Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Dolné odhady pre efektívne riešiteľné problémy

Diplomová práca

2019

Bc. Eduard Batmendijn

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Dolné odhady pre efektívne riešiteľné problémy

Diplomová práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	2508 Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra informatiky
Školiteľ:	Mgr. Jakub Kováč, PhD.

Bratislava, 2019
Bc. Eduard Batmendijn

73288279

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Eduard Batmendijn
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Dolné odhady pre efektívne riešiteľné problémy
Lower bounds for efficiently solvable problems

Anotácia: Klasické výsledky o NP-úplnosti a polynomiálne redukcie ukazujú, že veľa ťažkých problémov navzájom súvisí. Pomerne nedávno sa výskum upriamil aj na efektívne riešiteľné problémy (v P), ktoré vyžadujú oveľa jemnejšie, tesnejšie redukcie, ktoré umožňujú presnejšie zachytiť vzťah medzi zložitosťou problémov. Veľa problémov sa dá redukovať na problém 3SUM (nájsť trojicu prvkov danej množiny, ktorých súčet je 0), problém hľadania kolmej dvojice vektorov, alebo problém najkratších ciest medzi každými dvoma vrcholmi v grafe. Viacero dolných odhadov na výpočtovú zložitosť sa dá dokázať za predpokladu (slabšej alebo silnej) exponenciálnej hypotézy. Cieľom vo všeobecnosti je nájsť jemné redukcie medzi problémami a dokázať (aspoň podmienené) dolné odhady.

Cieľ: Štúdium výpočtovej zložitosti (dolných odhadov) vybraných problémov.

Literatúra: Williams - On some fine-grained questions in algorithms and complexity
Williams - Hardness of Easy Problems: Basing Hardness on Popular Conjectures such as the Strong
Exponential Time Hypothesis

Vedúci: Mgr. Jakub Kováč, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Dátum zadania: 18.12.2018

Dátum schválenia: 09.01.2019

prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Abstrakt

Kľúčové slová:

Abstract

Keywords:

Obsah

Úvod

Kapitola 1

Súčasný stav

Dokazovanie tesných dolných odhadov sa pre mnoho problémov z P ukazuje ako veľmi náročné. Preto sa v posledných desaťročiach výskum upriamil aj na ukazovanie podmienených dolných odhadov.

Pri takýchto dolných odhadoch sa najprv zvolí *kľúčový problém* a dolný odhad pre tento problém, ktorý síce nie je dokázaný, ale javí sa ako rozumná hypotéza. Tento dolný odhad sa príjme ako predpoklad. Na základe neho sa následne pomocou tesných redukcií ukazujú (podmienené) dolné odhady pre iné problémy. Tieto odhady teda vždy majú formu „ak sa problém P_1 nedá riešiť rýchlejšie než v čase T_1, potom sa problém P_2 nedá riešiť rýchlejšie než v čase T_2".

Medzi najčastejšie problémy, ktoré sa v podmienených odhadoch používajú ako kľúčové, patria 3SUM , problém najkratších ciest pre všetky dvojice vrcholov v grafe (APSP [1]), násobenie matíc nad polokruhom $(\min, +)$ a CNF-SAT . Veľmi zaujímavé sú aj problémy TRIANGLE-COLLECTION a Δ-MATCHING-TRIANGLES , ktoré definujú Abboud, Williamsová a Yu [5]. Tieto dva problémy sa dajú tesne redukovať na všetky z predchádzajúcich problémov, preto sú hypotézy o ich dolných odhadoch ešte vierohodnejšie. V tejto kapitole zhrnieme známe výsledky v získané redukciami týchto problémov.

1.1 Problém 3SUM

Problém 3SUM sa dá sformulovať niekoľkými spôsobmi, jedna zo štandardných formulácií je nasledujúca.

Problém 1 (3SUM). Máme množinu S, ktorá obsahuje n reálnych čísel. Existujú $a, b, c \in S$ také, že $a + b + c = 0$?

Často sa uvažuje aj špeciálny prípad tohto problému, kde S obsahuje iba celé čísla.

[1] z angl. *all pairs shortest path*

Táto celočíselná verzia umožňuje používať techniky, ktoré sa vo všeobecnosti použiť nedajú – napr. používať čísla z S ako indexy, hešovať čísla z S a pod.

1.1.1 Zložitosť problému 3SUM

Problém 3SUM sa dá riešiť pomocou jednoduchého kvadratického algoritmu: najprv si čísla utriedime a následne pre každé možné a pomocou techniky dvoch bežcov hľadáme vhodné b a c.

Tento algoritmus sa dlho nedarilo prekonať, a to ani v celočíselnej verzii problému. Erickson ukázal, že v (obmedzenom) modeli lineárnych rozhodovacích stromov, kde každé rozhodnutie je založené na znamienku afínnej kombinácie troch alebo menej vstupných čísel, potrebuje každý algoritmus $\Omega(n^2)$ rozhodnutí [28]. Tento výpočtový model je slabší než RAM, preto z Ericksonovho odhadu ešte nevyplýva, že sa 3SUM nedá na RAM riešiť výrazne rýchlejšie.

Kvadratická bariéra bola prvý raz prekonaná v roku 2005, keď Baran, Demaine a Pǎtraşcu našli randomizovaný algoritmus pre celočíselný 3SUM , ktorý na RAM s w-bitovými slovami beží v očakávanom čase $O\left(n^2/\max\left\{\frac{w}{\lg^2 w}, \frac{\lg^2 n}{(\lg\lg n)^2}\right\}\right)$ [13]. Okrem toho našli verzie tohto algoritmu, ktoré bežia v lepšom než kvadratickom čase, aj pre dva ďalšie výpočtové modely. V roku 2014 prišli Grønlund a Pettie s deterministickým algoritmom pre 3SUM s reálnymi číslami, ktorý beží v čase $O\left(n^2(\log\log n)^{\frac{2}{3}}/(\log n)^{\frac{2}{3}}\right)$ [34]. Okrem toho popisujú aj randomizovaný algoritmus bežiaci s vysokou pravdepodobnosťou v čase $O\left(n^2(\log\log n)^2/\log n\right)$. Algoritmus Grønlunda a Pettieho zjednodušil Freund , ktorý dosiahol zrýchlenie deterministického algoritmu na $O\left(n^2\log\log n/\log n\right)$ [31]. Nezávisle na ňom vymysleli deterministický algoritmus s rovnakou časovou zložitosťou Gold a Sharir [33]. Zlepšenie o zhruba logaritmický faktor priniesol v roku 2018 Chan, ktorého algoritmus beží v čase $O\left(n^2(\log\log n)^{O(1)}/\log^2 n\right)$ [21].

Napriek veľkému množstvu úsilia, ktoré sa venovalo hľadaniu efektívnych algoritmov pre 3SUM , sú najlepšie známe algoritmy stále iba o chlp (polylogaritmický faktor) rýchlejšie, než $O(n^2)$. Pre to sa zdá pravdepodobné, že platí nasledujúca hypotéza.

Hypotéza 1. Problém 3SUM sa (vo verzii s reálnymi číslami, ani v celočíselnej verzii) nedá na RAM riešiť v čase $O(n^{2-\varepsilon})$ pre žiadne $\varepsilon > 0$.

1.1.2 3SUM -ťažké problémy

Okolo roku 1995 Gajentaan a Overmars našli redukcie problému 3SUM na niekoľko problémov z výpočtovej geometrie, čím ukázali dolné odhady pre tieto geometrické problémy, za predpokladu platnosti hypotézy 1 [32]. Takéto problémy potom nazvali 3SUM -ťažké. Medzi geometrickými 3SUM -ťažkými problémami, ktoré popisujú Gajentaan a Overmars sú napríklad:

- Pre danú množinu bodov v rovine overiť, či sú vo všeobecnej konfigurácii (teda overiť, že žiadne 3 body neležia na jednej priamke).
- Pre danú množinu nepretínajúcich sa úsečiek rovnobežných s osami zistiť, či sa dajú priamkou rozdeliť dve neprázdne podmnožiny.
- Pre danú množinu rovinných pásov a obdĺžnik určiť, či pásy úplne pokrývajú obdĺžnik.
- Pre danú množinu trojuholníkov určiť obsah ich zjednotenia.
- Pre danú množinu vodorovných trojuholníkov v priestore zistiť, či je daný trojuholník z tejto množiny viditeľný z daného bodu.

Bose, Kreveld a Toussaint ukázali, že problém hľadania optimálneho natočenia odlievacej formy je tiež 3SUM -ťažký [15]. Okrem toho je známych ešte niekoľko ďalších 3SUM -ťažkých problémov z výpočtovej geometrie [14, 9, 26, 47].

Ďalšou z oblastí, kde sa hypotéza 1 používa na ukazovanie dolných odhadov je približné vyhľadávanie v texte. Aj v tejto oblasti existuje niekoľko známych 3SUM -ťažkých problémov [23, 18, 10, 7].

V roku 2010 Pătraşcu ukázal na základe hypotézy 1 dolné odhady pre niekoľko grafových a niekoľko dynamických problémov[42]. Nasledujúce odhady sú platné, ak platí hypotéza 1:

- Pre daný neorientovaný graf s m hranami, nájdenie m trojuholníkov (cyklov dĺžky 3) vyžaduje $\omega\left(n^{4/3-\varepsilon}\right)$ času pre každé $\varepsilon > 0$.
- Pre daný graf s m ohodnotenými hranami, nájdenie trojuholníka s váhou 0 vyžaduje $\omega\left(m^{3/2-\varepsilon}\right)$ času pre každé $\varepsilon > 0$. Pre husté grafy teda nájdenie trojuholníka s nulovou váhou vyžaduje $\omega\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ času.
- Dátová štruktúra udržiavajúca orientovaný graf, ktorej operácie sú pridanie hrany, vymazanie hrany a zistenie, či je vrchol u dosiahnuteľný z vrcholu v vyžaduje $O(n^{\Omega(1)})$ času na jednu operáciu.

Pri redukciách Pătraşcu používal ako prostredníka problém Convolutional3SUM .

Problém 2 (Convolutional3SUM). *Máme vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Existujú i, j také, že $v_i + v_j = v_{i+j}$?*

Aj pri tomto probléme má zmysel zvlášť uvažovať celočíselnú verziu, kde vektor v patrí do $\mathbb{Z}^n$. Ak sa celočíselná verzia 3SUM nedá riešiť v čase $O\left(n^{2-\varepsilon}\right)$ pre $\varepsilon > 0$, potom sa ani celočíselný Convolutional3SUM nedá riešiť v $O\left(n^{2-\varepsilon}\right)$ pre $\varepsilon > 0$ [42]. Kopelowitz, Pettie a Porat ukázali, že čas potrebný na vyriešenie celočíselného 3SUM je nanajvýš $O(\log n)$-krát väčší, než čas potrebný na vyriešenie Convolutional3SUM [41].

V posledných rokoch vyšlo množstvo ďalších výsledkov ohľadom 3SUM -ťažkosti niektorých dynamických a grafových problémov [6, 5, 41].

1.2 Násobenie matíc nad $(\min, +)$ a APSP

Problémy APSP a násobenie matíc nad polokruhom $(\min, +)$ môžeme definovať nasledovne:

Problém 3 (APSP)**.** Máme orientovaný graf s n vrcholmi a ohodnotenými hranami, zadaný ako maticu susednosti. Úlohou je pre každú dvojicu vrcholov u, v vypočítať dĺžku najkratšej cesty z u do v.

Problém 4. Máme matice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Úlohou je vypočítať maticu $C = (c_{ij}) = A \circ B$ typu $n \times n$ definovanú predpisom:

$$c_{ij} = \min_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{kj}).$$

Tieto dva problémy spolu úzko súvisia – ak M je matica susednosti grafu G, potom M^n (v zmysle násobenia $\circ$) je matica vzdialeností tohto grafu.

1.2.1 Zložitosť problémov APSP a násobenia matíc nad $(\min, +)$

Problém APSP sa dá riešiť klasickým algoritmom v čase $O(n^3)$ [29]. Prvý rýchlejší algoritmus našiel Fredman v roku 1976, jeho algoritmus beží v čase $O\left(n^3(\log\log n)^{\frac{1}{3}} / \log^{\frac{1}{3}} n\right)$ [30]. Tento algoritmus bol ešte niekoľkokrát prekonaný [48, 27, 35, 49, 51, 19, 36, 20], najrýchlejší v súčasnosti známy algoritmus je od Hana a Takaoku z roku 2012 a má časovú zložitosť $O\left(n^3 \log\log n / \log^2 n\right)$ [37].

Problém násobenia matíc nad $(\min, +)$ sa dá naivne riešiť v čase $O(n^3)$. Medzi násobením matíc nad $(\min, +)$ a APSP existujú (tesné) redukcie oboma smermi, za predpokladu, že zložitosť násobenia matíc nad $(\min, +)$ je $\Omega\left(n^{2+\varepsilon}\right)$ pre nejaké $\varepsilon > 0$, majú tieto dva problémy rovnakú asymptotickú časovú zložitosť [8].

Podobne ako pri probléme 3SUM , ani pri problémoch APSP a násobenia matíc nad $(\min, +)$ sa zatiaľ nepodarilo nájsť algoritmus, ktorý by klasické riešenie zrýchlil o viac, než polylogaritmický faktor. Preto sa, podobne ako pri 3SUM , často pracuje s nasledujúcimi dvoma (ekvivalentnými) hypotézami:

Hypotéza 2. Problém APSP sa na RAM nedá riešiť $O\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ pre žiadne $\varepsilon > 0$.

Hypotéza 3. Problém násobenia matíc nad polokruhom $(\min, +)$ sa na RAM nedá riešiť $O\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ pre žiadne $\varepsilon > 0$.

1.2.2 APSP -ťažké problémy

Williamsová a Williams nedávno ukázali, že hypotézy 2 a 3 sú ekvivalentné s obdobnými hypotézami pre niekoľko ďalších problémov [50]. Z nich ako príklad uvádzame niektoré:

- Hľadanie druhej najkratšej cesty medzi dvoma vrcholmi ohodnoteného orientovaného grafu.
- Kontrola, či daná matica definuje metriku.
- Zisťovanie, či graf s ohodnotenými hranami obsahuje trojuholník so zápornou váhou.
- Hľadanie cyklu s najmenšou váhou v grafe s nezápornými váhami hrán.

Abboud, Grandoni a Williamsová ukázali ekvivalenciu hypotéz 2 a 3 s obdobnými hypotézami pre ďalšie grafové problémy, napríklad výpočet polomeru grafu a hľadanie mediánu grafu [3].

Roditty a Zwick uvažovali problém najkratších ciest z jedného fixného vrcholu v grafe, do ktorého je možné dynamicky pridávať a odoberať hrany. Pre verzie tohto problému, kde je možné iba pridávať, resp. odoberať hrany ukázali (podmienené) dolné odhady založené na hypotéze 2.

Abboud a Williamsová ukázali dolné odhady podmienené hypotézou 2 pre dva dynamické problémy [6]. Prvým z uvažovaných problémov bolo hľadanie ceny najdrahšieho párenia vo váhovanom bipartitnom grafe, do ktorého je možné pridávať, a odoberať z neho hrany. Dolné odhady ukázali pre inkrementálnu (bez odoberania hrán) a dekrementálnu (bez pridávania hrán) verziu tohto problému. Druhým uvažovaným problémom bolo zisťovanie vzdialenosti medzi dvoma fixnými vrcholmi v neorientovanom ohodnotenom grafe, do ktorého je možné pridávať a odoberať z neho hrany. Aj tu našli dolné odhady pre inkrementálnu a dekrementálnu verziu tohto problému.

Abboud, Williamsová a Yu ukázali dolné odhady pre ďalšie dynamické grafové problémy, napríklad maximálny tok a silno súvislé komponenty [5].

Abboud a Lewi ukázali (podmienený) dolný odhad pre vyhľadávanie niektorých fixných podgrafov s nulovou váhou v ohodnotenom grafe [4].

Abboud a Dahlgaard využili hypotézu 2 aj na ukázanie dolných odhadov pre niektoré problémy na planárnych grafoch [2].

Backurs, Dikkala a Tzamos ukázali (podmienený) dolný odhad pre nasledujúci problém. Máme n ohodnotených (kladne alebo záporne) bodov v d-rozmernom priestore. Úlohou je nájsť hyperkváder rovnobežný s osami, ktorý obsahuje body s najväčším súčtom cien [11].

Backurs a Tzamos ďalej ukázali, že za predpokladu hypotézy 2 je Viterbiho algoritmus na hľadanie najpravdepodobnejšej cesty v skrytom markovovskom modeli pre malé počty rôznych pozorovaní optimálny, až na subpolynomiálne faktory [12].

Okrem toho sú známe výsledky založené na hypotéze 2 pre rôzne problémy súvisiace s editačnou vzdialenosťou [45, 16].

1.3 Problém CNF-SAT

Problém CNF-SAT je špeciálnym prípadom problému SAT .

Problém 5 (CNF-SAT)**.** Máme booleovskú formulu o n premenných v konjunktívnej normálnej forme. Je táto formula splniteľná?

Okrem tejto verzie sa často uvažuje aj s verziami problému CNF-SAT , kde je počet literálov v jednej klauzule obmedzený nejakou konštantou k. Takéto obmedzené verzie voláme k-SAT .

1.3.1 Zložitosť problému CNF-SAT

Problém CNF-SAT sa dá riešiť naivným algoritmom bežiacim v čase $O(2^n\text{poly}(n))$: vyskúšame všetky možné ohodnotenia a pre premenných každé z nich vyhodnotíme zadanú formulu.

Existuje množstvo algoritmov, ktoré sú v rôznych špeciálnych prípadoch rýchlejšie, než tento naivný algoritmus [38, 46, 43]. Žiaden z nich však nerieši všeobecnú verziu problému CNF-SAT čase $O\left(2^{\delta n}\text{poly}(n)\right)$ pre $\delta < 1$.

Problém CNF-SAT je známy NP-ťažký problém [40]. Za predpokladu $P \neq NP$ sa teda nedá riešiť v polynomiálnom čase. To je však pomerne slabý dolný odhad. Preto Impagliazzo a Paturi zaviedli exponenciálnu hypotézu (ETH[2]) a silnú exponenciálnu hypotézu (SETH[3]) [39].

Pre každé $k \geq 3$ definujme:

$$s_k = \inf\{\delta : \text{existuje algoritmus riešiaci } k\text{-SAT v čase } O\left(2^{\delta n}\text{poly}(n)\right)\}.$$

Postupnosť s_i je zjavne neklesajúca. Ďalej definujme:

$$s_\infty = \lim_{k \to \infty} s_k.$$

Hypotéza 4 (ETH)**.** Pre každé $k \geq 3$ platí $s_k > 0$.

[2]z angl. *exponential time hypothesis*
[3]z angl. *strong exponential time hypothesis*

Inými slovami, ETH hovorí, že problém k-SAT pre $k \geq 3$ vyžaduje exponenciálny čas.

Hypotéza 5 (SETH)**.** $s_\infty = 1$.

Hypotéza 5 inými slovami hovorí, že neexistuje algoritmus riešiaci všeobecnú verziu CNF-SAT v čase $O\left(2^{\delta n}\text{poly}(n)\right)$ pre $\delta < 1$, teda že naivný algoritmus sa (až na subexponenciálne faktory) nedá zlepšiť.

1.3.2 Odhady založené na SETH

Existuje množstvo dolných odhadov podmienených SETH pre iné NP-ťažké problémy [24, 25]. Pre nás sú však zaujímavé najmä problémy z P.

Williams a Yu sa zaoberali problémom hľadania kolmej dvojice vektorov (OV [4]). V tomto probléme máme množiny d-rozmerných vektorov A a B a pýtame sa, či existujú také $u \in A, v \in B$, že $u \cdot v = 0$. Ukázali, že ak $|A| = |B| = n$ a $d = \Theta(\log n)$ (a platí SETH), potom sa tento problém nedá riešiť v čase $O(n^{2-\varepsilon})$ pre $\varepsilon > 0$. Problém OV je zaujímavý, lebo sa v mnohých nasledujúcich redukciách využíva ako medzikrok medzi CNF-SAT a problémom, na ktorý redukujeme.

Roditty a Williamsová ukázali (podmienený) dolný odhad pre $\frac{3}{2}$-aproximačné algoritmy riešiace problém priemeru grafu [44]. V nasledujúcej práci Chechik a kol. ukazujú ďalší dolný odhad v oblasti aproximačných algoritmov hľadajúcich priemer grafu [22].

Backurs a Indyk ukázali, že editačá (Levenshteinova) vzdialenosť medzi dvoma reťazcami dĺžky n sa nedá vypočítať v čase $O(n^{2-\varepsilon})$ pre $\varepsilon > 0$, ak platí SETH.

Bringmann a Künnemann tento odhad mierne zosilnili a ukázali podobné dolné odhady aj pre hľadanie najdlhšej spoločnej podpostupnosti a dynamic time warping [17].

Podobný výsledok dosiahli nezávisle aj Abboud, Backurs a Williamsová, ktorí však navyše ukázali, že najdlhšia spoločná podpostupnosť k reťazcov dĺžky n nad abecedou veľkosti $O(k)$ sa nedá nájsť v čase $O(n^{k-\varepsilon})$ pre $\varepsilon > 0$, ak platí SETH [1].

Abboud a Williamsová využili SETH aj na dolné odhady v rôznych dynamických a grafových problémoch [6].

Dolné odhady, ktoré Abboud, Williamsová a Yu ukázali na základe hypotéze 2 pre dynamický maximálny tok a dynamické silno súvislé komponenty sa dajú postaviť aj na SETH [5].

[4] z angl. *orthogonal vectors*

1.4 Problémy TRIANGLE-COLLECTION a Δ-MATCHING-TRIANGLES

Abboud, Williamsová a Yu definujú vo svojej práci nasledujúce dva problémy [5].

Problém 6 (TRIANGLE-COLLECTION)**.** Je daný graf G s n ofarbenými vrcholmi. Je pravda, že pre každú trojicu rôznych farieb a, b, c existuje v G trojuholník (x, y, z) taký, že x má farbu a, y má farbu b a z má farbu c?

Problém 7 (Δ-MATCHING-TRIANGLES)**.** Je daný graf G s n ofarbenými vrcholmi. Existuje trojica rôznych farieb a, b, c taká, že graf G obsahuje aspoň Δ trojuholníkov (x, y, z), v ktorých x má farbu a, y má farbu b a z má farbu c?

Oba tieto problémy majú jednoduché riešenie v $O(n^3)$: môžeme preiterovať všetky trojice vrcholov a pritom si pre každú trojicu farieb počítať, koľko trojuholníkov danej trojice farieb sme videli. Pre oba problémy môžeme sformulovať hypotézy, že oveľa lepšie algoritmy už neexistujú.

Hypotéza 6. Problém TRIANGLE-COLLECTION sa nedá riešiť v čase $O\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ pre žiadne $\varepsilon > 0$.

Hypotéza 7. Problém Δ-MATCHING-TRIANGLES sa nedá riešiť v čase $O\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ pre žiadne $\varepsilon > 0$.

Abboud, Williamsová a Yu ukázali, že ak by ľubovoľná z hypotéz 6, 7 neplatila, neplatila by ani žiadna z hypotéz 1, 2 a 5 [5]. To robí hypotézy 6 a 7 ešte dôveryhodnejšími než hypotézy 1, 2 a 5.

Záver

Literatúra

[1] Amir Abboud, Arturs Backurs, and Virginia Vassilevska Williams. Quadratic-Time Hardness of LCS and other Sequence Similarity Measures. *arXiv e-prints*, page arXiv:1501.07053, January 2015.

[2] Amir Abboud and Søren Dahlgaard. Popular Conjectures as a Barrier for Dynamic Planar Graph Algorithms. *arXiv e-prints*, page arXiv:1605.03797, May 2016.

[3] Amir Abboud, Fabrizio Grandoni, and Virginia Vassilevska Williams. Subcubic equivalences between graph centrality problems, apsp and diameter. In *Proceedings of the Twenty-sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '15, pages 1681–1697, Philadelphia, PA, USA, 2015. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[4] Amir Abboud and Kevin Lewi. Exact Weight Subgraphs and the k-Sum Conjecture. *arXiv e-prints*, page arXiv:1304.7558, April 2013.

[5] Amir Abboud, Virginia Vassilevska Williams, and Huacheng Yu. Matching triangles and basing hardness on an extremely popular conjecture. In *Proceedings of the Forty-seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '15, pages 41–50, New York, NY, USA, 2015. ACM.

[6] Amir Abboud and Virginia Vassilevska Williams. Popular conjectures imply strong lower bounds for dynamic problems. In *Proceedings of the 2014 IEEE 55th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS '14, pages 434–443, Washington, DC, USA, 2014. IEEE Computer Society.

[7] Amir Abboud, Virginia Vassilevska Williams, and Oren Weimann. Consequences of faster alignment of sequences. In Javier Esparza, Pierre Fraigniaud, Thore Husfeldt, and Elias Koutsoupias, editors, *Automata, Languages, and Programming*, pages 39–51, Berlin, Heidelberg, 2014. Springer Berlin Heidelberg.

[8] Alfred V. Aho and John E. Hopcroft. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1st edition, 1974.

[9] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, Erik D. Demaine, Ferran Hurtado, Pedro Ramos, and Jorge Urrutia. On k-convex polygons. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 45(3):73–87, April 2012.

[10] Amihood Amir, Timothy M. Chan, Moshe Lewenstein, and Noa Lewenstein. On hardness of jumbled indexing. In Javier Esparza, Pierre Fraigniaud, Thore Husfeldt, and Elias Koutsoupias, editors, *Automata, Languages, and Programming*, pages 114–125, Berlin, Heidelberg, 2014. Springer Berlin Heidelberg.

[11] Arturs Backurs, Nishanth Dikkala, and Christos Tzamos. Tight Hardness Results for Maximum Weight Rectangles. *arXiv e-prints*, page arXiv:1602.05837, February 2016.

[12] Arturs Backurs and Christos Tzamos. Improving Viterbi is Hard: Better Runtimes Imply Faster Clique Algorithms. *arXiv e-prints*, page arXiv:1607.04229, July 2016.

[13] Ilya Baran, Erik D. Demaine, and Mihai Pătraşcu. Subquadratic algorithms for 3sum. In *Proceedings of the 9th International Conference on Algorithms and Data Structures*, WADS'05, pages 409–421, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer-Verlag.

[14] Gill Barequet and Sariel Har-Peled. Polygon-containment and translational min-hausdorff-distance between segment sets are 3sum-hard. In *Proceedings of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '99, pages 862–863, Philadelphia, PA, USA, 1999. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[15] Prosenjit Bose, Marc J. van Kreveld, and Godfried T. Toussaint. Filling polyhedral molds. In *Proceedings of the Third Workshop on Algorithms and Data Structures*, WADS '93, pages 210–221, Berlin, Heidelberg, 1993. Springer-Verlag.

[16] Karl Bringmann, PawełGawrychowski, Shay Mozes, and Oren Weimann. Tree edit distance cannot be computed in strongly subcubic time (unless apsp can). In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '18, pages 1190–1206, Philadelphia, PA, USA, 2018. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[17] Karl Bringmann and Marvin Künnemann. Quadratic Conditional Lower Bounds for String Problems and Dynamic Time Warping. *arXiv e-prints*, page arXiv:1502.01063, February 2015.

[18] Ayelet Butman, Peter Clifford, Raphaël Clifford, Markus Jalsenius, Noa Lewenstein, Benny Porat, Ely Porat, and Benjamin Sach. Pattern matching under polynomial transformation. *SIAM J. Comput.*, 42:611–633, 2013.

[19] Timothy M. Chan. All-pairs shortest paths with real weights in o(n3/ log n) time. In *Proceedings of the 9th International Conference on Algorithms and Data Structures*, WADS'05, pages 318–324, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer-Verlag.

[20] Timothy M. Chan. More algorithms for all-pairs shortest paths in weighted graphs. In *Proceedings of the Thirty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '07, pages 590–598, New York, NY, USA, 2007. ACM.

[21] Timothy M. Chan. More logarithmic-factor speedups for 3sum, (median,+)-convolution, and some geometric 3sum-hard problems. In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '18, pages 881–897, Philadelphia, PA, USA, 2018. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[22] Shiri Chechik, Daniel H. Larkin, Liam Roditty, Grant Schoenebeck, Robert E. Tarjan, and Virginia Vassilevska Williams. Better approximation algorithms for the graph diameter. In *Proceedings of the Twenty-fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '14, pages 1041–1052, Philadelphia, PA, USA, 2014. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[23] Kuan-Yu Chen, Ping-Hui Hsu, and Kun-Mao Chao. Approximate matching for run-length encoded strings is 3sum-hard. In Gregory Kucherov and Esko Ukkonen, editors, *Combinatorial Pattern Matching*, pages 168–179, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.

[24] Marek Cygan, Holger Dell, Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, Jesper Nederlof, Yoshio Okamoto, Ramamohan Paturi, Saket Saurabh, and Magnus Wahlström. On problems as hard as cnf-sat. *ACM Trans. Algorithms*, 12(3):41:1–41:24, May 2016.

[25] Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, Joham M. M. van Rooij, and Jakub Onufry Wojtaszczyk. Solving connectivity problems parameterized by treewidth in single exponential time. In *Proceedings of the 2011 IEEE 52Nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS '11, pages 150–159, Washington, DC, USA, 2011. IEEE Computer Society.

[26] Mark de Berg, Marko M. de Groot, and Mark H. Overmars. Perfect binary space partitions. *Computational Geometry*, 7(1):81 – 91, 1997.

[27] Wlodzimierz Dobosiewicz. A more efficient algorithm for the min-plus multiplication. *International Journal of Computer Mathematics*, 32(1-2):49–60, 1990.

[28] Jeff Erickson. Lower bounds for linear satisfiability problems. In *Proceedings of the Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '95, pages 388–395, Philadelphia, PA, USA, 1995. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[29] Robert W. Floyd. Algorithm 97: Shortest path. *Commun. ACM*, 5(6):345–, June 1962.

[30] M. Fredman. New bounds on the complexity of the shortest path problem. *SIAM Journal on Computing*, 5(1):83–89, 1976.

[31] Ari Freund. Improved subquadratic 3sum. *Algorithmica*, 77(2):440–458, Feb 2017.

[32] Anka Gajentaan and Mark H. Overmars. On a class of o(n2) problems in computational geometry. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 5(3):165–185, October 1995.

[33] Omer Gold and Micha Sharir. Improved Bounds for 3SUM, k-SUM, and Linear Degeneracy. *arXiv e-prints*, page arXiv:1512.05279, December 2015.

[34] Allan Grønlund and Seth Pettie. Threesomes, Degenerates, and Love Triangles. *arXiv e-prints*, page arXiv:1404.0799, April 2014.

[35] Yijie Han. Improved algorithm for all pairs shortest paths. *Information Processing Letters*, 91(5):245 – 250, 2004.

[36] Yijie Han. An o(n3(log log n/log n)5/4) time algorithm for all pairs shortest path. *Algorithmica*, 51(4):428–434, Aug 2008.

[37] Yijie Han and Tadao Takaoka. An o(n3 loglogn/log2n) time algorithm for all pairs shortest paths. In Fedor V. Fomin and Petteri Kaski, editors, *Algorithm Theory – SWAT 2012*, pages 131–141, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.

[38] Edward A. Hirsch. Two new upper bounds for sat. In *Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '98, pages 521–530, Philadelphia, PA, USA, 1998. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[39] Russell Impagliazzo and Ramamohan Paturi. On the complexity of k-sat. *Journal of Computer and System Sciences*, 62(2):367 – 375, 2001.

[40] Richard M. Karp. *Reducibility among Combinatorial Problems*, pages 85–103. Springer US, Boston, MA, 1972.

[41] Tsvi Kopelowitz, Seth Pettie, and Ely Porat. 3sum hardness in (dynamic) data structures. *CoRR*, abs/1407.6756, 2014.

[42] Mihai Patrascu. Towards polynomial lower bounds for dynamic problems. In *Proceedings of the Forty-second ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '10, pages 603–610, New York, NY, USA, 2010. ACM.

[43] Ramamohan Paturi, Pavel Pudlák, Michael E. Saks, and Francis Zane. An improved exponential-time algorithm for k-sat. *J. ACM*, 52(3):337–364, May 2005.

[44] Liam Roditty and Virginia Vassilevska Williams. Fast approximation algorithms for the diameter and radius of sparse graphs. In *Proceedings of the Forty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '13, pages 515–524, New York, NY, USA, 2013. ACM.

[45] Barna Saha. Language edit distance and maximum likelihood parsing of stochastic grammars: Faster algorithms and connection to fundamental graph problems. In *Proceedings of the 2015 IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, FOCS '15, pages 118–135, Washington, DC, USA, 2015. IEEE Computer Society.

[46] Uwe Schöning. A probabilistic algorithm for k-sat and constraint satisfaction problems. In *Proceedings of the 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS '99, pages 410–, Washington, DC, USA, 1999. IEEE Computer Society.

[47] Michael Soss, Jeff Erickson, and Mark Overmars. Preprocessing chains for fast dihedral rotations is hard or even impossible. *Computational Geometry*, 26(3):235 – 246, 2003.

[48] Tadao Takaoka. A new upper bound on the complexity of the all pairs shortest path problem. *Information Processing Letters*, 43(4):195 – 199, 1992.

[49] Tadao Takaoka. A faster algorithm for the all-pairs shortest path problem and its application. In Kyung-Yong Chwa and J. Ian J. Munro, editors, *Computing and Combinatorics*, pages 278–289, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Berlin Heidelberg.

[50] Virginia Vassilevska Williams and R. Ryan Williams. Subcubic equivalences between path, matrix, and triangle problems. *J. ACM*, 65(5):27:1–27:38, August 2018.

[51] Uri Zwick. A slightly improved sub-cubic algorithm for the all pairs shortest paths problem with real edge lengths. In Rudolf Fleischer and Gerhard Trippen, editors, *Algorithms and Computation*, pages 921–932, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Berlin Heidelberg.