestor nad poľom F . Potom $\vec{\beta}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ práve vtedy, keď*

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

4.3.2 Lineárna nezávislosť

Definícia 4.3.6. Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé*, ak existujú $c_1, \dots, c_n \in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí

$$c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

(Stručne: $\vec{0}$ je nenulovou lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$.)

V opačnom prípade hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ *lineárne nezávislé*.

Veta 4.3.7. Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Nech n je prirodzené číslo, $n \geq 2$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných*.

Veta 4.3.8. Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú vektory také, že $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich*.

Veta 4.3.9. Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú *lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich*.

Veta 4.3.10 (Steinitzova veta o výmene). Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Ak $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ (vektorový priestor V je generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$) a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú *lineárne nezávislé vektory, tak*

- (i) $s \leq n$,
- (ii) z vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa dá vybrať $n - s$ vektorov, ktoré spolu s vektormi $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s$ generujú V .

4.4 Báza a dimenzia

Definícia 4.4.1. Nech V je vektorový priestor. Hovoríme, že V je *konečnorozmerný* ak existuje taká konečná množina vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$, že platí $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$.

Definícia 4.4.2. Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Množinu vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ nazývame *bázou* priestoru V , ak

- (i) vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne nezávislé*,
- (ii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

(Stručne: Báza je taká množina lineárne nezávislých vektorov, ktorá generuje celý priestor.)

Veta 4.4.3. *Ľubovoľné dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V majú rovnaký počet prvkov.*

Veta 4.4.4. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Ak $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú *lineárne nezávislé, tak sa dajú doplniť na bázu priestoru V .*

Dôsledok 4.4.5. *Každý konečnorozmerný vektorový priestor $V \neq \{\vec{0}\}$ má bázu.*

Definícia 4.4.6. *Dimenziou* konečnorozmerného vektorového priestoru V nazývame počet prvkov ľubovoľnej jeho bázy. (Pre nulový priestor dodefínujeme $d(\{\vec{0}\}) = 0$.) Toto číslo označujeme $d(V)$.

Dôsledok 4.4.7. Ak V je konečnorozmerný vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vo V , tak $n \leq d(V)$.

Veta 4.4.8. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor a $d(V) = n$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ je báza priestoru V ,
- (ii) vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé,
- (iii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

Veta 4.4.9. Nech V je vektorový priestor. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu priestoru V právetedy, keď každý vektor $\vec{\beta}$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Veta 4.4.10. Ľubovoľný podpriestor S konečnorozmerného priestoru V je konečnorozmerný. Navyše, $d(S) \leq d(V)$.

Tvrdenie 4.4.11. Ak S je podpriestor konečnorozmerného vektorového priestoru V a $d(S) = d(V)$, tak $S = V$.

4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov

Veta 4.5.1. Nech S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F . Potom

$$S + T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\alpha} \in S, \vec{\beta} \in T\}$$

je podpriestorom vektorového priestoru V .

Definícia 4.5.2. Ak S, T sú podpriestory vektorového podpriestoru V , tak vektorový podpriestor $S + T$ sa nazýva *lineárny súčet* podpriestorov S a T .

Veta 4.5.3. Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F . Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$, $T = [\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$. Potom $S + T = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$.

Veta 4.5.4. Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V . Potom¹

$$d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T).$$

Definícia 4.5.5. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F a nech $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Potom podpriestor $S + T$ nazývame *direktný (priamy) súčet* podpriestorov S a T a označujeme ho $S \oplus T$.

Veta 4.5.6. Nech S, T, P sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru V nad poľom F . Tieto podmienky sú potom ekvivalentné:

- (i) $P = S \oplus T$
- (ii) $P = S + T$ a $d(P) = d(S) + d(T)$
- (iii) Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza podpriestoru S a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru T , tak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru P .
- (iv) $P = S + T$ a každý vektor $\vec{\gamma} \in P$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, kde $\vec{\alpha} \in S$ a $\vec{\beta} \in T$. (T.j. ak $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2$, pričom $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in S$ a $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in T$, tak $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$ a $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2$.)

¹Tento vzorec pripomína vzorec pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.

Kapitola 5

Lineárne zobrazenia a matice

5.1 Matice

Definícia 5.1.1. *Maticou* typu $m \times n$ nad poľom F nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa F , ktorá má m riadkov a n stĺpcov.

Definícia 5.1.2. Nech A, B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F a $c \in F$.

(a) Súčet matíc $A = \|a_{ij}\|$ a $B = \|b_{ij}\|$ je matica $A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|$.

(b) Matica $c.A = \|ca_{ij}\|$ sa nazýva c -násobok matice A .

(Teda sčítovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

Veta 5.1.3. *Matice typu $m \times n$ nad poľom F s takto definovaným sčítovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom F .*

Definícia 5.1.4. Maticu typu $n \times n$ (teda takú, ktorá má rovnaký počet riadkov a stĺpcov) nazývame *štvorcová matica*.

Maticu

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

typu $n \times n$, ktorá má na diagonále jednotky a mimo diagonály nuly, nazývame *jednotková matica*.

Štvorcová matica, ktorá má mimo diagonály iba nuly (t.j. $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$) sa nazýva *diagonálna matica*. (Príkladom diagonálnej matice je jednotková matica.)

Definícia 5.1.5. *Transponovaná matica* k matici A typu $m \times n$ je matica A^T typu $n \times m$ určená ako

$$A^T = \|a_{ji}\|.$$

Štvorcová matica A sa nazýva *symetrická*, ak $A = A^T$ a *antisymetrická*, ak $A = -A^T$.

5.2 Riadková ekvivalencia a hodnosť matice

Definícia 5.2.1. *Podpriestorom prislúchajúcim matici A typu $m \times n$ nad poľom F nazývame podpriestor priestoru F^n generovaný riadkami matice A . Označujeme ho V_A .*

Definícia 5.2.2. *Elementárne riadkové operácie na matici A nad poľom F sú:*

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F ,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice A a B sú *riadkovo ekvivalentné* ak maticu B možno z A dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice A a B sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako $A \sim B$.

Veta 5.2.3. *Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)*

Definícia 5.2.4. *Matica A je redukovaná trojuholníková matica, ak:*

- (i) Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- (ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- (iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami. (Presnejšie povedané: Akýkoľvek nulový riadok musí byť nižšie ako akýkoľvek nenulový riadok.)
- (iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov nad ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov pod ním (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

Veta 5.2.5. *Každá matica nad poľom F je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Veta 5.2.6. *Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.*

Definícia 5.2.7. *Hodnosť matice A je dimenzia podpriestoru V_A prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju $h(A)$.*

Lema 5.2.8. *Nech A je redukovaná trojuholníková matica typu $m \times n$ nad poľom F . Označme jej nenulové riadky $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ a ako i_1, \dots, i_k označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom $\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_n) \in V_A$ práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = c_{i_1} \vec{\alpha}_1 + c_{i_2} \vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k} \vec{\alpha}_k$.*

Veta 5.2.9. *Ak A a B sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu $m \times n$ nad poľom F a $V_A = V_B$, tak $A = B$.*

Dôsledok 5.2.10. *Nech A a B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F . Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:*

- (i) A a B sú riadkovo ekvivalentné,
- (ii) $V_A = V_B$,
- (iii) A a B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.

5.3 Lineárne zobrazenia

Definícia 5.3.1. Ak V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie z V do W , tak hovoríme, že f je *lineárne zobrazenie*, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí

$$(i) f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}),$$

$$(ii) f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha}).$$

Veta 5.3.2. Nech V, W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(a) zobrazenie f je lineárne,

(b) $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$ pre ľubovoľné $c, d \in F$ a ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$,

(c) $f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_nf(\vec{\alpha}_n)$ pre ľubovoľné $c_1, \dots, c_n \in F, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$.

Tvrdenie 5.3.3. Ak f je lineárne zobrazenie, tak $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Veta 5.3.4. Nech V, W sú vektorové priestory. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Definícia 5.3.5. Nech F je pole. Matica lineárneho zobrazenia $f: F^m \rightarrow F^n$ je matica typu $m \times n$ ktorej k -ty riadok je vektor $f(\vec{e}_k)$.

Veta 5.3.6. Nech U, V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom F . Ak $f: U \rightarrow V$ a $g: V \rightarrow W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je lineárne zobrazenie.

5.4 Súčin matíc

Definícia 5.4.1. Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times k$ nad poľom F , tak maticu $C = \|c_{ij}\|$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, k$, nazývame *súčin matíc* A a B . Označujeme ju $A.B$.

Veta 5.4.2. Nech F je pole, $f: F^m \rightarrow F^n$ a $g: F^n \rightarrow F^k$ sú lineárne zobrazenia. Potom platí

$$A_{g \circ f} = A_f.A_g$$

Dôsledok 5.4.3. Násobenie matíc je asociatívne, teda

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.

Veta 5.4.4. *Nech matice A, B, C nad poľom F sú majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.*

$$\begin{aligned} I_m A &= A = A I_n \\ A(B + C) &= AB + AC \\ (B + C)D &= BD + CD \end{aligned}$$

5.5 Inverzná matica

Veta 5.5.1. *Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie $f^{-1}: W \rightarrow V$, tak f^{-1} je lineárne zobrazenie.*

Lema 5.5.2. *Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V .*

- (i) *Zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.*
- (ii) *Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú celý priestor W).*

Veta 5.5.3. *Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V . Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ tvoria bázu vektorového priestoru W .*

Dôsledok 5.5.4. *Nech $f: F^n \rightarrow F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (i) *f je bijekcia,*
- (ii) *f je prosté,*
- (iii) *f je surjektívne.*

Dôsledok 5.5.5. *Nech $f: F^n \rightarrow F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (a) *zobrazenie f je bijekcia,*
- (b) *existuje inverzné zobrazenie f^{-1} ,*
- (c) *$h(A_f) = n$.*

Definícia 5.5.6. *Nech A je matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica B je inverzná k matici A , ak platí*

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju $B =: A^{-1}$.

Definícia 5.5.7. *Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva regulárna, ak $h(A) = n$.*

Veta 5.5.8. *Nech A je matica typu $n \times n$. K matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď A je regulárna.*

Definícia 5.5.9. *Bijektívne lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ nazývame izomorfizmus vektorových priestorov V a W (alebo tiež lineárny izomorfizmus).*

Ak existuje bijektívne zobrazenie $f: V \rightarrow W$, hovoríme, že vektorové priestory V a W sú izomorfné. Fakt, že V a W sú izomorfné označujeme $V \cong W$.

Dôsledok 5.5.10. Ak V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $V \cong W$, tak $d(V) = d(W)$.

Veta 5.5.11. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $d(V) = n$. Potom V je izomorfný s priestorom F^n .

5.6 Elementárne riadkové operácie a súčin matic

Definícia 5.6.1. Pre ľubovoľnú elementárnu riadkovú operáciu na matici typu $m \times n$ nazveme *maticou elementárnej riadkovej operácie* maticu typu $m \times m$, ktorá vznikne vykonaním tejto operácie na jednotkovej matici I_m .

Tvrdenie 5.6.2. Ak matica B vznikne z matice A vykonaním nejakej elementárnej riadkovej operácie a E je matica tejto riadkovej operácie, tak $B = E.A$.

Tvrdenie 5.6.3. Ak matica B vznikne z matice A vykonaním nejakej elementárnej stĺpcovej operácie a E je matica tejto stĺpcovej operácie, tak $B = A.E$.

5.7 Sústavy lineárnych rovníc

Definícia 5.7.1. Sústavou lineárnych rovníc rozumieme systém rovníc tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde $a_{ij}, c_i \in F$ pre všetky prípustné hodnoty indexov i a j .

Riešenie sústavy lineárnych rovníc je n -tica (x_1, \dots, x_n) ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná*. Skaláry c_1, \dots, c_n nazývame *pravé strany*, a_{ij} sú *koefficienty* a x_i sú *neznáme*.

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *maticu sústavy* (5.1).

Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírenú maticu sústavy* (5.1).

Veta 5.7.2. Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.

5.7.1 Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Veta 5.7.3. *Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru F^n .*

$$\begin{aligned}x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{1,n}x_n &= 0 \\x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{2,n}x_n &= 0 \\&\dots \\x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n}x_n &= 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

Veta 5.7.4. *Vektory $\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \dots, \vec{\gamma}_n$ tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy (5.2).*

Dôsledok 5.7.5. *Nech A je matica typu $m \times n$ a S je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou A . Potom*

$$d(S) = n - h(A).$$

Dôsledok 5.7.6. *Homogénna sústava lineárnych rovníc s n neznámymi, ktorej matica má hodnotu n , má len triviálne riešenie.*

Veta 5.7.7. *Každý podpriestor priestoru F^n je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.*

5.7.2 Gaussova eliminačná metóda

5.7.3 Frobeniova veta

Veta 5.7.8. *Pre každú maticu A nad poľom F platí $h(A) = h(A^T)$.*

Veta 5.7.9 (Frobeniova). *Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (5.1) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnotu, t.j.*

$$h(A) = h(A').$$

Veta 5.7.10. *Nech $\vec{\alpha}$ je riešenie sústavy lineárnych rovníc*

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T\tag{N}$$

a S je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{0}^T.\tag{H}$$

Potom $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$ je množina všetkých riešení (N).

5.8 Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

Definícia 5.8.1. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom jadro lineárneho zobrazenia f nazývame množinu*

$$\text{Ker } f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a obrazom lineárneho zobrazenia f nazývame množinu

$$\text{Im } f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

Tvrdenie 5.8.2. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom $\text{Ker } f$ je vektorový podpriestor priestoru V a $\text{Im } f$ je vektorový podpriestor priestoru W .*

Tvrdenie 5.8.3. *Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$. Potom $\text{Im } f = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$.*

Tvrdenie 5.8.4. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.

Tvrdenie 5.8.5. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$.

Dôsledok 5.8.6. *Lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ je izomorfizmus práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$ a $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.*

Veta 5.8.7. *Nech V a W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom*

$$d(V) = d(\text{Ker } f) + d(\text{Im } f).$$

5.9 Hodnosť transponovanej matice

5.10 Násobenie blokových matíc*

Tvrdenie 5.10.1. *Nech*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nk} \end{pmatrix}$$

sú blokové matice a navyše pre ľubovoľné prípustné i, j, k majú príslušné bloky A_{ij} a B_{jk} také rozmery, že sa tieto matice dajú násobiť. Potom ich súčin $C = AB$ sa dá zapísať ako bloková matica pozostávajúca z $m \times k$ blokov

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mk} \end{pmatrix}$$

pričom

$$C_{ij} = \sum_{s=1}^n A_{is} B_{sj}$$

pre $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k$.

Kapitola 6

Determinanty

6.1 Motivácia

6.2 Definícia determinantu

Definícia 6.2.1. V tejto kapitole budeme označovať ako S_n množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dvojica $(\varphi(k), \varphi(s))$ sa volá *inverzia* permutácie φ , ak $k < s$ ale $\varphi(k) > \varphi(s)$. Počet inverzií permutácie φ budeme označovať $i(\varphi)$.

Definícia 6.2.2. Nech A je matica typu $n \times n$ nad poľom F , $A = \|a_{ij}\|$. *Determinant matice* A je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \quad (6.1)$$

Veta 6.2.3. Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = |A^T|.$$

6.3 Výpočet determinantov

6.3.1 Laplaceov rozvoj

Veta 6.3.1. Pre algebraický doplnok prvku a_{rs} štvorcovej matice A platí

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} |M_{rs}|$$

Dôsledok 6.3.2 (Laplaceov rozvoj determinantu). Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |M_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |M_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |M_{in}| \quad (6.2)$$

$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j} |M_{1j}| + (-1)^{j+2} a_{2j} |M_{2j}| + \dots + (-1)^{j+n} a_{nj} |M_{nj}| \quad (6.3)$$

6.3.2 Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta 6.3.3. Ak maticu B získame z A vynásobením k -teho riadku skalárom $c \in F$, tak

$$|B| = c|A|.$$

Dôsledok 6.3.4. Ak matica A má nulový riadok, tak $|A| = 0$.

Veta 6.3.5. Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.

Veta 6.3.6. Nech matice A a B sú matice typu $n \times n$, ktoré sa líšia len v k -tom riadku. Potom $|A| + |B| = |C|$, kde $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ pre $i \neq k$ a $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$.

Veta 6.3.7. Ak matica B vznikne z A pripočítaním c -násobku niektorého riadku k inému (pričom $c \in F$), tak $|B| = |A|$.

Veta 6.3.8. Ak matica B vznikne z A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$. (Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)

Veta 6.3.9. Ak A je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice A sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

$$|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Dôsledok 6.3.10. Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Veta 6.3.11. Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Matica A je regulárna práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

6.4 Determinant súčinu matíc

Veta 6.4.1. Nech A, B sú dve matice typu $n \times n$ nad poľom F . Potom platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

6.5 Využitie determinantov

6.5.1 Výpočet inverznej matice

Veta 6.5.1. Ak A je regulárna matica typu $n \times n$, tak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplnok prvku a_{ij} .

6.5.2 Cramerovo pravidlo

Dodatok A

Delenie so zvyškom

Dodatok B

Komplexné čísla

B.1 Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla

Definícia B.1.1. *Komplexným číslom* budeme nazývať ľubovoľné číslo tvaru

$$a + bi,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu všetkých komplexných čísel označujeme

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zápis komplexného čísla v tvare $a + bi$ nazývame *algebraický zápis* komplexného čísla. Pritom a sa nazýva *reálna časť* komplexného čísla a bi sa nazýva *imaginárna časť* komplexného čísla. Pre komplexné číslo $z = a + bi$ označujeme jeho reálnu časť $\operatorname{Re} z = a$ a imaginárnu časť $\operatorname{Im} z = bi$. (Niekedy sa tiež používa označenie $\Re z$ a $\Im z$.) Číslo, ktoré má nulovú reálnu časť, sa nazýva *rydzoimaginárne*.

Komplexné číslo je jednoznačne určené svojou reálnou a imaginárnou časťou, teda dve komplexné čísla $z_1 = a_1 + b_1i$ a $z_2 = a_2 + b_2i$ sa rovnajú práve vtedy, keď

$$a_1 = a_2 \quad \text{a} \quad b_1 = b_2.$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (\text{B.1})$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \quad (\text{B.2})$$

Veta B.1.2. *Komplexné čísla s operáciami $+$ a \cdot definovanými vzťahmi (B.1) a (B.2) tvoria pole.*

Definícia B.1.3. *Komplexne združeným číslom* k číslu $z = a + bi$ nazývame číslo $\bar{z} = a - bi$.

B.2 Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta

Definícia B.2.1. Zápis komplexného čísla v tvare

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nazývame *goniometrický zápis* komplexného čísla. Číslo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazývame *absolútna hodnota* alebo tiež *modul* komplexného čísla z a označujeme ho $|z|$. Číslo φ také, že $a = r \cos \varphi$ a $b = r \sin \varphi$ nazývame *argument* komplexného čísla z .

Veta B.2.2 (Moivrova veta). *Nech $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$. Potom pre ich súčin platí*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \quad (\text{B.3})$$

Špeciálne z toho vyplýva, že pre absolútne hodnoty platí

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (\text{B.4})$$

Dôsledok B.2.3. *Ak $n \in \mathbb{N}$ a $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, tak*

$$z^n = r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

B.3 Riešenie rovníc v komplexných číslach

Veta B.3.1 (Základná veta algebry). *Každý polynóm s komplexnými koeficientami má koreň v \mathbb{C} . T.j. ak*

$$f(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0,$$

tak existuje $z \in \mathbb{C}$ také, že $f(z) = 0$.

B.3.1 Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

B.3.2 Binomické rovnice

B.4 Zopár ďalších vecí súvisiacich s komplexnými číslami

Literatúra