Svet rastúcich derivácii

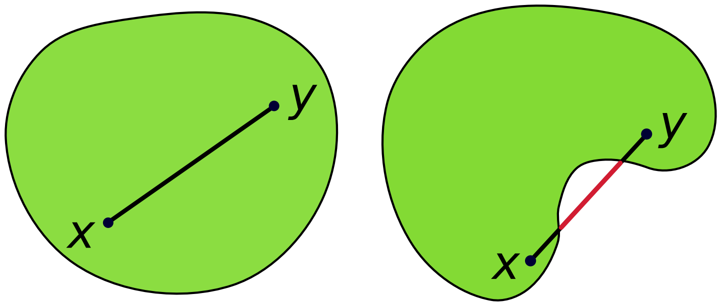
Truc Lam, Bui

April 7, 2018

1 Čo je to konvexnosť

Vo všeobecnosti pod útvarom rozumieme ľubovoľnú množinu bodov. Útvar U je *konvexný* vtedy, keď každá úsečka spájajúca dve body nášho útvaru leží celá v ňom, teda každý bod tejto úsečky patrí do útvaru.

Inak zapísané: ak obe body A, B patria do U, tak potom pre ľubovoľné reálne číslo $0 \leq k \leq 1$ platí, že aj bod $kA + (1-k)B$ patrí do U. Tu využívame algebraický pohľad na to, čo to znamená "byť vnútri úsečky".



Vľavo konvexný útvar, vpravo nekonvexný útvar.

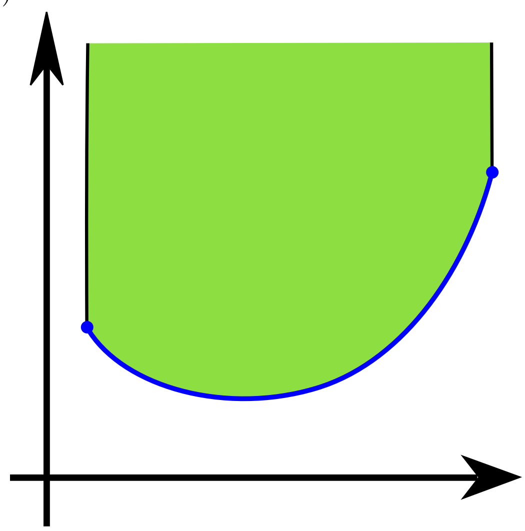
Pri mnohouholníkoch ale často vychádzame z niečoho na prvý pohľad iného. Jednoduchý mnohouholník (uzavretá lomená čiara, ktorá seba samú nikde nepretína) je konvexný vtedy, keď všetky jeho vnútorné uhly sú menšie alebo rovné 180°. Ak za body patriace do mnohouholníka považujeme body v jeho vnútri, tak sú tieto dve pohľady na konvexnosť ekvivalentné. Dôkazu sa tu nebudeme venovať, nakoľko by sme šli do matematiky hlbšie, ako chceme.

Ďalšie miesto, kde môžeme naraziť na slovíčko "konvexný", je v súvislosťami s funkciami. Funkcia je konvexná, ak spojnica ľubovoľných dvoch bodov ležiacich na grafe funkcie leží nad grafom funkcie. Algebraicky to znamená, že pre ľubovoľné a, b a $0 \leq k \leq 1$ platí

$$f(ka + (1-k)b) \leq kf(a) + (1-k) \cdot f(b)$$

Funkcia je *konkávna*, ak vždy platí opačná nerovnosť ($\geq$).

V oboch prípadoch vidno podobnosť s našou prvou definíciou. Konkrétne, ak za vnútro útvaru považujeme všetky body nad grafom (pod grafom), tak tento útvar je konvexný práve vtedy, keď je naša funkcia konvexná (konkávna).



Pri funkciách sa na to môžeme pozerať aj z pohľadu rýchlosti rastu. Funkcia je konvexná (konkávna) vtedy, keď rastie čoraz rýchlejšie (pomalšie).

Úlohy:

1. Zadané sú body jednoduchého mnohouholníka v poradí, v akom ležia na jeho obvode. Rozhodnite, či je tento mnohouholník konvexný.
2. Zadaný je konvexný mnohouholník. Vypočítajte jeho obsah.
3. Zadané je konvexný mnohouholník. Ďalej je zadaný bod S. Rozhodnite, či je S vo vnútri mnohouholníka.

   Variant: Zodpovedajte otázky tvaru: "Tu je bod S. Je vo vnútri mnohouholníka?"

2 Ternárne vyhľadávanie

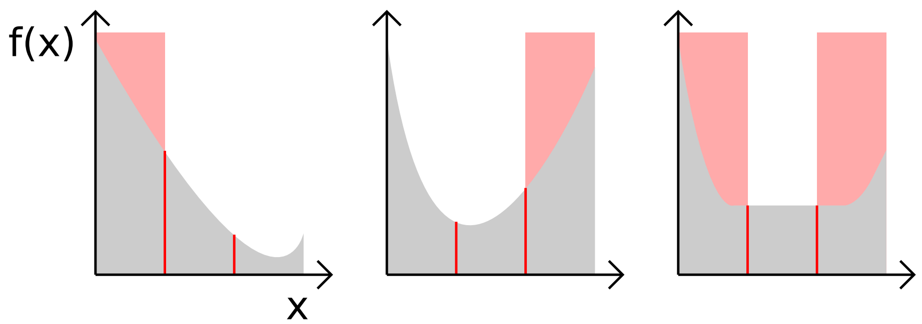
Úlohou je nájsť minimum nejakej konvexnej funkcie $f : [l, r) \to \mathbb{R}$. Ako na to?

Môžeme využiť poznatok, že konvexné funkcie najprv klesajú, a potom rastú. Zoberme si dva body $x_1 < x_2$. Ak $f(x_1) < f(x_2)$, tak musí funkcia v bode x_2 rásť. Smerom doprava od x_2 bude už iba rásť, takže minimum sa v $[x_2, \infty)$ nenachádza.

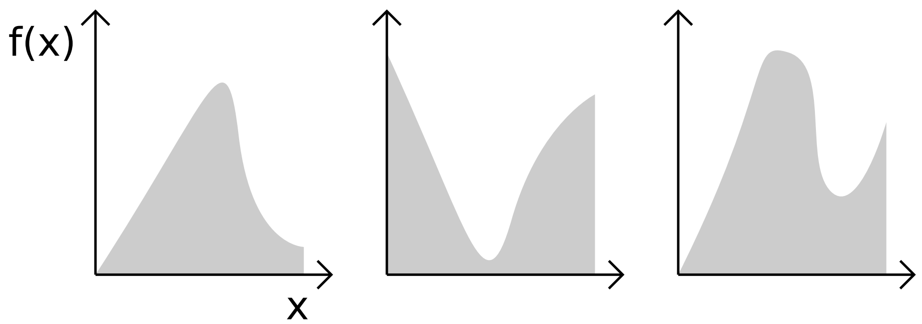
Podobne, ak $f(x_1) > f(x_2)$, tak musí v bode x_1 klesať. Potom ak sa hýbeme smerom doľava od x_1, tak funkcia rastie, preto môžeme vylúčiť interval $(-\infty, x_1]$.

Ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak na intervale $(-\infty, x_1]$ nemôže rásť a na $[x_2, \infty)$ nemôže klesať. Takže minimum bude v intervale $[x_1, x_2]$. (Pre jednoduchosť môžeme tento prípad riešiť ako niektorý z predchádzajúcich.)

Voľbou $x_1 = \frac{2l+r}{3}, x_2 = \frac{l+2r}{3}$ sa zaručí logaritmická časová zložitosť (resp. lineárna od počtu platných desatinných miest). V každom kroku sa totiž náš interval skráti na najviac $\frac{2}{3}$ svojej dĺžky.



Funkcie, ktoré najprv klesajú a potom rastú alebo opačne, vo všeobecnosti voláme *unimodálne*. Rozmyslite si, že vyššie popísaný algoritmus sa dá použiť na ľubovoľnú unimodálnu funkciu, nielen na konvexné a konkávne funkcie.



Funkcie naľavo a v strede sú unimodálne, tá napravo nie je.

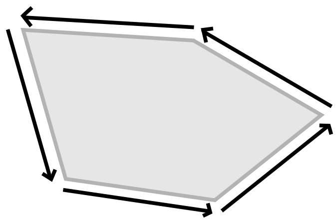
Úlohy:

1. Zadaná je úsečka a bod S. Nájdite taký bod na zadanej úsečke, ktorý je k S čo najbližšie.

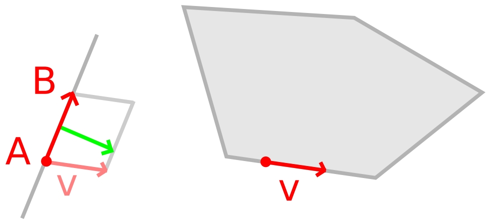
3 Cyklické ternárne vyhľadávanie

Priamka a konvexný mnohouholník. Zadaný je konvexný mnohouholník. Zodpovedajte otázky tvaru: "Tu je orientovaná priamka $\overrightarrow{AB}$. Aká je najmenšia vzdialenosť medzi niektorým bodom priamky a niektorým bodom mnohouholníka?" Vzdialenosť pritom uvažujeme orientovanú: ak je bod napravo od priamky, tak má vzdialenosť kladnú, a ak je naľavo, tak zápornú. Ako na to?

Najprv si uvedomme jednu vec. Ak sa hýbeme po obvode mnohouholníka, tak naša vzdialenosť od polpriamky bude najprv rásť, potom klesať a nakoniec opäť rásť, až kým sa nevrátime na začiatok. (Prípadne klesať, rásť a klesať.)



Poriadnejšie zdôvodnenie: Ak sa aktuálne hýbeme v smere vektoru v, tak za krátky časový úsek Δt sa naša vzdialenosť zmení o $\Delta t \cdot \frac{v \times (B-A)}{|B-A|}$. To, či sa naša vzdialenosť zmenšuje alebo zväčšuje, je teda určené smerom, ktorým sa hýbeme. Ak je tento smer napravo od $B - A$, tak sa naša vzdialenosť zväčšuje, ak je naľavo, tak sa zmenšuje.



(Zelenou je znázornená veľkosť zmeny za jednotku času.)

Pri našej okružnej jazde sa ale vždy otáčame doprava, nikdy nie doľava. A na začiatok sa vrátime po tom, čo sa otočíme dokopy o $360°$.

Teda kým je náš smer napravo od $B - A$, tak vzdialenosť rastie. Potom bude smer chvíľu zarovno s $B - A$, a vzdialenosť sa nemení. Ďalej bude smer chvíľu naľavo od $B - A$, a vzdialenosť klesá. Potom bude smer opäť chvíľu zarovno s $B - A$, a vzdialenosť sa nemení. Nakoniec bude smer opäť napravo, a vzdialenosť rastie, až kým sa nevrátime na začiatok.

My hľadáme vrchol s najmenšou vzdialenosťou. Predstavme si postupnosť, v ktorej sú vzdialenosti našich vrcholov. Táto postupnosť bude *cyklická unimodálna*: ak ju vhodne cyklicky zrotujeme, dostaneme unimodálnu postupnosť. Pre jednoduchosť zatiaľ predpokladajme, že čísla v tejto postupnosti sú rôzne, teda žiadne dve vrcholy nemajú rovnakú vzdialenosť od polpriamky.

O prvku budeme hovoriť, že je *rastúci*, ak je väčší, ako predchádzajúci prvok v postupnosti. (Pred prvým prvkom je posledný prvok.) Podobne budeme hovoriť, že prvok je *klesajúci*, ak je menší ako predchádzajúci prvok. Rozmyslite si, že postupnosť je cyklická unimodálna práve vtedy, keď rastúce prvky tvoria súvislý úsek (a klesajúce tiež).

6	8	9	7	3	2	1	3	5

7	3	2	1	3	5	6	8	9

Dve príklady tej istej cyklickej unimodálnej postupnosti.

Našou úlohou je v takejto cyklickej unimodálnej postupnosti nájsť minimum. Hľadáme teda taký prvok, ktorý klesá, ale prvok za ním už rastie.

Zoberme si dve indexy i, j do našej cyklickej postupnosti P. Čo vieme povedať na základe hodnôt na týchto pozíciách? Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $P[i] < P[j]$. Potom:

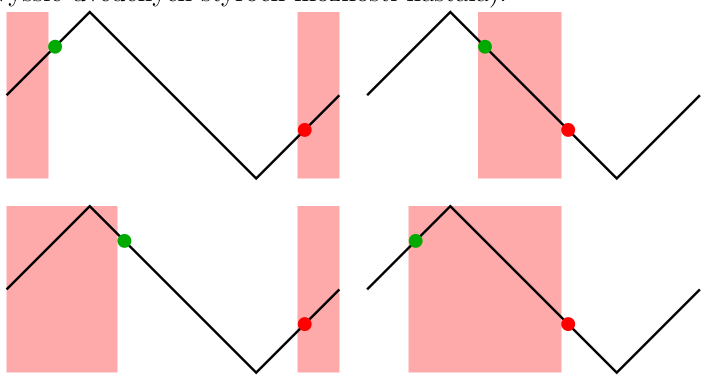
1. Ak oba vrcholy rastú, potom musí minimum ležať v intervale $[j, i)$.

2. Ak oba klesajú, potom minimum leží v intervale $[i, j)$.

3. Ak i rastie a j klesá, potom je minimum v $[j, i)$.

4. Ak i klesá a j rastie, potom je minimum v $[i, j)$.

Navyše, podúsek postupnosti, ktorá je cyklická unimodálna, má tiež túto vlastnosť. Ak sme teda na začiatku vedeli, že minimum je v nejakom intervale $[l, r)$, tak tento interval môžeme nahradiť menším (podľa toho, ktorá z vyššie uvedených štyroch možností nastala).



Prvý riadok obsahuje prípady 1 a 2, druhý riadok obsahuje 3 a 4. Červený bod je i, zelený je j.

Na začiatku $[l, r) := [0, n)$. V každom kroku zvolíme ako jeden z indexov l a druhý z indexov $\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$, čím zaručíme logaritmickú zložitosť.

Podobným postupom vieme hľadať aj maximum.

Zhrňme si to teda. Keď chodíme po obvode mnohouholníka, tak vzdialenosť najprv rastie, potom klesá, potom opäť rastie. Odpovede na otázky potom vieme hľadať v čase $O(\log n)$ použitím cyklického ternárneho vyhľadávania.

Ešte jedna maličkosť. Ak majú niektoré dve po sebe idúce vrcholy rovnakú vzdialenosť, tak nevieme povedať, či rastieme, alebo klesáme. Vtedy sa potrebujeme pozrieť na ďalšie vrcholy v poradí, a tých môže byť až $O(n)$. Náš mnohouholník preto upravíme tak, aby žiadne tri vrcholy neležali na jednej priamke. Potom sa stačí pozrieť na nanajvýš 1 ďalší vrchol.

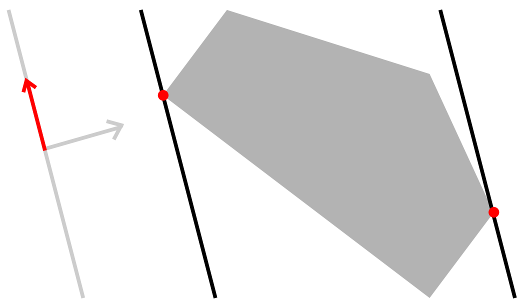
Úlohy:

1. Zadaný je konvexný mnohouholník. Zodpovedajte požiadavky tvaru: "Tu máte bod S, ktorý **neleží** vo vnútri mnohouholníka. Nájdite jeho dotyčnice k mnohouholníku."

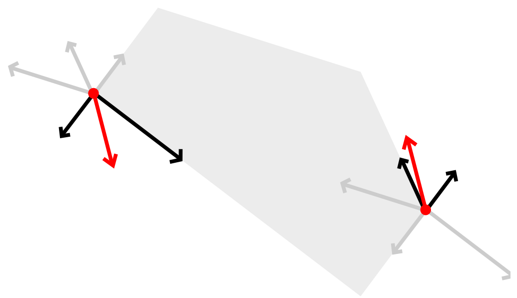
2. Zadaný je konvexný mnohouholník. Zodpovedajte otázky tvaru: "Tu máte bod S, ktorý neleží vo vnútri mnohouholníka. Ktorý bod na obvode mnohouholníka je k nemu najbližšie?"

4 Rotating calipers

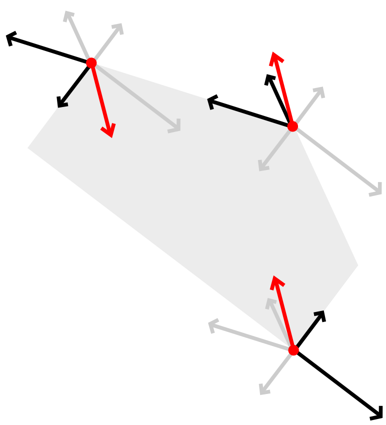
Priamka a konvexný mnohouholník, časť druhá. Ukážeme si teraz alternatívne riešenie predchádzajúceho problému. Predstavme si, že naša orientovaná priamka $\overrightarrow{AB}$ začína nekonečne vľavo (od svojej pôvodnej pozície) a hýbe sa doprava. Časom prvýkrát narazí na obvod mnohouholníka, potom prejde cez jeho vnútro, a nakoniec z neho vyjde v nejakom inom bode.



Pozrime sa na niektorý z hraničných bodov. Uvažujme strany mnohouholníka, s ktorými tento bod susedí. Všimnime si, že sú na rovnakej strane od našej orientovanej priamky. Ak si predstavíme, že sa hýbeme po obvode mnohouholníka, tak to znamená, že sme do vrchola vošli z rovnakej strany, ako z neho vyjdeme. Tieto dva vektory sú teda na opačných stranách $B - A$.



Ak sa pozrieme na nehraničný bod, tak do neho vojdeme z opačnej strany, ako z neho vyjdeme. Jeho dva vektory sú teda na rovnakých stranách $B - A$.



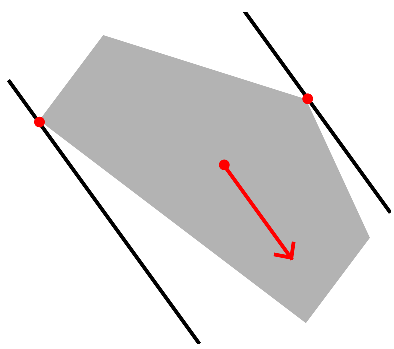
Riešenie je teda jednoduché. Každú stranu interpretujeme ako vektor, vedúci z jedného bodu do druhého. Tieto vektory budú reprezentovať pohyb po obvode mnohouholníka, proti smeru hodinových ručičiek. Polárne si ich usporiadame. Na otázky vieme potom odpovedať jedným binárnym vyhľadávaním.

Konkrétne, keď hľadáme najbližší bod k nejakému $\overrightarrow{AB}$, tak hľadáme prvý vektor, ktorý je zarovno s alebo za vektorom $A - B$. Počiatočný bod tohto vektora je hľadaný najbližší bod. (Ak by sme hľadali najvzdialenejší bod, tak by sme namiesto $A - B$ zobrali $B - A$.)

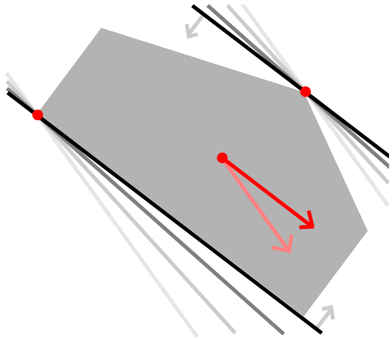
Keď vieme zistiť najbližší bod aj najvzdialenejší bod, vieme zistiť aj šírku nášho mnohouholníka v smere kolmom na zadanú priamku. Čo ak nás ale nezaujíma šírka v nejakom konkrétnom smere, ale najmenšia šírka (spomedzi všetkých smerov)?

Tunel a konvexný mnohouholník. Zadaný je konvexný mnohouholník. Chceme ho dostať z jedného konca tunelu na druhý. Tunel si môžeme predstaviť ako nekonečný pás šírky h. Aký najmenší musí byť, aby sa nám to podarilo?

Povedzme, že chceme útvar vkladať do tunelu pod konkrétnym uhlom, určeným orientovanou priamkou $\overrightarrow{AB}$. Všimnime si, že najbližší a najvzdialenejší bod nám určujú pás, do ktorého sa náš mnohouholník zmestí:



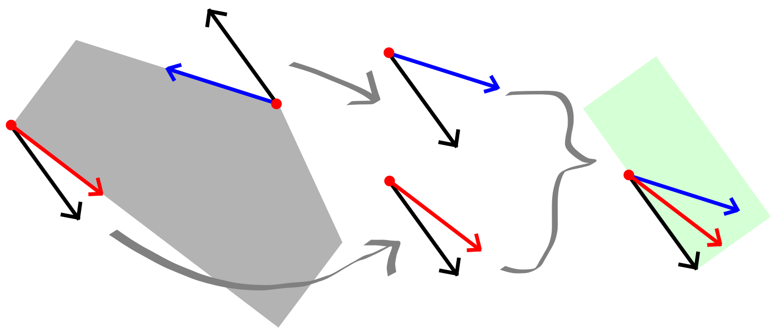
Čo sa bude diať s týmto pásom, keď budeme smer otáčať doľava? Obe hranice pásu sa budú otáčať okolo bodu, v ktorom sa dotýkajú mnohouholníka, až kým nenarazia na stranu mnohouholníka. Vtedy sa zmení bod, okolo ktorého sa budeme otáčať, na druhý vrchol strany.



My chceme postupne otočiť pás o 180° s tým, že si priebežne počítame, akú najmenšiu šírku pásu sme zatiaľ našli. Otáčanie je spojité, vďaka vyššie uvedenému pozorovaniu ho však vieme odsimulovať diskrétnymi krokmi, pričom každý krok je dobre definovaný.

Ako? Kým ani jedna hranica pásu nenarazí na stranu, tak je všetko predvídateľné—obe hranice sa točia okolo svojich *pivotov*. Zmena sa teda udeje po tom, čo niektorá hranica narazí na stranu, a vtedy sa zmení jej pivot. Potrebujeme teda vedieť povedať, ktorá hranica narazí na stranu ako prvá. Chceme teda porovnať uhly, ktoré zvierajú tieto strany s hranicami, a vybrať tú stranu, ktorá má s hranicou menší uhol.

Uhly sú ale škaredé a neceločíselné. To, na ktorú stranu narazíme skôr, sa dá zistiť aj iným spôsobom. Myšlienka je jednoduchá. Pre obe strany zisťujeme ich uhol s nejakou orientovanou priamkou. Ak by to bola tá istá orientovaná priamka, tak stačí iba porovnať strany ako vektory. Hranice nie sú tá istá orientovaná priamka, ale sú opačné (navzájom otočené o 180°). Stačí nám teda jednu zo strán otočiť o 180°, a porovnať.



Zoberieme tú stranu, ktorá je napravo od tej druhej, lebo na ňu pri otáčaní doľava narazíme skôr. Ak na obe strany narazíme naraz, tak obe hranice zmenia svojho pivota.

Ešte musíme vyriešiť, ako priebežne počítať dosiaľ najmenšiu šírku. Všimnime si, že pokiaľ sa ani jedna hranica nedotýka strany, tak ju môžeme v niektorom smere otočiť a tým zmenšiť šírku. Takže šírku nám stačí počítať v momentoch, keď narazíme na stranu.

Úlohy:

1. Máme konvexný mnohouholník. Nájdite jeho najväčšiu dĺžku. (Aká najdlhšia úsečka sa ešte zmestí do mnohouholníka?)

2. Zadané sú dve (neprekrývajúce sa) ostrovy. Každý ostrov má tvar konvexného mnohouholníka. Aký najkratší môže byť most, ktorý tieto dva ostrovy premosťuje?

   Variant: Akým najhrubším pásom vieme oddeliť tieto dva mnohouholníky?

3. Zadané sú dva konvexné mnohouholníky. Rozhodnite, či sa ich obvody pretínajú.

   Variant: Rozhodnite, či sa ich vnútra prekrývajú.

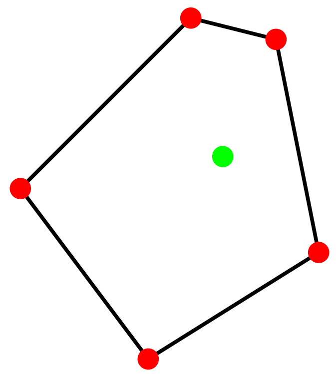
4. Zadané sú dva konvexné mnohouholníky. Zostrojte ich konvexný obal.

5 Konvexný obal

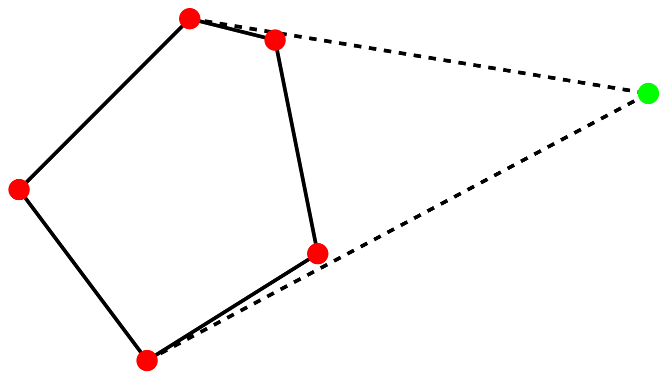
Zadaných je niekoľko bodov v rovine. Chceme nájsť najmenší konvexný útvar, ktorý ich všetky obsahuje. Ako na to?

Incremental convex hull. Môžme ho skúsiť zostrojiť postupne. Začneme prvými tromi bodmi, pre ktoré je nájsť ich konvexný obal jednoduché, a postupne budeme brať do úvahy ďalšie body.

Budeme si teda priebežne počítať konvexný obal už videných bodov. Keď príde nový bod, spýtame sa, či je vo vnútri obalu. Ak áno, tak náš obal je postačujúci na pokrytie tohto bodu a nemusíme nič riešiť.



Ak nie, tak musíme náš obal zväčšiť tak, aby v ňom nový bod bol. Zrejme bude tento bod na obvode nového konvexného obalu. Musíme nájsť dotyčnice nového bodu k nášmu obalu, a časť obalu "od ľavej dotyčnice k pravej (proti smeru hodinových ručičiek)" nahradiť týmito dotyčnicami.



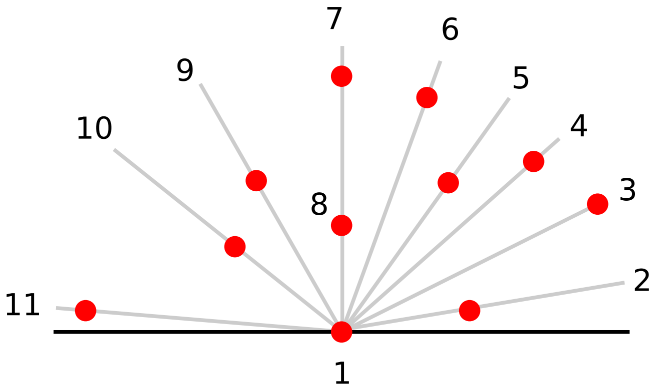
Obe tieto podproblémy sa dajú riešiť v čase $O(\log n)$ pre každý bod.

Takto sa nám podarilo vyriešiť *online inkrementálnu* verziu problému: nemáme všetky body zadané dopredu, ale postupne nám prichádzajú na vstupe, a po každom kroku nás zaujíma konvexný obal.

Implementácia je ale zložitá. Musíme vedieť povedať, či je bod vo vnútri obalu alebo vonku, a ďalej musíme vedieť nájsť dotyčnice z bodu. V prípade, že nepotrebujeme byť online, sa dá problém vyriešiť oveľa jednoduchšie.

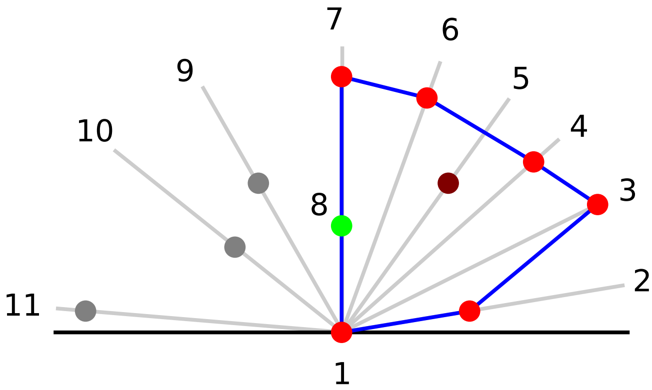
Graham scan. Budeme postupovať inkrementálne, tak, ako v predchádzajúcom riešení. Tentokrát si ale zvolíme poradie bodov, v ktorom ich budeme brať do úvahy, tak, aby sme mali prácu čo najjednoduchšiu.

Zoberme si najnižší bod (s najmenšou y-ovou súradnicou), označme ho P. Usporiadajme si všetky ostatné body podľa toho, aký uhol zviera ich spojnica s P s vodorovnou osou. Uhol meriame proti smeru hodinových ručičiek (doľava).

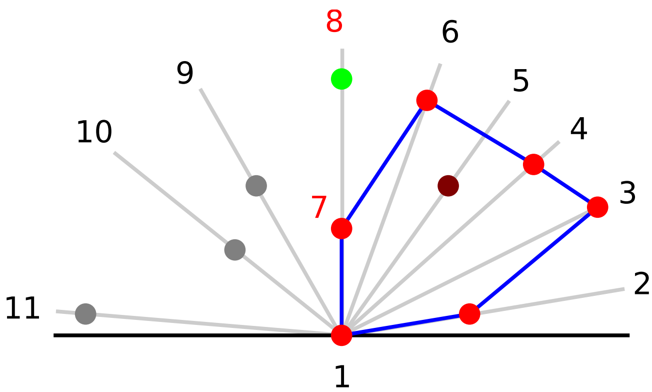


V tomto poradí (pričom bod P považujeme za prvý bod) budeme body vkladať do nášho konvexného obalu. Ako sa nám týmto veci zjednodušili oproti online algoritmu?

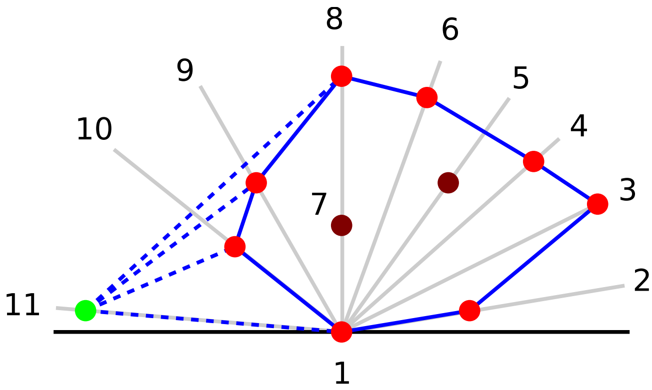
Po prvé si všimnime, že keď vkladáme nový bod, tak je vždy buď mimo doterajšieho obalu, alebo leží na jeho poslednej strane. Zisťovanie toho, či leží na poslednej strane obalu, je jednoduchá záležitosť.



A dokonca sa jej vieme zbaviť, ak si body usporiadame primárne podľa uhla, a sekundárne podľa vzdialenosti od P (čím bližšie, tým skôr). Potom bude vkladaný bod vždy mimo doterajšieho obalu.



Po druhé, jedna z dotyčníc bude spojnica nového bodu s bodom P. Stačí nám teda nájsť druhú dotyčnicu. Tú nájdeme tak, že budeme postupne skúšať body od konca, že či nie sú bodom dotyku. Ak nie, tak ich z obalu vyhodíme, nakoľko budú vo vnútri (keďže sa potom musia nachádzať medzi jednou dotyčnicou a druhou).



Každý bod do obalu pridáme najviac raz a najviac raz ho z neho odoberieme. Ak nám teda niekto vopred usporiadal body tak, ako to potrebujeme, tak vieme obal nájsť v čase $O(n)$. Na polárne usporiadanie bodov potrebujeme $O(n \log n)$ času.

Úlohy:

1. Zadaných je niekoľko bodov v rovine. Nájdite lomenú čiaru najkratšej možnej dĺžky, ktorá začína v najľavejšom bode, končí v najpravejšom, a všetky body ležia buď na alebo nad čiarou.
2. (Zbierka úloh KSP, 1744.) Zadaná je postupnosť čísel dĺžky $n \leq 1\,000\,000$ a kladné číslo $k \leq n$. Nájdite taký podúsek dĺžky aspoň k, ktorý má najväčší možný aritmetický priemer.
3. (Codechef, Potato problem.) Zadaných je $n \leq 100\,000$ bodov v rovine. Nájdite taký jednoduchý mnohouholník s vrcholmi v týchto bodoch, ktorý nie je konvexný a má čo najväčší obsah.
4. (VPCPC 2014, An inexperienced slalomer.) Dnes je Hubertov prvý deň na lyžiach. Jeho úlohou je prejsť cez dráhu idúcu zľava doprava, na ktorej je n vertikálnych bránok, cez ktoré musí prejsť. Ešte ale nevie zatáčať, takže si to môžete predstaviť tak, že Hubert je kruh s priemerom d, a jeho stred sa pohybuje po nejakej úsečke.

   Môže začínať hocikde naľavo od najľavejšej bránky, a končiť hocikde napravo od najpravejšej bránky. Aby prešiel dnešným testom, musí jeho celé telo prejsť pomedzi konce každej bránky. Dotýkanie sa koncov bránky je povolené. Aký najväčší priemer môže mať Hubert?