Orientácia v dvoch rozmeroch iba pomocou súradníc

Truc Lam, Bui April 5, 2018

Ako ľudia nemáme problém posúdiť, či je niečo naľavo alebo napravo, pred alebo za nami, alebo či je niečo vo vnútri alebo vonku. Vidíme. Ak by ale naším jediným zmyslom bola schopnosť zisťovať súradnice objektov, nebolo by to také intuitívne. Budeme sa zaoberať primárne geometriou dvoch rozmerov. 1D je príliš ľahké, a vyššie dimenzie sú mäso.

1 Body a vektory.

Body v rovine zvykneme v počítači reprezentovať ako dvojicu čísel (x, y): súradnice bodu na x-ovej a y-ovej osi. Čo vieme robiť iba pomocou bodov?

Napríklad, odčítaním dvoch bodov $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ od seba po súradniciach dostaneme *vektor*:

$$A - B = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

ktorý reprezentuje posunutie. Vektor je tiež iba dvojica čísel $(\Delta x, \Delta y)$, ktorá rezprezentuje posunutie v x-ovej súradnici o Δx a v y-ovej o Δy. Odčítaním $A - B$ získame také posunutie, o koľko musíme posunúť bod B, aby sme dostali bod A:

$$\underbrace{(x_2, y_2)}_{B} + \underbrace{(x_1 - x_2, y_1 - y_2)}_{A-B} = \underbrace{(x_1, y_1)}_{A}$$

Vektory vieme násobiť číslom: $k \cdot (x, y) = (kx, ky)$, vieme ich sčítavať s inými vektormi, čo reprezentuje skladanie posunutí. A ako sme videli vieme ich sčítavať s bodmi, čo zodpovedá aplikovaniu posunutia. Pri implementácii nezvykne byť rozdiel medzi vektorom a bodom, teda máme tú istú triedu pre body a pre vektory. Je ale rozumné si v hlave udržiavať, čo je bod a čo je vektor, aby sme nemiešali jablká a hrušky. Napríklad sčítavanie dvoch bodov väčšinou nedáva zmysel.

Úlohy:

1. Zadaný je trojuholník. Nájdite jeho ťažisko.

   Fungovalo by vaše riešenie aj v prípade všeobecného mnohouholníka?

Zadefinujme si ďalej dve pojmy, bez ktorých by sa nám len ťažko odpovedalo na zložitejšie otázky.

2 Skalárny súčin.

Algebraická definícia. Pre dva vektory $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ definujeme ich skalárny súčin ako

$$\langle a, b \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Všimnime si, že to môžeme chápať ako mieru toho, ako veľmi ukazujú naše vektory v rovnakom smere. Člen $x_1 x_2$ je kladný, ak naše vektory ukazujú v rovnakom x-ovom smere, a záporný, ak ukazujú v opačných x-ových smeroch. Podobne pre člen $y_1 y_2$. Skalárny súčin ich iba skombinuje, a dostaneme tak celkovú mieru toho, ako veľmi ukazujú v tom istom smere.

Pre posilnenie intuície sa zamyslime nad tým, akú hodnotu nadobúda skalárny súčin na nejakých jednoduchých príkladoch. Označme $1_x = (1, 0), 1_y = (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} \langle 1_x, 1_x \rangle &= 1 \\ \langle 1_x, 1_y \rangle &= 0 \\ \langle 1_x, -1_x \rangle &= -1 \\ \langle 1_x, -1_y \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť niekoľko vlastností, ktoré tiež vidno z pôvodného vzorca:

1. Pre ľubovoľný vektor a platí $\langle a, a\rangle = |a|^2$. Teda skalárny súčin samého so sebou vráti dĺžku vektora, umocnenú na druhú.
2. Je komutatívny, teda $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$.
3. Prenásobenie ľubovoľného vektora konštantou ho ovplyvní nasledovne:

$$\langle ka, lb\rangle = kl \cdot \langle a, b\rangle.$$

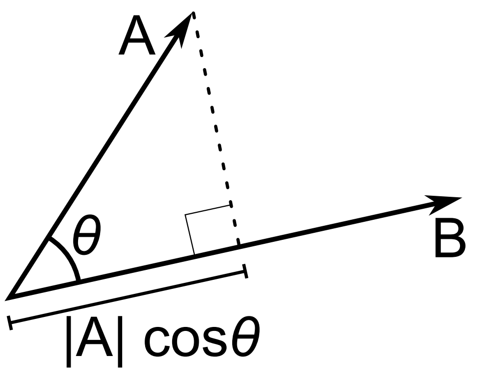
   Je teda lineárny v oboch svojich argumentoch.
4. Je distributívny so sčítaním, teda

$$\langle a, b + c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle.$$

Geometrická definícia.

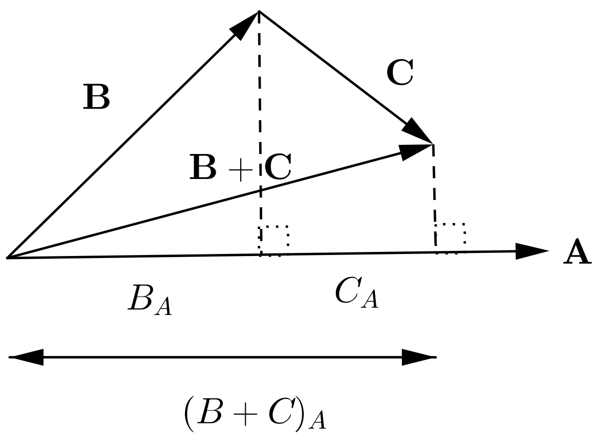
$$\langle a, b\rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos\phi,$$

kde ϕ je uhol zvieraný našimi vektormi. Rozmyslite si, že platia tie isté vlastnosti, ktoré sme uvažovali pri algebraickej definícii.



Vzťah medzi skalárnym súčinom a dĺžkou projekcie.

Tieto dve definície vedú k tomu istému objektu, t.j. sú ekvivalentné. Čo vieme dokázať pomocou distributívnosti geometrickej definície.



Súčet projekcii je projekcia súčtu.

Uvedomíme si, že ľubovoľný vektor $a = (x_1, y_1)$ sa dá zapísať ako $x_1 \cdot 1_x + y_1 \cdot 1_y$. Podobne pre b, a potom dostaneme

$$
\begin{aligned}
\langle a,b\rangle &= \langle a, x_2 1_x + y_2 1_y\rangle \\
&= \langle a, x_2 1_x\rangle + \langle a, y_2 1_y\rangle \\
&= x_2\langle a, 1_x\rangle + y_2\langle a, 1_y\rangle \\
&= x_2\langle x_1 1_x + y_1 1_y, 1_x\rangle + y_2\langle x_1 1_x + y_1 1_y, 1_y\rangle \\
&= x_2\langle x_1 1_x, 1_x\rangle + x_2\langle y_1 1_y, 1_x\rangle + y_2\langle x_1 1_x, 1_y\rangle + y_2\langle y_1 1_y, 1_y\rangle \\
&= x_2 x_1\langle 1_x, 1_x\rangle + x_2 y_1\langle 1_y, 1_x\rangle + y_2 x_1\langle 1_x, 1_y\rangle + y_2 y_1\langle 1_y, 1_y\rangle \\
&= x_1 x_2 + y_1 y_2
\end{aligned}
$$

Alternatívne sa to dá dokázať pomocou vlastností Tálesovej kružnice a mocnosti bodu ku kružnici. Keď vychádzame z geometrickej definície, tak vidno, že skalárny súčin je iba mocnosť bodu a ku kružnici so stredom $\frac{b}{2}$ a polomerom $|\frac{b}{2}|$. Podrobnosti tu neuvádzame.

Úlohy:

1. Stojíme v bode S a pozeráme sa smerom k bodu P. Je cieľový bod C pred nami, alebo je za nami?
2. Zadané sú tri rôzne body A, B, C, ktoré ležia na jednej priamke. Leží bod B medzi A a C?
3. Zadaná je priamka, určená dvojicou bodov, a bod. Nájdite jeho kolmý priemet na priamku, teda pätu kolmice z bodu na priamku.
4. Zadaná je úsečka a bod. Nájdite taký bod na zadanej úsečke, ktorý je k nášmu bodu čo najbližšie.
5. Stojíme v bode S, a pozorujeme, ako sa hýbe bod A smerom k bodu B. Vzďaľuje sa od nás, alebo sa k nám približuje?
6. Zadaných je n rôznych bodov, ktoré všetky ležia na jednej priamke. Usporiadajte ich podľa toho, v akom poradí ležia na tejto priamke. (Možné poradia sú dve, môžete vypísať ľubovoľné z nich.)

   Variant: Zadaných je n rôznych bodov a polpriamka určujúca smer. Usporiadajte tieto body podľa toho, ako ďaleko v zadanom smere sú.
7. Zadané sú dve rovnobežné úsečky. Nájdite ich priesečník, teda množinu bodov, ktoré ležia na oboch úsečkách.

3 Vektorový súčin.

Algebraická definícia. Pre dva vektory $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ definujeme ich vektorový súčin ako

$$a \times b = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Pre lepšiu intuíciu sa zamyslime nad tým, akú hodnotu nadobúda vektorový súčin na jednoduchých príkladoch. Vyskúšajme všetky kombinácie vektoru 1_x so štyrmi smermi kolmými naňho:

$$
\begin{aligned}
1_x \times 1_x &= 1\cdot 0 - 1\cdot 0 = 0 \\
1_x \times 1_y &= 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \\
1_x \times -1_x &= 0 \\
1_x \times -1_y &= -1
\end{aligned}
$$

Môžeme si všimnúť niekoľko vlastností, ktoré vidno aj zo vzorca.

1. Vektorový súčin samého so sebou je 0.
2. Je *antikomutatívny*, teda $a \times b = -b \times a$.
3. Je lineárny podľa oboch svojich argumentov, teda

   $$(ka) \times (lb) = kl \cdot (a \times b).$$
4. Je distributívny so sčítaním, teda pre ľubovoľné vektory a, b, c platí

   $$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

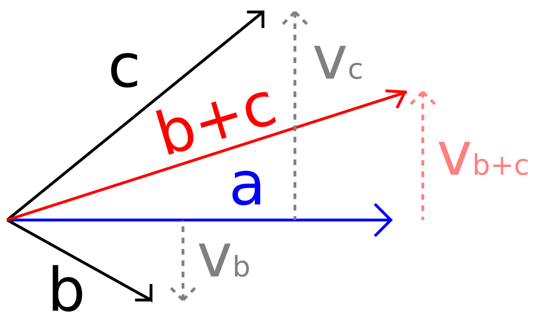
Geometrická definícia. Aj v tomto prípade má tento vzorec geometrický význam. Konkrétne, vektorový súčin je v absolútnej hodnote rovný obsahu rovnobežníka určeného našimi vektormi a, b:

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \phi,$$

kde ϕ je uhol medzi vektormi a a b, meraný proti smeru hodinových ručičiek (orientovaný uhol). Znamienko vektorového súčinu je určené tým, či je a naľavo od b alebo napravo. Aj v tomto prípade totiž platí antikomutatívnosť, nakoľko uhol meriame v pevne danom smere, a $\sin(360° - \phi) = -\sin\phi = \sin -\phi$.

Takisto platia všetky vlastnosti uvedené pri algebraickej definícii. Rozmyslite si.

Ekvivalencia definícii sa dá, podobne ako pri skalárnom súčine, dokázať pomocou distributívneho zákona. Jediný rozdiel bude v tom, že vektorové súčiny základných vektorov ($1_x \times 1_x, 1_x \times 1_y, 1_y \times 1_x, 1_y \times 1_y$) majú inú hodnotu, ako ich skalárne súčiny, a preto dostaneme iný vzorec.



Keď rozmýšľame nad obsahmi, stačí rozmýšľať nad výškami na vektor a.

Ukážme si dodatočne iný spôsob, ako ukázať, že algebraický vektorový súčin je (v absolútnej hodnote) rovný obsahu rovnobežníka. Budeme vychádzať z toho, že už niečo vieme o skalárnom súčino, a že $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$. Potom

$$\begin{aligned}
(|a| \cdot |b| \cdot \sin\phi)^2 &= (|a| \cdot |b|)^2 \cdot (1 - \cos^2\phi) \\
&= (|a| \cdot |b|)^2 - (|a| \cdot |b| \cdot \cos\phi)^2 \\
&= (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \\
&= x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
|a| \cdot |b| \cdot \sin\phi &= |x_1y_2 - x_2y_1|
\end{aligned}$$

Pri geometrickej definícii sme videli, že má zmysel hovoriť o tom, kedy je vektor naľavo a kedy napravo od iného vektora. Ako sa to prenesie na algebraickú definíciu?

To, že čo je naľavo a čo je napravo, je určené nami. Napríklad to môžeme rozhodnúť takto: ak si povieme, že vektor $a = (0, 1)$ je naľavo od vektoru $b = (1, 0)$, potom

$$a \times b = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Teda pri tejto konvencii nám zápornosť vektorového súčinu hovorí, že prvý vektor je naľavo od druhého. Kladnosť vektorového súčinu hovorí, že je napravo.

Úlohy:

1. Stojíme v bode S a pozeráme sa smerom k bodu P. Chceme sa otočiť čo najmenej tak, aby sme sa pozerali na cieľový bod C. Ktorým smerom sa máme otočiť? Alebo je to jedno?

2. Zadaná je priamka a bod. Nájdite vzdialenosť bodu od priamky.

3. Zadaný je trojuholník a bod. Zistite, či je bod vo vnútri trojuholníka.

4. Zadané sú tri rôzne body A, B, C. Ležia na jednej spoločnej priamke?

   Variant: Zadané sú dve priamky p, q, každá z nich je určená dvojicou rôznych bodov. Sú tieto dve priamky rovnobežné?

5. Zadaná je priamka a úsečka, ktoré nie sú rovnobežné. Pretínajú sa?

   Variant: Zadané sú dve nerovnobežné úsečky. Pretínajú sa?

6. Zadané sú dve nerovnobežné priamky. Nájdite ich priesečník.

7. Zadaných je n bodov a polpriamka. Usporiadajte tieto body podľa toho, ako ďaleko od tejto polpriamky sú. Body napravo od nej považujeme, že majú vzdialenosť zápornú.

Náročnejšie úlohy.

1. Zadaných je n bodov a polpriamka. Usporiadajte tieto body podľa toho, aký uhol zvierajú so zadanou polpriamkou, pričom uhol meriame v smere hodinových ručičiek.

2. Máme n smerov usporiadaných polárne (teda podľa orientovaného uhla, ktorý zvierajú s vektorom 1_x). Prichádzajú nám otázky, každá má tvar: "Tu máte smer a. Ktorý zo zadaných smerov je proti smeru hodinových ručičiek najbližšie k a?"

Nakoniec niekoľko úloh z kombinatorickej geometrie, kde nepotrebujeme žiadne ďalšie nástroje okrem už spomenutých. (Netreba zametať, netreba konvexný obal, netreba Voronoiov diagram ani Delaunayovu trianguláciu, ...)

Trojuholníky a body. (1. kolo, 1. časť, 34. ročník KSP-T) V rovine máme vyznačených $n \leq 500$ rôznych bodov s celočíselnými súradnicami. Dostanete $q \leq 200\,000$ otázok typu "Koľko vyznačených bodov leží v trojuholníku ABC?", kde A, B, C sú tri rôzne vyznačené body. Vašou úlohou je všetky tieto otázky správne zodpovedať. Strany a vrcholy trojuholníka považujeme za jeho súčasť.

Trúba, štvoroká kyklopka. (2. kolo, 2. časť, 33. ročník KSP-T) V rovine je vyznačených $n \leq 1\,000$ bodov. Uvažujme všetky neusporiadané štvorice rôznych vyznačených bodov. Akú časť z nich tvoria tie štvorice, ktoré tvoria konvexný štvoruholník? (Štvoruholník je konvexný práve vtedy, keď všetky jeho vnútorné uhly sú ostro menšie ako 180°.)