Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Sylaby a literatúra

1.2 Základné označenia

Kapitola 2

Množiny a zobrazenia

2.1 Dôkazy

2.1.1 Základné typy dôkazov

2.1.2 Matematická indukcia

2.1.3 Drobné rady ako dokazovať

2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie

2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi

Úloha 2.1.1. Dokážte, že nasledujúce výroky sú tautológie:
a) $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
b) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$
c) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
d) $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$

2.2 Množiny a zobrazenia

2.2.1 Množiny

2.2.2 Zobrazenia

2.2.3 Vzor a obraz množiny*

Úloha 2.2.1. Dokážte: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?

Úloha 2.2.2. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.

Úloha 2.2.3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.

Úloha 2.2.4. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $X \neq \emptyset$ (t.j. X je neprázdna množina). Potom:
a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g \circ f = id_X$.
b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje h také, že $f \circ h = id_Y$.
c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie 2.2.16.)

Úloha 2.2.5. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $h\colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f, tak $g = h$.

Úloha 2.2.6. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N?

Úloha 2.2.7. Nech A je konečná množina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.

Úloha 2.2.8. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Y \to Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

Úloha 2.2.9. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Z \to X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

2.3 Permutácie

Úloha 2.3.1. Uvažujme o permutáciach na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Aká je inverzná permutácia ku: $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&2&5\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{smallmatrix}\right)$? Urobte aj skúšku správnosti, t.j. po vypočítaní φ^{-1} overte, či $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = id$. [$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&2&3&5\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{smallmatrix}\right)$]

Úloha 2.3.2. $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Vypočítajte: $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{smallmatrix}\right)$. Určte inverznú permutáciu k výsledku.

Úloha 2.3.3. Čomu sa rovná φ^{120}, ak $\varphi = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{smallmatrix}\right)$?

Úloha 2.3.4. Matematickou indukciou dokážte, že $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m$, $\varphi^{nm} = (\varphi^n)^m$.

Kapitola 3

Grupy a polia

3.1 Binárne operácie

3.1.1 Zovšeobecnený asociatívny zákon*

Úloha 3.1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine $\{0, 1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?

Úloha 3.1.2. Na $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definujme operácie $\oplus$ a $\odot$ podobne ako pre $\mathbb{Z}_5$ v príklade 3.1.3. (Teda ako obvyklé sčitovanie a násobenie, ibaže po urobení tejto operácie urobíme zvyšok po delení 7, čím dostaneme prvok zo $\mathbb{Z}_7$.) Zistite, či sú tieto operácie asociatívne, komutatívne, či existuje neutrálny prvok a či má každý prvok inverzný. Vedeli by ste to v prípade operácie $\oplus$ nájsť inverzný prvok aj bez toho, že by ste skúšali jednotlivé prvky?

Úloha 3.1.3. Nájdite binárnu operáciu,
a) ktorá má viacero ľavých inverzných prvkov,
b) ktorá je asociatívna a má viacero ľavých inverzných prvkov.

Úloha 3.1.4. Na $\mathbb{R}$ definujme operáciu $x * y = x + y + x^2y$. Overte, že každé $x \in \mathbb{R}$ má vzhľadom na túto binárnu operáciu jediný pravý, ale existujú reálne čísla, ktoré nemajú ľavý inverzný prvok.

Úloha 3.1.5*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

3.2 Grupy

Úloha 3.2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, d) $(\mathbb{C}, +)$, e) $(\mathbb{C}, \cdot)$, f) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

g) $(\mathbb{R}^2, +)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a * b = a + b - 1$
i) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
j) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
k) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$

Úloha 3.2.2. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

Úloha 3.2.3. Je $(\mathbb{R}, *)$, kde $a*b = ab+a+b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok a z množiny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ bola grupa?

Úloha 3.2.4. Nech G je množina všetkých funkcií $f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $f_{a,b}(x) = ax + b$ pre nejaké reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Tvorí táto množina funkcií s operáciou skladania grupu? Je množina $\{f_{a,b}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ s operáciou skladania zobrazení grupa? Dostaneme grupu, ak vezmeme len také $a, b \in \mathbb{R}$, že $a = 1$? V tých prípadoch, keď dostaneme grupu, je táto grupa komutatívna?

Úloha 3.2.5. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

Úloha 3.2.6*. Budeme uvažovať o nasledujúcich operáciach s množinami:
$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$ (zjednotenie)
$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$ (prienik)
$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$ (rozdiel)
$A \div B = \{x; x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$ (symetrická diferencia - ekvivalentne ju môžeme definovať ako $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)
Ak X je ľubovoľná množina, $P(X)$ označíme množinu všetkých jej podmnožín. Potom $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\div$ sú binárne operácie na $P(X)$. Je $P(X)$ s niektorou z týchto operácií grupa?

Úloha 3.2.7. Označme:
$M_1 = \{f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; f \text{ je bijekcia}\}$
$M_2 = \{f \in M_1; f(n) = n \text{ pre všetky celé čísla } n \text{ až na konečný počet}\}$
$M_3 = \{f \in M_1; f(n) = n \text{ len pre konečný počet } n\}$.
Ktoré z množín M_1, M_2, M_3 tvoria grupu spolu s operáciou skladania zobrazení?

Úloha 3.2.8. Nech G je množina všetkých zobrazení $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Na tejto množine definujeme operáciu $\oplus$ tak, že $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$. Je G s touto operáciou grupa? Ak definujeme $(f \odot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, bude $(G, \odot)$ grupa? Ktoré funkcie treba vynechať, aby sme dostali grupu?

Úloha 3.2.9. Nech $M \neq \emptyset$ je množina a $(G, \circ)$ je grupa. Nech H je množina všetkých zobrazení $f \colon M \to G$. Definujme na H binárnu operáciu $*$ tak, že $(f * g)(x) = f(x) \circ g(x)$. Je $(H, *)$ grupa?

Úloha 3.2.10. Na množine $\mathbb{R}^n$ (teda na množine všetkých usporiadaných n-tíc reálnych čísel) definujeme binárnu operáciu $+$ ako $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Je $\mathbb{R}^n$ s touto operáciou grupa? (Použili sme symbol $+$ v dvoch rôznych významoch – raz ako operáciu na $\mathbb{R}^n$, ktorú definujeme, a raz ako dobre známe sčitovanie na množine $\mathbb{R}$. Keby sme chceli byť dôslední, zaviedli by sme nový symbol pre operáciu na $\mathbb{R}^n$, napríklad $(x_1, \ldots, x_n) \oplus (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. K tomuto problému – používanie rovnakého symbolu v rôznych významoch – sa ešte vrátime.)

Úloha 3.2.11. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a \colon G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

Úloha 3.2.12. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f \colon G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia.

Úloha 3.2.13*. Nech G je ľubovoľná množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice

$$\begin{aligned} a \circ x &= b \\ y \circ a &= b \end{aligned}$$

riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

Úloha 3.2.14*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

Úloha 3.2.15*. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

Úloha 3.2.16. Nech $(G, *)$ je grupa a $a \in G$. Potom pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ definujeme matematickou indukciou prvok a^n nasledovne:
$a^0 = e$
$a^{n+1} = a^n * a$.
(Je to presne to, čo by sme intuitívne chápali pod zápisom $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{n\text{-krát}}$.)

Túto definíciu môžeme rozšíriť aj na záporné čísla tak, že pre $n \in \mathbb{N}$ položíme $a^{-n} = (a^{-1})^n$. Tým je a^n definované pre ľubovoľné $a \in G$ a $n \in \mathbb{Z}$. (Všimnite si, že to korešponduje s označením a^{-1}, ktoré používame pre inverzný prvok.)

Dokážte, že pre ľubovoľné $a, b \in G$ a $m, n \in \mathbb{Z}$ platí:
a) $a^{m+n} = a^m * a^n$,
b) $(a^m)^n = a^{mn}$,
c) ak $a * b = b * a$, tak $a^n * b^n = (a * b)^n$,

Úloha 3.2.17. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \ldots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$.

Úloha 3.2.18. Nech $*$ je binárna operácia na množine A, taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a * (b * c) = (a * c) * b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

Úloha 3.2.19. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

Úloha 3.2.20. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ $(a, b)\square(c, d) = (2ac, b + d)$ je grupa.

Úloha 3.2.21. Doplňte nasledujúcu tabuľku tak aby ste dostali grupu.

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

Úloha 3.2.22. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

Úloha 3.2.23. Nech $*$ je asociatívna binárna operácia na množine M, ktorá má neutrálny prvok e. Ak pre nejaké $x \in M$ platí $x * x = x$ a ku x existuje ľavý inverzný prvok, tak $x = e$.

Úloha 3.2.24*. Nech $*$ je binárna operácia na množine G, ktorá je asociatívna, má ľavý neutrálny prvok a ku každému prvku existuje ľavý inverzný prvok. Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa.

3.3 Polia

Úloha 3.3.1. Dokážte ekvivalenciu definície 3.3.1 a 3.3.3.

Úloha 3.3.2. Ktoré z uvedených množín tvoria spolu s obvyklým sčitovaním a násobením pole?
a) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$
b) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
c) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$
d) $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
e) $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
f) $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
g*) $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

Úloha 3.3.3. V poli $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte $2^{-1} \oplus 4$, $(-2) \oplus 4$, $2^{-1} \odot 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.

Úloha 3.3.4. V $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte 2^3, $(2^{-1})^4$, $2 \odot (4^{-1})^3$, $(4 \odot 2^{-1})^3$, $(-1)^5 \odot (4 \odot 3^{-1})^2$.

Úloha 3.3.5. Nech m, n sú celé čísla, a, b, $b_1, \ldots, b_n$ sú prvky poľa F. V úlohách f) až j) predpokladáme, že $a \neq 0$. Dokážte:[1]
a) $m \times a + n \times a = (m + n) \times a$
b) $m \times a + m \times b = m \times (a + b)$
c) $m \times (n \times a) = (mn) \times a$
d) $a.(n \times b) = n \times (a.b)$
e) $(m \times a)(n \times b) = (mn) \times (a.b)$
f) $m \times (m \times a)^{-1} = a^{-1}$
g) $a^m.a^n = a^{m+n}$
h) $a^m.b^m = (a.b)^m$
i) $(a^m)^n = a^{mn}$
j) $a^{2k} = (-a)^{2k}$
k) $n \times 0 = 0$
l) $1^n = 1$

Úloha 3.3.6. V ľubovoľnom poli F platí:

[1] Podúlohy by mali byť usporiadané tak, že ak v dôkaze niektorej z nich potrebujeme nejaké pomocné tvrdenie, máme ho už dokázané v niektorej z predchádzajúcich častí tejto úlohy. Ak by sa Vám zdalo, že poradie nie je správne, ozvite sa mi. Môžeme sa spolu pozrieť na to, či som sa pomýlil alebo či je dôvodom odlišného poradia to, že sa to dá dokazovať aj inak.

$$
\begin{gathered}
a+b=a+c \Rightarrow b=c \\
(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \\
-(-a)=a \\
-0=0 \\
-(a+b)=(-a)+(-b) \\
(a-b)c=ac-bc \\
1 \neq 0 \\
a.a=1 \Leftrightarrow a=1 \vee a=-1 \\
a.(b_1+\ldots+b_n)=a.b_1+\ldots+a.b_n
\end{gathered}
$$

Úloha 3.3.7. Na množine $\mathbb{R}^+$ všetkých kladných reálnych čísel zadefinujme operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, že $x \oplus y = x.y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axióm poľa spĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$?

Úloha 3.3.8. Nech F je pole a $a \in F$. Definujeme zobrazenie $f_a \colon F \to F$ tak, že $f_a(b) = a+b$. Je f_a bijekcia? Ak áno, ako vyzerá zobrazenie f_a^{-1}? Čomu sa rovná $f_a \circ f_b$?

Ďalej definujeme $g_a \colon F \to F$ pre $a \neq 0$ tak, že $g_a(b) = a.b$. Je to bijekcia?

Úloha 3.3.9. Nech na množine $M = \{0,1\}$ sú operácie $+$ a $\cdot$ dané tabuľkami

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

Ukážte, že $(M,+)$ a $(M\setminus\{0\},\cdot)$ sú komutatívne grupy a že platí distributívny zákon $(a+b)c = ac+bc$. Je $(M,+,\cdot)$ pole?

Úloha 3.3.10. Zistite, či $(\mathbb{R},+,*)$, kde $+$ je obvyklé sčitovanie reálnych čísel a pre každé $a,b \in \mathbb{R}$ $a*b = -2ab$, je pole.

Úloha 3.3.11. Na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definujeme operácie $+$ a $\cdot$ takto:
a) $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$ a $(a,b).(c,d) = (ac,bd)$,
b) $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$ a $(a,b).(c,d) = (ac-bd,ad+bc)$.
Je potom $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ pole?

Úloha 3.3.12*. Pre ktoré prvky a poľa $\mathbb{Z}_7$ má riešenie rovnica $x^2 = a$? Koľko je takých prvkov v poli $\mathbb{Z}_{109}$?

Úloha 3.3.13*. Dokážte, že:
a) V ľubovoľnom poli platí $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}\times a^{m-1}b + \binom{m}{2}\times a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + b^m$. (Súčet na pravej strane sa zvykne označovať takto: $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\times a^{m-k}b^k$.)
b) V poli $\mathbb{Z}_p$ platí: $(a\oplus b)^p = a^p \oplus b^p$.

Úloha 3.3.14*. Pomocou úlohy 3.3.13 sa dokážte matematickou indukciou vzhľadom na a, že v $\mathbb{Z}_p$ platí rovnosť $a^p = a$ (pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}_p$). (Toto je vlastne iná formulácia malej Fermatovej vety.)

Kapitola 4

Vektorové priestory

4.1 Vektorový priestor

Úloha 4.1.1. Nech $\vec{\alpha} = (1,3,6)$, $\vec{\beta} = (2,1,5)$, $\vec{\gamma} = (4,-3,3)$. Vypočítajte $7\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$, $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^3$. [(-7,24,21), (0,0,0)]

Úloha 4.1.2. Ukážte, že F je vektorový priestor nad F.

Úloha 4.1.3. Nech V je množina všetkých postupností reálnych čísel. Pre postupnosti $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ a $b = (b_n)_{n=1}^\infty$ definujeme $a + b = (a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ a $c.a = (c.a_n)_{n=1}^\infty$. Overte, že V s týmito operáciami tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 4.1.4. Nech M je neprázdna množina, F je pole. Potom množina všetkých zobrazení $f\colon M \to F$ so sčitovaním a násobením definovaným po bodoch (pozri príklad 4.1.4) tvorí vektorový priestor nad poľom F. (Ak sa Vám zdá táto úloha príliš zložitá, riešte ju iba pre $F = M = \mathbb{R}$.)

Skúste si tiež uvedomiť, že týmto spôsobom sme súčasne overili, že priestory F^n (príklad 4.1.3 a poznámka 4.1.5), F^F (príklad 4.1.4 a poznámka 4.1.5) a postupnosti prvkov z F (úloha 4.1.3) tvoria vektorové priestory. (Postupnosti môžeme chápať ako zobrazenia z $\mathbb{N}$ do F. Usporiadané n-tice môžeme chápať ako zobrazenia z $\{1,2,\dots,n\}$ do F.)

Úloha 4.1.5. Nech F je ľubovoľné pole a nech $\vec{\alpha}$ je ľubovoľný prvok. Nech $V = \{\vec{\alpha}\}$. Na V zavedieme operáciu sčitovania ako $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ a násobenie skalárom $c.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ (pre každé $c \in F$). Dokážte, že V je vektorový priestor nad poľom F.

Úloha 4.1.6. Overte, že $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po zložkách tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Z}_2$.

Úloha 4.1.7. Nech F je pole, $V = F^n$. Definujeme $(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n)$, $c(x_1,\dots,x_n) = (cx_1,\dots,cx_n)$ pre $c, x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n \in F$. Potom V je vektorový priestor nad poľom F.

Úloha 4.1.8. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$?

Úloha 4.1.9. Overte, že všetky zobrazenia $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po bodoch tvoria vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 4.1.10. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$. Je $\mathbb{C}$ vektorový priestor nad $\mathbb{Z}$?

Úloha 4.1.11. Nech V je vektorový priestor nad poľom F, $c, c_1 \dots c_k \in F$, $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Dokážte, že potom platí $c(\vec{\alpha}_1 + \dots \vec{\alpha}_n) = c\vec{\alpha}_1 + \dots + c\vec{\alpha}_n$, $(c_1 + \dots + c_k)\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha} + \dots + c_k\vec{\alpha}$. Čomu sa rovná $(c_1 + \dots + c_k)(\vec{\alpha}_1 + \dots \vec{\alpha}_n)$?

Úloha 4.1.12. Dokážte, že vo vektorovom priestore V nad poľom F pre každé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$, $c \in F$ platí:
a) $c(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = c\vec{\alpha} - c\vec{\beta}$
b) $c(-\vec{\alpha}) = -c\vec{\alpha}$
c) $(c - d)\vec{\alpha} = c\vec{\alpha} - d\vec{\alpha}$
d) $(-c)(-\vec{\alpha}) = c\vec{\alpha}$
e) $\vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$
f) $-(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})$

Úloha 4.1.13. Pre celé číslo n a vektor $\vec{\alpha}$ definujeme $n \times \vec{\alpha}$ podobným spôsobom, ako sme definovali $n \times a$ pre prvok a nejakého poľa F. Dokážte, že potom platí $n \times (c.\vec{\alpha}) = c.(n \times \vec{\alpha})$.

Úloha 4.1.14. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r.(a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

4.2 Podpriestory

Úloha 4.2.1. Podrobne dokážte dôsledok 4.2.9.

Úloha 4.2.2. Dokážte, že množina všetkých funkcií $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $a + b\cos x + c\sin x$ pre nejaké $a, b, c \in \mathbb{R}$ tvoria vektorový podpriestor priestoru všetkých reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Úloha 4.2.3. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Úloha 4.2.4. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
b) nezáporné funkcie
c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
d) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1 - x)$
e) ohraničené funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f) spojité funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
h) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
i*) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Úloha 4.2.5. Overte, či
a) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami,
b) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami stupňa najviac n,
c) množina všetkých polynómov párneho stupňa,
d) množina všetkých polynómov stupňa práve n
sú vektorové priestory. Sčitovanie a násobenie skalárom definujeme rovnako ako pre reálne funkcie.

4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť

4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal

4.3.2 Lineárna nezávislosť

Úloha 4.3.1. Dokážte, že vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, kde $n \geq 2$, sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou nasledujúcich.

Úloha 4.3.2. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory z vektorového priestoru V nad poľom $\mathbb{R}$. Potom $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$.

Úloha 4.3.3. Nech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y + 5z = 0\}$. Ukážte, že M je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^3$ a nájdite vektory, ktoré ho generujú.

Úloha 4.3.4. P_n označme množinu všetkých polynómov stupňa najviac n s reálnymi koeficientami. P_n je podpriestor vektorového priestoru všetkých zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Platí $P_n = [1, x, \dots, x^n]$?

Úloha 4.3.5. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
a) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v $\mathbb{R}^3$,
b) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v $\mathbb{R}^3$,
c) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_5^3$
d) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_7^3$.

Úloha 4.3.6. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:
a) $x + 1$, x^2, x^3,
b) 1, $x + a$, $x^2 + bx + c$ (a, b, c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
c*) 1, $\cos x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$,
d) x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$,
e) 1, $\cos x$, $\cos 2x$.

Úloha 4.3.7. Ak $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé vo vektorovom priestore V nad poľom $\mathbb{R}$, tak aj $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé. (Platilo by to aj vo vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{Z}_2$?)

Úloha 4.3.8. Množina $\{\vec{\alpha}\}$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Dva vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého (t.j. existuje $c \in F$ tak, že $c.\vec{\alpha} = \vec{\beta}$), alebo jeden z nich je $\vec{0}$.

Ak vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé, tak $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{\gamma}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Úloha 4.3.9*. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$. Dokážte, že v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

Úloha 4.3.10. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú tieto systémy vektorov lineárne závislé:
a) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}$, b) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, 0$, c) $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, d) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\gamma}, \vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Úloha 4.3.11. Nájdite 4 vektory v $\mathbb{R}^2$ tak, aby každé dva z nich boli lineárne nezávislé.

Úloha 4.3.12. Nech vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory v nejakom vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{R}$. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+\dots+n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?

4.4 Báza a dimenzia

Úloha 4.4.1. Viete povedať, na ktorom mieste predchádzajúceho dôkazu sme využili, že V je konečnorozmerný?

Úloha 4.4.2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:
a) (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3)
b) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)
c) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).

Úloha 4.4.3. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:
a) (1,2,3), (2,3,4), (0,3,1)
b) (1,0,0), (0,1,2), (2,1,3)
c) (0,1,2), (3,0,1), (1,0,2).

Úloha 4.4.4. P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n. Overte, že $d(P_n) = n+1$ a že $1, x-1, \dots (x-1)^n$ je báza tohoto priestoru.

Úloha 4.4.5. Určte dimenziu priestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1,3,2,1)$, $\vec{\beta} = (4,9,5,4)$ a $\vec{\gamma} = (3,7,4,3)$.

Úloha 4.4.6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
a) (1,1,2), (2,1,3) v $\mathbb{R}^3$,
b) x^2-1, x^2+1 v priestore polynómov stupňa najviac 3,
c) (1,2,3,0), (3,4,1,2) v $\mathbb{Z}_5^4$.

Úloha 4.4.7. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

Úloha 4.4.8. Overte, že množina $S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (\exists a, b \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = ax+b\}$ je podpriestor priestoru všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g, h]$.

Úloha 4.4.9. Zistite, či $S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^2+bx+c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite, $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.

Úloha 4.4.10. Nájdite bázu pre každý vektorový podpriestor z úlohy 4.2.3.

4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov

Úloha 4.5.1. Zistite[1] $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U \cap V$
a) v $\mathbb{R}^2$ pre $U = [(2,5)]$, $V = [(1,3)]$

[1] Túto úlohu budeme riešiť neskôr, keď sa (v časti 5.2) naučíme jednoduchý spôsob ako nájsť dimenziu a bázu daného podpriestoru $\mathbb{R}^n$. Zaradil som ju však sem, pretože súvisí s témou tejto podkapitoly.

b) v $\mathbb{R}^3$ pre $U = [(1,2,3),(-1,2,3)]$, $V = [(2,1,4),(-2,1,4)]$
c) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,0,1,0),(1,0,0,1)]$, $V = [(1,1,1,0),(1,0,1,1)]$
d) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$, $V = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,3,1; d)2,3,4,1]

Úloha 4.5.2. Nech $T = [(1,3,2),(2,1,3),(3,4,0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?

Úloha 4.5.3. Nech $S \neq T$ sú dva podpriestory vektorového priestoru F^3 nad poľom F a $d(S) = 2$, $d(T) = 2$. Dokážte, že $d(S \cap T) \geq 1$.

Úloha 4.5.4. Dokážte, že ak $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V = [\vec{e_1}] \oplus \ldots \oplus [\vec{e_k}]$.

Kapitola 5

Lineárne zobrazenia a matice

5.1 Matice

Úloha 5.1.1. Overte, že matice typu $m \times n$ nad poľom F (spolu so sčitovaním matíc a násobením matice skalárom) tvoria vektorový priestor nad F.

Úloha 5.1.2. Dokážte, že diagonálne matice tvoria podpriestor vektorového priestoru všetkých matíc typu $n \times n$.

Úloha 5.1.3. Nech matice A a B sú rovnakého typu. Dokážte, že potom $(A+B)^T = A^T + B^T$ a $(A^T)^T = A$. Čomu sa rovná $(c_1A + c_2B)^T$?

Úloha 5.1.4. Dokážte, že
a) množina všetkých symetrických matíc typu $n \times n$ a
b) množina všetkých antisymetrických matíc typu $n \times n$
tvoria podpriestory vektorového priestoru všetkých matíc typu $n \times n$. Je vektorový priestor matíc typu $n \times n$ direktný súčet týchto podpriestorov?

Úloha 5.1.5. Dokážte, že každá štvorcová matica sa dá napísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice. Je vektorový priestor všetkých matíc typu $n \times n$ direktným súčtom priestorov z úlohy 5.1.4.

5.2 Riadková ekvivalencia a hodnosť matice

Úloha 5.2.1. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad poľom $\mathbb{R}$ b) nad poľom $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 5.2.2. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$:
a) (1,2,0,0), (3,4,0,1)
b) (1,2,3,4), (1,1,1,1), (3,2,1,0)
c) (2,3,4,1), (3,2,4,1), (0,2,3,2)
d) (1,3,1,4,), (3,10,4,3), (2,3,1,1)

Úloha 5.2.3. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom $\mathbb{R}$:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Úloha 5.2.4. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru [(1,4,1,0),(2,3,-2,-3),(0,2,-5,-6)] priestoru $\mathbb{R}^4$: a) (4,11,-3,-3), b)(1,0,11,12), c) (3,0,4,1), d) (1,-1,2,-2).

Úloha 5.2.5. Zistite, či $[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] \subseteq [\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3]$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nad poľom $\mathbb{R}$, ak $\vec{\gamma}_1 = (1,1,5,1)$, $\vec{\gamma}_2 = (1,0,2,1)$, $\vec{\gamma}_3 = (2,1,0,1)$, $\vec{\beta}_1 = (1,1,5,1)$ a $\vec{\beta}_2 = (-1,1,6,-2)$.

Úloha 5.2.6. Zistite hodnosti matíc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 5.2.7. Upravte danú maticu nad poľom $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnosť matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 25 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 1 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Úloha 5.2.8. Určte hodnosť danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

Úloha 5.2.9. Zistite, či priestor [(2,4,4,2,4),(3,1,1,2,2),(4,3,3,2,0)] je podpriestor priestoru [(1,1,0,1,4),(2,1,3,3,1),(3,2,1,1,3)] a) nad $\mathbb{Q}$, b) nad $\mathbb{Z}_5$, c) nad $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 5.2.10. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 5.2.11. Nájdite bázu daného podpriestoru a určite jeho dimenziu:
a) $[(1,1,0,-1),(0,1,2,1),(1,0,1,-1),(1,1,-6,-3),(-1,-5,1,0)]$ v $\mathbb{R}^4$;
b) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,-2,1,0)]$ v $\mathbb{R}^5$
c) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_5^5$
d) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_7^5$.

Úloha 5.2.12. Zistite, pre aké hodnoty parametra c sú dané vektory lineárne závislé
a) $(-1,0,-1)$, $(2,1,2)$, $(1,1,c)$ v $\mathbb{R}^3$;
b) $(1,1,3)$, $(2,1,2)$, $(c,0,-c)$ v $\mathbb{R}^3$;
c) $(2,0,-1)$, $(3,2,0)$, $(1,-2,c)$ v $\mathbb{R}^3$.

Úloha 5.2.13*. Určite hodnosť matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$).

5.3 Lineárne zobrazenia

Úloha 5.3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:
a) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$,
b) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$,
c) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$.

Úloha 5.3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$

Úloha 5.3.3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, že:
a) $f(1,2,3,1) = (1,3,1,0)$, $f(2,1,3,0) = (0,1,3,1)$, $f(3,2,1,0) = (1,0,3,0)$, $f(2,2,3,4) = (3,1,0,4)$
b) $f(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$, $f(2,1,3,1) = (1,0,3,1)$, $f(0,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
c) $f(0,1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(1,0,1,1) = (0,1,0,0)$, $f(1,1,0,1) = (0,0,1,0)$, $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$

Úloha 5.3.4. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F. Dokážte, že zobrazenie $f\colon V \to W$ je lineárne práve vtedy, keď pre každé $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a pre každé $c, d \in F$ platí $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$.

Úloha 5.3.5. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.

Úloha 5.3.6. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F. Dokážte:
Ak S je podpriestor vektorového priestoru V, tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W.
Ak T je podpriestor vektorového priestoru W, tak $f^{-1}(T) = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V.

5.4 Súčin matíc

Úloha 5.4.1. Dokážte:
a) $(AB)^T = B^T A^T$
b) Ak A je symetrická matica, tak aj A^n pre každé $n \in N$ je symetrická matica.

Úloha 5.4.2. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A+B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 5.4.3. Vyrátajte $E.A$ a $A.E$ pre $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a a) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ b) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ c) $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ d) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu $E.A$ resp. $A.E$? (Viac sa o súvise násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových operácií môžete dozvedieť v podkapitole 5.6).

Úloha 5.4.4. Pre štvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\operatorname{Tr}(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{nn}$ nazývať *stopa matice C*.

Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad poľom F, tak platia rovnosti $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A)^T$ a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(CBA)$ a $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?

Úloha 5.4.5. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $V_C \subseteq V_A$? Musí platiť $V_C \subseteq V_B$? Musí platiť $V_A \subseteq V_C$, $V_B \subseteq V_C$? (Svoje tvrdenie zdôvodnite, t.j. dokážte, alebo nájdite kontrapríklad.)

Úloha 5.4.6. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

Úloha 5.4.7. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

5.5 Inverzná matica

Úloha 5.5.1. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad R:
$\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 4&3&3\\ 1&2&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&3&1\\ 2&4&3\\ 3&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&0&1\\ 0&3&2\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1\\ 2&-1&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&2&1\\ 4&2&1\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&\sqrt{2}&\sqrt{6}\\ 0&1&\sqrt{3}\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\\ -1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&5&-9\\ 1&1&-2\\ -2&-3&6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\ -\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1&1&0\\ \frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\ 1&-1&-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&-\sqrt{2}&0\\ 0&1&-\sqrt{3}\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$

Úloha 5.5.2. Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.

Úloha 5.5.3. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú.

Úloha 5.5.4*. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1}.
$A = \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1&2&1\\ 0&1&-1\\ 0&-1&2 \end{pmatrix}$
Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

5.6 Elementárne riadkové operácie a súčin matíc

5.7 Sústavy lineárnych rovníc

5.7.1 Homogénne sústavy lineárnych rovníc

5.7.2 Gaussova eliminačná metóda

5.7.3 Frobeniova veta

Úloha 5.7.1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & =1 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & =-3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & =1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x_1+x_2 & =1 \\ x_1+x_2+x_3 & =4 \\ x_2+x_3+x_4 & =-3 \\ x_3+x_4+x_5 & =2 \\ x_4+x_5 & =-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +x_4 & =3 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +5x_4 & =-3 \\ x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & =-3 \\ x_1 & -x_2 & -4x_3 & +9x_4 & =22 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +5x_4 & =3 \\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & =1 \\ 5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +5x_4 & =12 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} 2x & -5y & +3z & +t & =5 \\ 3x & -7y & +3z & -t & =-1 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & =7 \\ 4x & -6y & +3z & +t & =8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} x & +2y & +4z & -3t & =0 \\ 3x & +5y & +6z & -4t & =0 \\ 4x & +5y & -2z & +3t & =0 \\ 3x & +8y & +24z & -19t & =0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} x & +4y & -2z & +8t & =12 \\ & y & -7z & +2t & =-4 \\ & & 5z & -t & =7 \\ & & z & +3t & =-5 \end{array}$$

Úloha 5.7.2. Riešte v $\mathbb{Z}_5$ sústavu určenú maticou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&3&1 \\ 1&2&4&0&2 \\ 2&1&3&4&3 \\ 3&0&4&4&4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 3&1&2&2&1 \\ 4&4&2&1&0 \\ 0&1&2&4&1 \\ 2&1&1&2&3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 2&4&1&1&2 \\ 3&3&3&2&1 \\ 1&4&2&1&1 \\ 4&2&0&3&2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&2&4 \\ 2&3&1&1&3 \\ 4&3&1&3&2 \\ 3&4&3&2&1 \end{array}\right)$$

Úloha 5.7.3. Riešte v $\mathbb{R}$ sústavu určenú maticou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&-2&1&11 \\ 1&1&-3&7 \\ 11&-4&-3&10 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 3&-1&2&7 \\ 1&0&-1&-2 \\ 2&1&1&7 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1 \\ -1&3&-2&3 \\ 0&5&-5&4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&0 \\ 4&1&-1&2 \\ 1&2&4&0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&-3&0 \\ 1&-3&-1&0 \\ 2&1&-4&0 \end{array}\right)$$

Riešenie: a) nemá riešenie, b) (1,2,3) c) $(t-\frac{3}{5}, t+\frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$

Úloha 5.7.4. Riešte v $\mathbb{Z}_7$ sústavu určenú maticou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&5 \\ 0&1&1&1&6 \\ 3&1&2&3&0 \\ 0&3&6&1&4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&0 \\ 2&1&0&3&1 \\ 3&1&1&1&5 \\ 0&1&2&3&6 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&4&1&4 \\ 1&3&3&1&5 \\ 4&1&5&1&6 \\ 2&3&1&4&2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&1&2&3&2 \\ 3&1&1&1&1 \\ 0&6&5&3&3 \end{array}\right)$$

Úloha 5.7.5. Môžete si vymyslieť kopec vlastných sústav. Stačí najprv zvoliť riešenie, koeficienty a dorátať pravé strany. Skúste vymyslieť aj také sústavy, ktoré nemajú riešenie alebo majú viac než jedno riešenie.

Úloha 5.7.6. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi (1,2), (-1,6) a (2,3).

Úloha 5.7.7*. O sústave n rovníc o n neznámych nad poľom $\mathbb{R}$ vieme, že jej koeficienty tvoria aritmetickú postupnosť (ako napríklad pre maticu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right)$) a že táto sústava má jediné riešenie. Nájdite riešenie sústavy.

5.8 Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

Úloha 5.8.1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Úloha 5.8.2. Nájdite lineárne zobrazenie (ak také existuje), ktoré je prosté a spĺňa podmienky:
a) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(1,-1,1) = (1,2,-2)$, $f(0,1,-2) = (0,-1,2)$,
b) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(1,-1,1) = (1,2,-2)$, $f(1,1,1) = (3,2,4)$,
c) $f(1,0,1) = (2,2,1)$, $f(0,-1,2) = (0,1,1)$, $f(1,1,-1) = (2,3,2)$.

Úloha 5.8.3. Nájdite lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ak také existuje), pre ktoré: $f(3,2,3) = (5,-3,-2)$, $f(0,2,1) = (2,0,-2)$, $f(3,0,3) = (3,-3,0)$. Určte bázu a dimenziu jeho jadra a obrazu.

Úloha 5.8.4. Definujme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$ a označme $U_1 = \operatorname{Ker} f$.

Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1,y_2) = (y_1 - y_2, y_1 - 3y_2, 2y_1 - 8y_2, 3y_1 - 27y_2)$ a označme $U_2 = \operatorname{Im} f$.

Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory $\mathbb{R}^4$.

Nájdite bázy priestorov U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.

Úloha 5.8.5. Nech $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte

(a) $\operatorname{Ker} f^2 \supseteq \operatorname{Ker} f$,

(b) $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$,

(c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supseteq \operatorname{Im} f$.

5.9 Hodnosť transponovanej matice

5.10 Násobenie blokových matíc*

Kapitola 6

Determinanty

6.1 Motivácia

6.2 Definícia determinantu

6.3 Výpočet determinantov

6.3.1 Laplaceov rozvoj

6.3.2 Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

6.4 Determinant súčinu matíc

6.5 Využitie determinantov

6.5.1 Výpočet inverznej matice

6.5.2 Cramerovo pravidlo

Úloha 6.5.1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant. Výsledky (bez záruky): 0,8,8.

Úloha 6.5.2. Vyriešte v $\mathbb{Z}_5$ pomocou Cramerovho pravidla: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Úloha 6.5.3. Pomocou Cramerovho pravidla riešte:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & =1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$

(Návod: Skúste zvoliť x_3, x_4 za parametre.)

Úloha 6.5.4. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnosť?
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Úloha 6.5.5. Nájdite inverznú maticu k maticiam z úlohy 5.5.1 pomocou determinantu.

Úloha 6.5.6. Vypočítajte inverznú maticu:
$\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&2&3&-1\\ 1&4&9&1\\ 1&8&27&-1 \end{pmatrix}$

Úloha 6.5.7. Ukážte, že v ľubovoľnom poli platí $x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=0$. Skúste sa zamyslieť nad tým, či to viete odvodiť použitím vhodného determinantu.

Úloha 6.5.8*. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = ?$
[Výsledok by mal byť $\prod\limits_{1\le i<j\le n+1} (a_j-a_i)$, t.j. súčin výrazov tvaru a_j-a_i pre všetky $i<j$.]

Úloha 6.5.9*. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6.5.10*. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6.5.11*. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6.5.12*. Ukážte, že ak A, B sú štvorcové matice, tak

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

Vedeli by ste použiť podobný argument pre maticu tvaru $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$? (Zápisy použité v tomto zadaní treba chápať ako zápisy blokových matíc, t.j. A je nejaká matica typu $m\times m$, B je typu $n\times n$ a C má rozmery $m\times k$. Hint 1: Môže byť užitočný súčin blokových matíc. Hint 2: Možno sa oplatí skúsiť nejako použiť Laplaceov rozvoj.) [1]

[1] Azda sa oplatí poznamenať, že vo všeobecnosti sa determinant $\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix}$ nemusí rovnať $|A||B|-|C||D|$ ani $|AB-CD|$. Nejaké podmienky, kedy takéto niečo funguje, sa dajú nájsť v článku [Si].

Dodatok A

Delenie so zvyškom

Dodatok B

Komplexné čísla

B.1 Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla

Úloha B.1.1. Overte, že platí (pre ľubovoľné $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\overline{z_1 . z_2} &= \overline{z_1} . \overline{z_2} \\
z.\overline{z} &= |z|^2 \\
z = \overline{z} \qquad &\Leftrightarrow \qquad z \text{ je reálne} \\
z = -\overline{z} \qquad &\Leftrightarrow \qquad z \text{ je rýdzoimaginárne}
\end{aligned}$$

Symbol $|z|$ označuje absolútnu hodnotu komplexného čísla z. Ak $z = a + bi$, tak absolútna hodnota je definovaná ako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Budeme sa jej venovať o chvíľu.)

B.2 Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta

B.3 Riešenie rovníc v komplexných číslach

B.3.1 Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

B.3.2 Binomické rovnice

B.4 Zopár ďalších vecí súvisiacich s komplexnými číslami

Úloha B.4.1. Vypočítajte

a) $(3 + 2i) + (2 - i)$	b) $(1 + i) + (1 - i)$	c) $(1 + 3i) + (\sqrt{3} + i)$
d) $(3 + 2i).(2 - i)$	e) $(1 + i).(1 - i)$	f) $(1 + \sqrt{3}i).(\sqrt{3} + i)$
e) $(3 + 2i) - (2 - i)$	f) $(1 + i) - (1 - i)$	g) $(1 + 3i) - (\sqrt{3} + i)$
h) $(3 + 2i)/(2 - i)$	i) $(1 + i)/(1 - i)$	j) $(1 + \sqrt{3}i)/(\sqrt{3} + i)$

Úloha B.4.2. Overte výpočtom, že pri oboch uzátvorkovaniach výrazu $(1+2i)(1-i)(2-i)$ dostaneme ten istý výsledok.

Úloha B.4.3. Overte, že pre sčitovanie a násobenie komplexných čísel platí distributívnosť.

Úloha B.4.4. Overte, že pre komplexné čísla platí trojuholníková nerovnosť $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Čo predstavuje táto nerovnosť geometricky?

Úloha B.4.5. Vieme, že na reálnej osi predstavujú riešenia nerovnice $|x - a| < r$ interval $(a - r, a + r)$ (pre $a, r \in \mathbb{R}$ a $r > 0$). Aký geometrický útvar v komplexnej rovine tvoria komplexné čísla vyhovujúce podmienke:
a) $|z - z_0| < r$,
a) $|z - z_0| = r$,
a) $|z - z_0| \leq r$,
kde z_0 je dané komplexné číslo a r je dané kladné reálne číslo?

Úloha B.4.6*. Ak $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, aký geometrický útvar tvoria body zodpovedajúce komplexným číslam s vlastnosťou $|z - z_1| + |z - z_2| = r$? Načrtnite ho pre $z_1 = 0$ a $z_2 = 3 + 2i$.

Úloha B.4.7. Nájdite goniometrický tvar daných komplexných čísel:
a) $1 - i$; b) $\sqrt{3} + i$; c) $-i$; d) $2 + i$; e) $(1 + i)(1 - i)$

Úloha B.4.8. Vyriešte rovnice:
a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 2 = 0$ c) $x^2 - 6x + 13 = 0$ d) $x^2 + 2x + 50 = 0$ e) $x^2 + x + 1 = 0$

Úloha B.4.9. Vyriešte rovnice:
a) $z^2 = \frac{1-3i}{1+3i} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; b) $z^6 = i$; c) $\frac{z^4}{8} + i\sqrt{3} = -1$; d) $z^4 = 1 + i$

Úloha B.4.10. Vyriešte rovnice:
a) $x^2 - (1 + 2i)x - 3 + i = 0$ b)$x^2 - 2x + 1 - 2i = 0$ c) $x^2 - (4 + 3i)x + 1 + 5i = 0$ d) $x^2 - 3(1 + i)x + 5i = 0$ e) $x^2 + (1 + i)x - 4i = 0$

Úloha B.4.11. Riešte rovnice:
a) $z^3 - iz^2 + 4z - 4i = 0$ b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$ c) $x^3 - (3 + 2i)x^2 + 2(1 + 3i)x - 4i = 0$ d) $x^3 - 2ix^2 - x + 2i = 0$

Úloha B.4.12. Riešte sústavy (môžete napr. použiť Gaussovu eliminačnú metódu, vyrátať inverznú maticu, použiť Cramerovo pravidlo):
$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 1 \\ 1 & -1 & i \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & -i & 0 \\ i & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 1 & 1-i & 2i \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} -1+i & 2-i & 1+i \\ -1+2i & 3-2i & 1-i \end{array}\right)$

Úloha B.4.13. Nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^6 = \frac{3+4i}{3-4i}$