

Príklad použitia Pólyovej vety

Mišo Forišek

<misof@mfnotes.ksp.sk>
Department of Computer Science
Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics
Comenius University, Bratislava, Slovakia

Jún 2007

1 Zadanie

Chceme náhrdelník, na ktorom bude $n = 20$ guličiek. Tieto guličky môžu byť sklené (cena 1 zlatka), perlové (2 zlatky), topásové (3 zlatky), rubínové (3 zlatky) alebo diamantové (5 zlatiek).

Kolko rôznych náhrdelníkov s cenou do 47 zlatiek existuje?

2 Nazvime si objekty

Pozície na náhrdelníku si po obvode očísľujeme od 1 do n . Množinu pozícií budeme značiť X .

Množinu typov guličiek (v ďalšom texte budeme pre jednoduchosť hovoriť „farieb“) označíme Y . V našom prípade môžeme písať $Y = \{s, p, t, r, d\}$.

Všimnite si, že každé umiestnenie guličiek na náhrdelník je vlastne nejaká funkcia z X do Y – každému miestu priradíme farbu. Množinu všetkých ofarbení teda môžeme značiť Y^X .

Samozrejme, keďže náhrdelník môžeme otáčať a preklápať, nie všetky ofarbenia budeme považovať za navzájom rôzne.

Každej farbe priradíme váhu, ktorá bude zodpovedať cene zo zadania. Bude teda $w(s) = 1$, $w(p) = 2$, $w(t) = 3$, $w(r) = 3$ a $w(d) = 5$. Teraz vieme povedať váhu pre každé ofarbenie – váha ofarbenia je jednoducho súčet váh použitých farieb. Napríklad každé ofarbenie f , ktoré použije 18 sklených a 2 topásové guličky, má váhu 24.

3 Grupa permutácií náhrdelníka

Začneme s tým, že si pozrieme na grupu permutácií, ktorá popisuje, aké transformácie môžeme robiť s náhrdelníkom.

Táto grupa má názov dihedrálna grupa a značíme ju D_n . Nie je ťažké nahliadnuť, že obsahuje práve $2n$ permutácií – n rotácií (vrátane identity) a n „rotácií s preklopením“.

4 Mocninová grupa permutácií

Kedy považujeme dve ofarbenia f a g za ekvivalentné? Vtedy, keď existuje v D_n taká permutácia π , že $\forall x \in X; g(x) = f(\pi(x))$.

Na toto sa môžeme dívať aj takto: keď mám ofarbenie f , tak každá permutácia π z D_n mi určuje nejaké ofarbenie g , ktoré je s ním ekvivalentné.

(Môže sa stať, že rôzne permutácie nám dajú to isté g , napr. ak f farbí všetko tou istou farbou.)

Každý permutácií π množiny prvkov X teda zodpovedá permutácia $\bar{\pi}$ na množine funkcií Y^X .

Orbity permutácie $\bar{\pi}$ zodpovedajú množinám navzájom ekvivalentných ofarbení.

Porátať všetky ofarbenia teda vieme tak, že zistíme počet orbít $\bar{\pi}$.

V rámci každej orbity majú všetky ofarbenia pochopiteľne tú istú cenu. Ak nás zaujíma počet rôznych ofarbení s nejakou cenou, stačí teda zistiť počet orbít s dotýčnou cenou.

5 Značenie ku Pólyovej vete

Nech C_k je počet orbít $\bar{\pi}$, ktoré majú váhu k .

Nech $C(x) = \sum_k C_k x^k$ je generujúca funkcia enumerujúca tieto počty.

Nech $c(x)$ je generujúca funkcia enumerujúca počty prvkov s X s jednotlivými váhami. V našom prípade bude $c(x) = x + x^2 + 2x^3 + x^5$.

Nech $Z(A)$ je cyklový index grupy permutácií A nad symbolickými premennými s_k .

Nech $Z(A, c)$ je funkcia premennej x , ktorú dostaneme zo $Z(A)$ tak, že za každú premennú s_k dosadíme polynóm $c(x^k)$.

Pólyova veta: $C(x) = Z(A, c)$.

6 Potrebujeme cyklový index D_{20}

$$\begin{aligned}
 Z(D_{20}) &= \frac{1}{40} (s_1^{20} + s_2^{10} + 2s_4^5 + 4s_5^4 + 4s_{10}^2 + 8s_{20} + 10s_1^2 s_2^9 + 10s_2^{10}) \\
 \text{Out}[12] &= x^{20} + x^{21} + 12x^{22} + 53x^{23} + 356x^{24} + 1745x^{25} + 8306x^{26} + \\
 &> 33945x^{27} + 127439x^{28} + 431291x^{29} + 1346396x^{30} + 3874774x^{31} + \\
 &> 10389585x^{32} + 26024427x^{33} + 61272910x^{34} + 135997104x^{35} +
 \end{aligned}$$

> 285732298 x + 569747483 x + 1081470500 x + 1958415333 x +

> 3391323142 x + 5625981909 x + 8957832982 x + 13710104109 x +

> 20200934123 x + 28690788635 x + 39327633332 x + 52082625052 x +

> 66708319147 x + 82705968017 x + 99344042098 x + 115692576168 x +

> 130721168683 x + 143388463786 x + 152784525048 x +

> 158211349492 x + 159301267008 x + 156015141094 x +

> 148690260500 x + 137927920922 x + 124584487042 x +

> 109581247108 x + 93899571392 x + 78374566386 x + 63753792172 x +

> 50518765850 x + 39025811128 x + 29361978046 x + 21542870552 x +

> 15385703862 x + 10720219664 x + 7262831612 x + 4804309066 x +

> 3083827766 x + 1935935044 x + 1175001236 x + 699860068 x +

> 400371328 x + 226327080 x + 121417844 x + 65246528 x +

> 32553936 x + 16699576 x + 7644936 x + 3778407 x + 1551919 x +

> 751716 x + 267189 x + 130924 x + 37971 x + 19718 x +

> 4269 x + 2583 x + 361 x + 276 x + 20 x + 31 x + x +

98 100
> 2 x + x
Dokopy 176122097243

7 Dosadíme

Disclaimer. Tieto poznámky môžete voľne používať na ľubovoľné nekomerčné účely. Na akékoľvek komerčné využitie je potrebný súhlas autora. Ak v mojich poznámkach objavíte nejakú chybu, prípadne ich nejakým spôsobom viete doplniť, budem rád, ak mi dáte vedieť.

Pre potreby prípadného citovania má tento kus poznámok evidenčné číslo MF-0010.