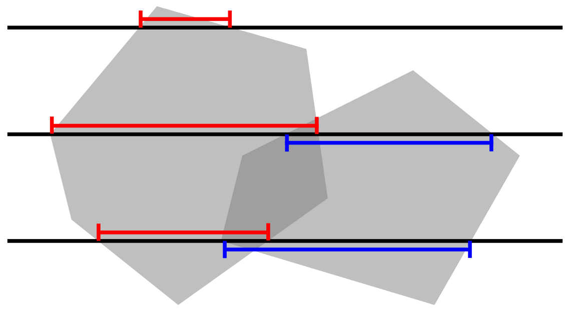
Zametanie

Truc Lam, Bui

April 8, 2018

Neprázdny prienik konvexných. Zadané sú dva konvexné mnohouholníky. Rozhodnite, či sa prekrývajú, teda či ich vnútra majú spoločný bod. (Body na obvode tiež považujeme, že sú vnútri.)

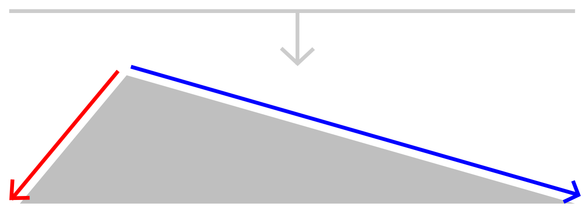
Predstavme si, že máme vodorovnú priamku začínajúcu nekonečne hore, ktorá postupne prejde celou rovinou smerom nadol. V každom momente si priamka pre oba mnohouholníky pamätá, či s nimi má prienik a ak áno, kde na priamke (v smere zľava doprava) je ľavý okraj mnohouholníka, a kde je pravý. Nakoľko je mnohouholník konvexný, nemôže mať viac, ako jeden ľavý a jeden pravý okraj.



Z pohľadu tejto priamky sa potom pýtame, či v nejakom momente majú tieto intervaly prienik. Ako by sme ale vedeli simulovať prechod priamky?

Predstavme si, že namiesto mnohouholníka máme pyramídu, ktorá je smerom nadol nekonečná. V každom momente vieme povedať, aký bude jej interval na priamke:

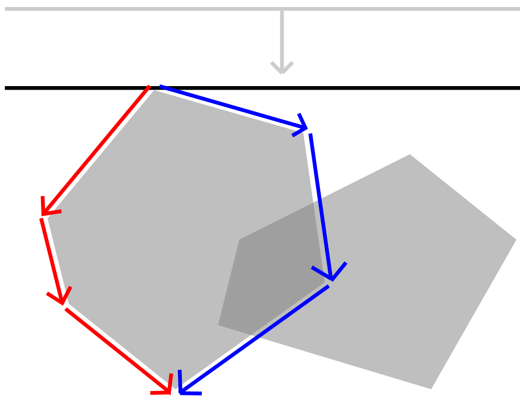
1. Buď sme ešte nenarazili na jej vrchol.
2. Alebo sme už pod vrcholom. Ak od stretnutia s vrcholom uplynul čas Δt (úmerný rozdiely y-ovej súradnice vrcholu a priamky), tak sa ľavý okraj posunul o $v_l \cdot \Delta t$ a pravý o $v_r \cdot \Delta t$. Konštanty v_l a v_r určujú sklon ľavej resp. pravej strany pyramídy.



V skutočnosti ale nemáme pyramídu, ale mnohouholník. Analógia s pyramídou bude presná len do momentu, kedy narazíme na štvrtý bod. Vtedy sa zmení rýchlosť jedného z okrajov podľa toho, na ktorom okraji je tento bod. Ako zistíme ale, na ktorom okraji sú ktoré body?

Pozrime sa najprv na strany. Strana je súčasťou ľavého okraja, ak v smere zhora nadol je vnútro mnohouholníka na ľavej strane. Ak je na pravej strane, tak je strana na pravom okraji. Podľa príslušnosti strán určíme príslušnosť vrcholov. Ako ale určíme príslušnosť strán?

Predstavme si, že chodíme po obvode mnohouholníka proti smeru hodinových ručičiek, zatáčame teda doľava. Vnútro mnohouholníka je potom vždy naľavo od smeru pohybu. Niektoré strany takto ale prejdeme v smere zdola nahor, nie zhora nadol. Týmto stranám potom nastavíme, že je vnútro na pravej strane od nich, a teda že sú súčasťou pravého okraja. Ostatné strany sú súčasťou ľavého okraja.



Ľavý okraj je červenou, pravý okraj modrou.

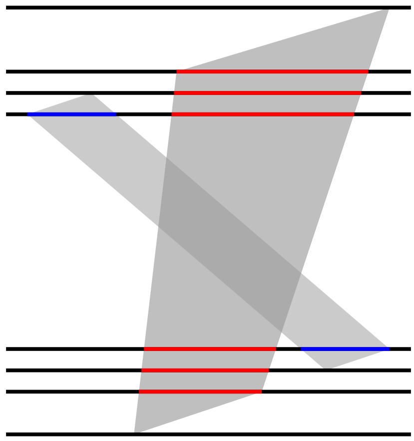
Každá strana nám reprezentuje udalosť tvaru: "Vo výške y sme narazili na vyšší vrchol strany. Ľavý/pravý okraj je teraz na pozícii x a jeho rýchlosť je odteraz v." Okrem nich máme ešte udalosť: "Oba okraje prestali existovať." Tá sa udeje v najnižšom bode mnohouholníka, z ktorého už nevedú smerom nadol žiadne strany.

Usporiadame si tieto udalosti podľa času, kedy sa udejú (podľa klesajúcej y-ovej súradnice), a v tomto poradí ich budeme spracovávať. Takto vieme simulovať prechod priamky rovinou. Pred a za každou udalosťou vieme povedať, kde je ľavý a kde je pravý okraj.

Ešte sa musíme vysporiadať s okrajovým prípadom, keď je niektorá strana vodorovná. Takú stranu budeme chápať tak, že jej ľavý koniec je o maličké ε nad jej pravým koncom.

Takto si teda vieme simulovať okraje oboch mnohouholníkov. Ako ale zistíme, či majú prienik?

Prvotná myšlienka by bola, že sa po každej udalosti pozrieme na to, či intervaly mnohouholníkov majú prienik. To ale bohužiaľ nestačí, predstavte si napríklad:



Po každej udalosti sú intervaly dizjunktné, mnohouholníky ale majú prienik.

Musíme sa pozerať aj na to, či sa ich obvody nepretli. To sa stane vtedy, keď sa poradie začiatkov a koncov intervalov zmení. (Nemusia sa úplne vymeniť, napríklad stačí, keď koniec prvého útvaru predbehne začiatok druhého.)

Zhrňme si to. Najprv si pre každú stranu konvexného mnohouholníka zistíme, či je súčasťou ľavého alebo pravého okraja. Následne zo strán spravíme udalosti, a utriedime ich podľa ich vyššej y-ovej súradnice. Pridáme špeciálnu udalosť pre koniec oboch okrajov. Začneme spracovávať udalosti, pričom si udržiavame posledné známe pozície okrajov, kedy sme ich videli, a rýchlosť pohybu. Toto robíme naraz pre oba mnohouholníky, a po každej udalosti sa spýtame, či sa zmenilo poradie okrajov.

Aká je časová zložitosť? Jediné, čo by mohlo trvať dlhšie ako lineárne, je triedenie. Utriediť strany konvexného mnohouholníka ale vieme v $O(n)$, celková časová zložitosť je teda $O(n)$.

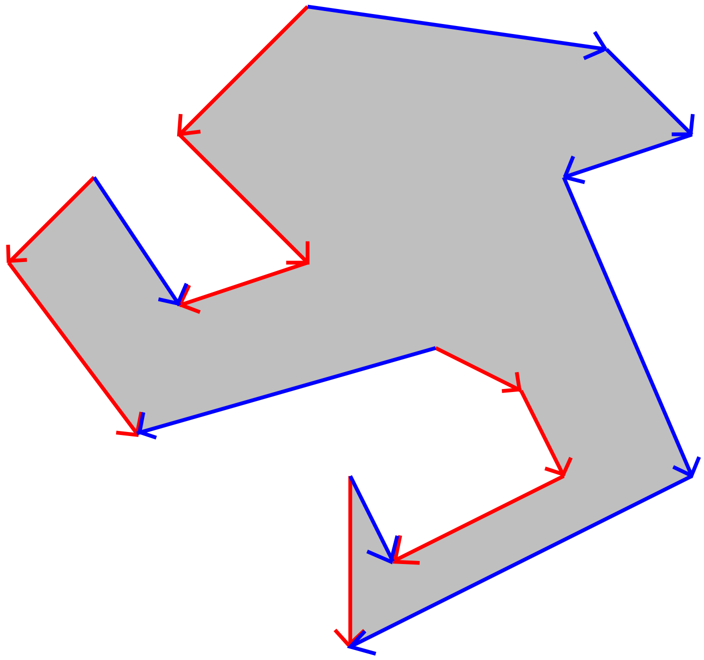
Myslená priamka, ktorú sme nechali prejsť celou rovinou, sa obvykle nazýva *zametacia priamka*, z anglického *sweep line*. Takémuto prístupu k riešeniu úlohy sa potom hovorí *zametanie*.

Úlohy:

1. Zadané sú dva konvexné mnohouholníky. Vypočítajte obvod a obsah ich prieniku.

Obsah mnohouholníka. Zadaný je jednoduchý (nie nutne konvexný) mnohouholník. Vypočítajte jeho obsah.

Na rozdiel od predchádzajúcej úlohy, v tejto môžeme viac, ako len jeden ľavý (resp. pravý) okraj. Pre každú stranu si teda spočítame nielen to, či je na ľavom alebo na pravom okraji, ale tiež na ktorom z nich.



Viacero ľavých okrajov a pravých okrajov. Viacero začiatkov a koncov.

Pri simulácii si pre každý okraj budeme priebežne počítať jeho poslednú známu pozíciu, kedy sme ho videli, a jeho rýchlosť. Okrajov je $O(n)$ a pri každej udalosti sa zmenia informácie iba o jednom okraji (prípadne dvoch, ak je to ich koniec). Môžeme si to teda dovoliť.

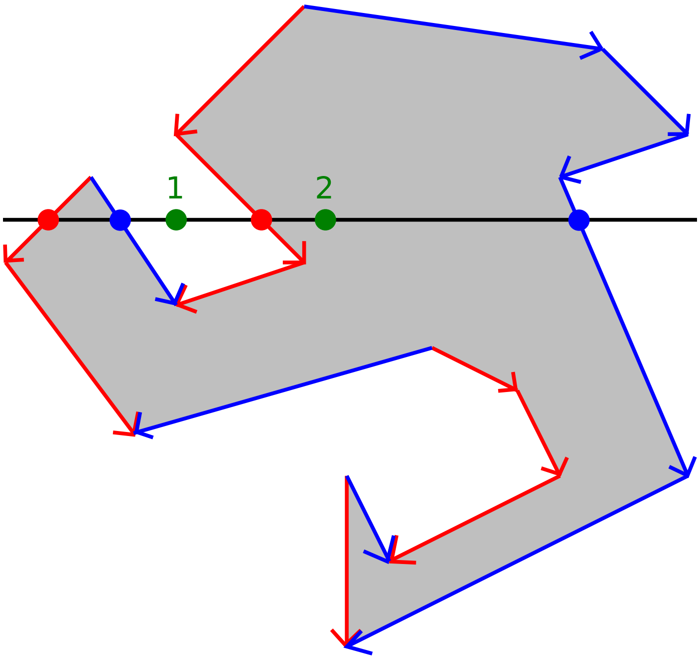
Ako ale vypočítať obsah? Všimnime si, že keď sa ľavý okraj pohybuje smerom doľava, tak sa obsah zväčšuje a keď doľava, tak sa obsah zmenšuje. Táto zmena je teda úmerná rýchlosti pohybu okraja. Podobne, ale naopak, to platí pre pravý okraj. Celková zmena za jednotku času je pritom konštantná medzi dvomi udalosťami, lebo vtedy sú rýchlosti konštantné. Takže ak po i-tej udalosti je prienik útvaru s priamkou dlhý l, zmena za čas je Δl, a $(i+1)$-vá udalosť je za Δt času, tak potom si k obsahu môžeme pripísať

$$\frac{l + (l + \Delta l \cdot \Delta t)}{2} \cdot \Delta t.$$

(Podľa vzorca na výpočet obsahu lichobežníka "priemer základní krát výška".) Stačí si teda priebežne udržiavať celkovú zmenu za jednotku času. Ľavé okraje prispievaju $-v$, pravé okraje prispievajú v.

Vnútri alebo vonku? Zadaný je mnohouholník a niekoľko bodov. Pre každý z nich zistite, či je vo vnútri mnohouholníka alebo vonku.

V tomto prípade si budeme chcieť udržiavať okraje usporiadané podľa toho, ako ležia na priamke. Vždy, keď narazíme na bod-otázku, sa pozrieme, kde na priamke leží. Ak posledný okraj, ktorý nie je za ním, je na rovnakej pozícii alebo je ľavý, tak je bod vo vnútri. Inak je vonku.



Zelené body sú otázky.
Pred prvým zeleným bodom je pravý okraj (modrý bod), teda bod je vonku.
Pred druhým zeleným bodom je ľavý okraj (červený bod), teda bod je vnútri.

Ako si ale budeme urdžiavať poradie okrajov na priamke? Môžeme použiť usporiadanú množinu (v C++ `set`, v Jave `treeset`, ...). Potrebujeme teda nejakú reprezentáciu okrajov takú, že ich budeme vedieť porovnať, teda vedieť povedať, či je okraj naľavo od nejakej pozície alebo napravo od nej.

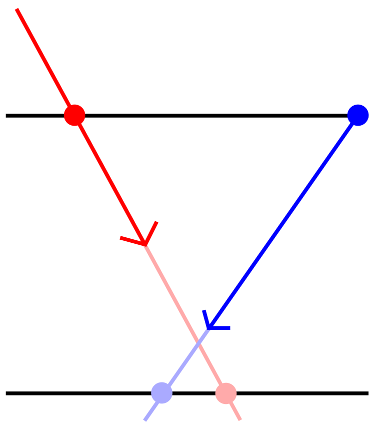
Už sme videli, ako sa to dá robiť. Pre každý okraj si pamätáme, kedy naposledy sme ho videli, a akou rýchlosťou sa odvtedy pohybuje. Je teda reprezentovaný nejakým počiatočným bodov (x_0, y_0) a rýchlosťou v_x. Keď chceme zistiť, či je okraj naľavo od nejakého bodu (x, y), vypočítame si, kde v čase (určenom y) bude. Presnejšie, jeho pozícia bude

$$x_0 + (y - y_0) \cdot v_x.$$

Túto pozíciu porovnáme s x.

To je síce pekné, problém je ale v tom, že okraje samotné nie sú body. Ako možno porovnávať okraj s okrajom?

V tomto prípade sa môžeme oprieť o to, že vieme, že relatívne poradie okrajov sa nemení (lebo je to mnohouholník). Ak by sa totiž mali krížiť, tak namiesto toho príde udalosť, že oba okraje zanikli. Takže nám stačí porovnať okraje v čase, keď ten neskorší z nich začal, a dostaneme to isté, ako keby sme ich porovnali v aktuálnom čase.



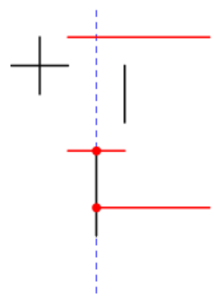
Na zmenu rýchlosti okraja sa dá pozerať tak, že okraj zanikne a na jeho mieste vznikne nový okraj. Vznik okraja je jednoduchý, iba ho vložíme do našej usporiadanej množiny a tá nám nájde jeho miesto. Pri odstraňovaní si môžeme dovoliť odstrániť všetky okraje s danou pozíciou, nakoľko náš útvar sám seba nepretíne. Tak ju iba nájdeme v našej usporiadanej množine, a všetky okraje, ktoré nie sú ani menšie ani väčšie, môžeme zmazať.

Kvôli usporiadanej množine (vyvažovaný vyhľadávací strom, skip list, ...) máme časovú zložitosť $O((n+q)\cdot\log n)$.

Úlohy:

1. Zadané sú dva jednoduché mnohouholníky. Rozhodnite, či sa prekrývajú, teda či ich vnútra majú spoločný bod. (Body na obvode tiež považujeme, že sú vnútri.)
2. Zadaných nie niekoľko úsečiek, ktoré nie sú vodorovné. Zistite, koľko dvojíc nerovnobežných úsečiek sa pretína. Je zaručené, že počet priesečníkov je nanajvýš 100 000.
3. Zadané sú dva jednoduché mnohouholníky, aspoň jeden z nich je konvexný. Vypočítajte obsah ich prieniku.

Počet priesečníkov. Zadaných je niekoľko vodorovných a zvislých úsečiek. Zistite, koľko dvojíc úsečiek rôznych orientácii sa pretína.



Opäť použijeme techniku zametania. Priebežne si chceme počítať, na ktorých pozíciách na priamke máme zvislé priamky. Takisto, vždy, keď narazíme na vodorovnú priamku, chceme vedieť rýchlo povedať, koľko zvislých priamok máme v nejakom intervale.

To znie ako úloha pre intervalový strom. Pre každú pozíciu si budeme pamätať, koľko zvislých priamok na nej je, a nad týmto postavíme intervaláč. Keď narazíme na začiatok (horný koniec) zvislej priamky, tak príslušnej pozícii povieme, nech sa jej počítadlo zvýši o 1. (A všetkým intervalom nad ňou sa tiež zvýši.) Keď narazíme, na koniec, tak ich znížime o 1. Keď narazíme na horizontálnu priamku, tak sa spýtame na súčet intervalu.

Ešte si treba dať pozor, ak sú súradnice veľké. Vtedy si nemôžeme spraviť intervaláč nad všetkými pozíciami, ale musíme to spraviť inak. Jedna možnosť je dopredu skomprimovať súradnice, druhá možnosť je v intervaláči vytvárať len tie vrcholy, ktoré naozaj potrebujeme.

Časová zložitosť je $O(n\log n)$.

Úlohy:

1. V rovine je $n\leq 100\,000$ obdĺžnikov, ktorých strany sú rovnobežné so súradnicovými osami. Súradnice ich rohov sú v absolútnej hodnote nanajvýš 10^9. Vypočítajte obsah ich zjednotenia.

Najbližšie dve body. Zadaných je niekoľko bodov v rovine. Nájdite dva body, ktoré sú k sebe čo najbližšie.