MF-0001

Párovania v bipartitnom grafe

Mišo Forišek

<misof@mfnotes.ksp.sk>
Department of Computer Science
Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics
Comenius University, Bratislava, Slovakia

jeseň 2003

1 Prerequisities

Vedieť naprogramovať ľubovoľné prehľadávanie a Dijkstrov alg. na *zostrojenie* najkratšej cesty. Vedieť, prečo Dijkstra funguje len pre nezáporné hrany a prečo predstavujú problém cykly zápornej dĺžky.

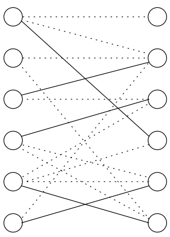
2 Definícia bipartitného grafu a párovania

Vrcholy V, partície A, B. Striedavá a zlepšujúca cesta.

3 Bergeho veta

Dané párovanie je maximálne iff neexistuje zlepšujúca cesta.

Dôkaz: xor matchingov má stupne ≤ 2 – kružnice a cesty. (Modré a červené hrany!)



4 Hľadáme zlepšujúce cesty

Zoberieme všetky nematchnuté vrcholy A, z nich prehľadávame do šírky.

4.1 Hopcroft-Karp

Toto prehľadávanie robíme len kým neskončíme hĺbku, v ktorej sme prvýkrát narazili na nematchnutý vrchol z B. Teraz pospájame konce tak, aby sme dostali maximálnu (nie nutne najväčšiu!) množinu zlepš. ciest a zlepšíme.

Spájanie koncov: vyberieme si koniec, nájdeme cestu z neho, tú zakapeme. Tým mohli zakapať cesty z niektorých koncov do začiatkov. Preto navyše od každého vrcholu na ceste, ktorý už má indegree 0 rekurzívne dodola kapeme.

4.1.1 Časová zložitosť

Dokážeme, že po každom kroku sa dĺžka najkratšej zlepš. cesty zväčší (aspoň o 2, lebo je nepárna). Všimnime si situáciu po $\sqrt{N}$ krokoch. Každá zlepš. cesta má teraz dĺžku aspoň $2\sqrt{N}+1$. Zoberme náš matching M a max. matching M_m, spravme xor. Dostaneme niekoľko kružníc a niekoľko disjunktných zlepš. ciest. Každá z nich je dĺžky $\geq 2\sqrt{N}+1$, preto ich je nanajvýš $\sqrt{N}/2$. To ale znamená, že $|M_m| - |M| \leq \sqrt{N}/2$, a teda už bude len $O(\sqrt{N})$ krokov.

5 Váhované párovanie

5.1 Bellman-Ford

Pamätáme si vzdialenosť do každého vrcholu, $N-1$ krát prebehneme hrany. (Note: funguje s zápornými hranami, vie detekovať záporné cykly.) Čas $O(MN)$.

5.2 Myšlienka

Najdrahšie párovanie s $K+1$ hranami vyrobíme z najdrahšieho párovania s K hranami najdrahšou zlepšujúcou cestou.

Dôkaz: Nech L je optimálne s $K+1$ hranami, M s K hranami. Consider xor. Cykly ignorujeme – musia mať sum=0. Nech teraz P_L sú cesty s viac hranami z L, P_M sú cesty s viac hranami z M. Zjavne $|P_L| = |P_M| + 1$. Nech p, q sú dve cesty z týchto množín. Consider M. Preklopiť p a q sa nemôže oplatiť. Consider L. Preklopiť p a q sa nemôže oplatiť. Teda súčet p a q je 0. Zahodíme, pokračujeme, ostane nám jedna cesta v P_L.

Zostrojíme orientovaný graf: hrany z párovania dostanú kladnú cenu a orientáciu z B do A, ostatné naopak. Tento graf nemá záporné cykly (potom by sme totiž vedeli zlepšiť váhu párovania). Chceme najkratšiu cestu z nematch. vrcholu v A do nematch. vrcholu v B – pustíme Bellman-Forda. Výsledok: $O(MN^2)$. Ide aj lepšie.

6 Königova a Hallova veta

König: min. vrcholové pokrytie = max. matching.

Jedna nerovnosť zrejmá. Ako zvoliť pokrytie? Nech U sú nematch. vrcholy A. Nájdime vrcholy, do ktorých z U vedie striedavá cesta. Pre každú hranu: ak sa vieme dostať do jej konca z B, vyberieme ho, inak vyberieme opačný. Hrany matchingu sme pokryli, čo so zvyškom? Ak je ľavý nepokrytý, zjavne sme vybrali pravý. Ak je pravý nepokrytý: museli sme vybrať ľavý, lebo by sme mali zlepš. cestu. Ak sú oba nepokryté spor. Ak sú oba pokryté, majú obe hrany matchingu vybratý ten istý koniec.

Hall: Graf má perfect matching iff každá podmnožina A má aspoň toľko susedov, ako je veľká.

Jeden smer zjavný, druhý sporom: Majme max. matching, nech nie je perfect. Nech u je nematchnutý vrchol v A. Zoberme všetky vrcholy, do ktorých vedie z u striedavá cesta. Zjavne sú všetky matchnuté, inak augment. Tie z nich, čo sú v A ozn. S, ostatné T. Do každého vrcholu S okrem u sme prišli pár. hranou z vrcholu v T, preto $|S| = |T| + 1$, ale T sú práve všetci susedia S, spor.

König inak. Spravme si bin. maticu pre graf, chceme dok., že max. počet nezáv. jednotiek = min. počet liniek pokrývajúcich všetky 1.

7 Aplikácie

7.1 Latinské štvorce

Doplniť do latinského obdĺžnika riadok: hľadanie matchingu v bipart. grafe. Podľa Hallovej vety vždy existuje.

7.2 Abeceda z Relaxu

Zostrojíme graf – na každé písmeno 26 best slov, vhodné váhy, nájdeme najdrahší matching.