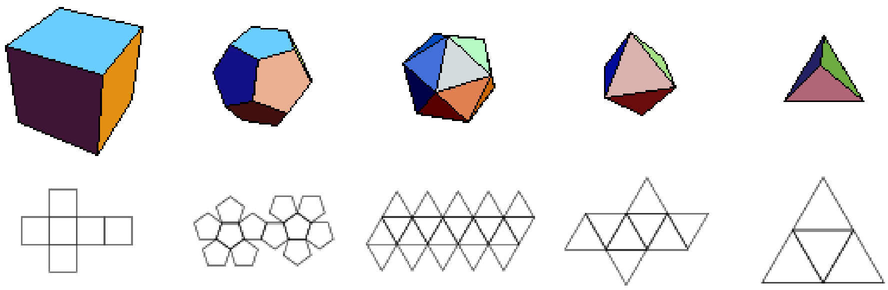
(Nielen) O platónovských telesách

Mišo Forišek

<misof@mfnotes.ksp.sk>
Department of Computer Science
Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics
Comenius University, Bratislava, Slovakia

Jún 2003



Obr. 1: Platónovské telesá.

1 História

Ako už naznačuje ich samotný názov, platónovské telesá, tiež nazývané pravidelné mnohosteny, boli známe už matematikom v antickom Grécku. Sú to mnohosteny, ktorých steny tvoria pravidelné mnohouholníky a ich susedné steny zvierajú rovnaké uhly. Dnes dobre poznáme fakt, že týchto mnohostenov je práve päť: štvorsten, kocka, osemsten (oktaéder), dvanásťsten (dodekaéder) a dvadsaťsten (ikosaéder). Zobrazené sú na obrázku 1.

Ako prvý tieto telesá popísal Platón (427-347 p.n.l.) vo svojom diele *Timaeus*[1] približne v roku 350 p.n.l., preto nesú jeho meno. Podľa Platóna štvorsten predstavuje oheň, kocka zem, dvadsaťsten vodu, osemsten vzduch a dvanásťsten éter, materiál, z ktorého sú nebo a hviezdy. Poslednú „knihu“[2] svojho diela *Stoicheia*[3] venoval Euklides (približne 325-270 p.n.l.) práve platónovským telesám. Posledné tvrdenie tejto knihy a zároveň celých Základov je dôkaz, že okrem piatich pravidelných mnohostenov objavených Platónom žiadne iné nemôžu existovať. Grécky filozof Proklos (412-485 n.l.) sa domnieval, že práve tento dôkaz bol cieľom, ku ktorému smerujú celé Základy a ktorý podnietil Euklida k štúdiu a formalizácií geometrie.

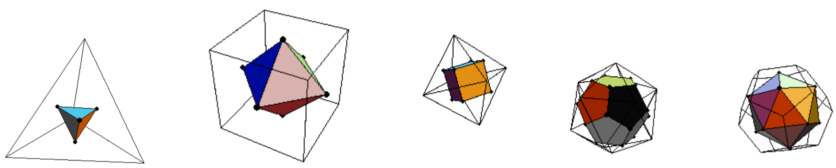
1. slovenský preklad: Timaios, jeden z dialógov
2. V skutočnosti išlo o kapitolu, kniha je zaužívaný archaický názov.
3. anglický preklad: Elements, slovenský preklad: Základy

2 Vlastnosti

Ako väčšina „matematicky pekných“ objektov, aj platónovské telesá boli počas vyše dvadsiatich storočí podrobne skúmané množstvom matematikov a vyšlo najavo, že majú veľa zaujímavých vlastností.

Pre počet vrcholov V, hrán E a stien F platí vzťah $V + F = E + 2$. Tento vzťah bol omnoho neskôr dokázaný Leonardom Eulerom (a nezávisle na ňom Descartom) pre všetky konvexné mnohosteny a pre rovinné grafy a následne inými matematikmi ďalej zovšeobecnený do viacerých rozmerov a iných topologických priestorov.

Ľahko si všimneme, že z každého vrcholu platónovského telesa vychádza rovnako veľa hrán aj stien, že všetky vrcholy tekéhoto telesa ležia na jednej guľovej ploche, či trebárs že keď pospájame stredy hrán vychádzajúcich z jedného vrcholu, dostaneme pravidelný mnohouholník. Uvedieme ešte jednu, možno najprekvapivejšiu z ich vlastností – dualitu.



Obr. 2: Duálne mnohosteny.

Ku každému konvexnému mnohostenu sa dá zostrojiť duálny mnohosten tak, že za vrcholy duálneho mnohostenu zvolíme stredy stien pôvodného. Ako vyzerá duálny mnohosten platónovského telesa? Prekvapivo, je to opäť platónovské teleso – duál štvorstenu je opäť štvorsten, duál kocky je osemsten (a naopak duál osemstenu je kocka), podobne aj dvanásť- a dvadsaťsten sú navzájom duálne.

Všimnime si teraz napríklad guľu vpísanú pôvodnému mnohostenu. Tá sa zjavne dotýka stien práve v ich stredoch, a teda je zároveň opísanou guľou nami zostrojeného duálneho mnohostenu. Alebo napríklad zoberme dvanásťsten a zostrojme k nemu duálny dvadsaťsten. Ten bude mať samozrejme kratšie hrany ako pôvodný dvanásťsten. Dá sa spočítať, že pomer ich dĺžok je práve „zlatý rez“, číslo, ktoré sa v matematike vyskytuje neuveriteľne často na tých najprekvapivejších miestach, a to nielen v geometrií (uveďme napríklad reťazové zlomky či Euklidov algoritmus na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa).

V podobnom duchu by sa dalo pokračovať takmer do nekonečna, napríklad spomenúť že vhodných osem vrcholov pravidelného dvanásťstenu (alebo ekvivalentne stredov stien dvadsaťstenu) tvorí kocku, že keď v dvanásťstene zoberieme dve susedné steny a dve k nim protiľahlé, ich stredy tvoria zlatý obdĺžnik, a tak ďalej. Egyptské pyramídy blednú závisťou.

3 Súčasnosť

Ako sme už naznačili na začiatku predchádzajúcej časti, matematici sa zriedkakedy uspokoja so skúmaním už známeho, práve naopak, snažia sa známe výsledky zovšeobecniť. Ale prakticky vo všetkých oblastiach matematika narážala na problémy s nedostatočným aparátom – takmer všetko, čo sa dalo dokázať pomocou poznatkov starých Grékov, už bolo dokázané a nové postupy neexistovali. Dlhé storočia sa už spomínané Euklidove Základy považovali za dokonalé, geometria sa vyučovala podľa nich a zveličene povedané čokoľvek, čo v nich nebolo, odmietala (takmer neexistujúca) matematická obec prijať.[4]

Druhý zlatý vek matematiky[5] začal v sedemnástom storočí. Vtedy sa hlavne vďaka zmenám v spoločnosti mohla po neuveriteľne dlhej dobe matematika (vrátane geometrie) opäť začať rozvíjať. Čo nového sa odvtedy zistilo v oblasti súvisiacej s platónovskými telesami?

Ako prvého musíme uviesť už spomínaného všestranného matematika Leonarda Eulera (1707-1783). Ten pri riešení slávneho problému o mostoch mesta Kráľovec[6] založil teóriu rovinných grafov a neskôr objavil tvrdenie, známe ako Eulerov vzorec, ktoré hovorí o súvise medzi počtom ich vrcholov, stien a hrán. Toto tvrdenie prvýkrát dokázal Legendre, a to až o takmer 50 rokov. Keďže každý konvexný mnohosten vieme premietnuť na jemu opísanú guľu a z nej do roviny, platí tento Eulerov výsledok aj pre konvexné mnohosteny. Význam Leonarda Eulera v matematike snáď najlepšie charakterizuje veta, ktorú o ňom hovorieval Laplace svojim študentom: „Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous!“[7]

Ludwig Schläfli (1814-1895) síce najskôr vyštudoval teológiu, no neskôr sa začal venovať matematike, a to hlavne geometrii a aritmetike. V geometrii ho zaujímali hlavne otázky súvisiace s topológiou. Zaviedol symboly, pomocou ktorých sa dodnes klasifikujú pravidelné mnohosteny v ľubovoľne veľa dimenziách. Podarilo sa mu zovšeobecniť (nie však dokázať) Eulerov vzorec pre konvexné mnohosteny v ľubovoľne veľa rozmernom priestore.

S dôkazom neskôr prišiel francúzsky matematik Henri Poincaré (1845-1912). Jeho asi najznámejším prínosom je tvrdenie z topológie, známe pod názvom Poincaré conjecture. Toto tvrdenie (presnejšie jeho dôkaz) bolo americkou spoločnosťou Clay Mathematics Institute zaradené na zoznam problémov, za ktorých vyriešenie je odmena 1 milión dolárov. V roku 2002 publikoval G. Perelman svoj dôkaz ešte všeobecnejšieho tvrdenia, momentálne sa čaká, či sa v ňom nenájde chyba.

Posledným, koho spomenieme, bude najvýznamnejší geometer minulého storočia – Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), známy ako Donald Coxeter. Dokončil dielo, ktoré začal Euklides vo svojich Základoch pred vyše 2000 rokmi – podarilo sa mu úplne klasifikovať pravidelné mnohosteny v ľubovoľne veľa rozmernom priestore. Okrem iného ukázal, že vo viac ako štyroch rozmeroch existujú len tri mnohosteny – analógie trojrozmernej kocky, štvorstenu a osemstenu – nazývané hyperkocka, simplex a krížový mnohosten.[8]

4. Až raz prišiel Lobačevskij, . . . ale to už je iný príbeh.
5. Za prvý sa samozrejme považuje antické Grécko
6. anglický názov: The bridges of Königsberg
7. doslovný preklad: čítajte Eulera, to je náš pán vo všetkom
8. anglický preklad: cross polytope

4 Literatúra

Pri zostavovaní referátu som čerpal hlavne z nasledovných zdrojov:

- Eric Weisstein's World of Mathematics,
  `http://mathworld.wolfram.com/`
- Euclid's Elements,
  `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`
- FILIT – otvorená filozofická encyklopédia,
  `http://www.uniba.sk/filit/`
- Geometry – the online learning center,
  `http://www.geometry.net/`
- The MacTutor History of Mathematics archive,
  `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`
- The Perseus Digital Library,
  `http://www.perseus.tufts.edu/`