Skúška z Kombatu 2 19.12.2007
+zdarma náznaky riešení
spísal Lukáš Poláček

Príklady 3 a 5 označil Olejár ako ľahké. Kto chcel rýchlo A a ponáhľal sa, stačilo ak zrátal všetky okrem týchto dvoch. Okrem toho sa niekedy oplatí Olejára opýtať na nejaký integrál alebo metódu riešenia. Celkom rád poradí :-)

1.
$$g_0 = 0, g_1 = 1$$
$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_k \binom{n}{k} g_k g_{n-k}$$

Riešenie: Pobúchame a vyjde $G^2(x) - (1 + 2x)G(x) + x = 0$. Z toho dostávame dve možnosti $G(x) = \frac{1+2x\pm\sqrt{1+4x^2}}{2}$. Vyberieme si možnosť s mínusom, lebo $g_0 = 0$. Nakoniec $g_{2n} = -\binom{1/2}{n} 2^{2n-1}(2n)! = (-1)^n \cdot (2n - 3)!!^2 \cdot (2n-1)2^{2n-1}$ pre $n > 0$.

2.
$$a_0 = 1, a_1 = 3$$
$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} ka_k$$

Riešenie: Spravme rozdiel $a_{n+1} - a_n$. Dostaneme tvar $a_{n+1} = (n + 1)a_n$ (pre $n \geq 2$). Teraz už ani nepotrebujeme generujúce funkcie. Výsledkom je $a_n = 3n!/2$.

Ak by sme predsa len chceli vyskúšať exponenciálne generujúce funkcie, ide to takto: $a_n = na_{n-1} + [n = 0] + 2[n = 1] - 3[n = 2]$, z toho dostaneme $A(x) = \frac{1+2x-3x^2/2}{1-x} = (\frac{3}{1-x} + 3x - 1)/2$. Teda $a_n = 3n!/2$ pre $n \geq 2$.

3.
$$\sum_k \binom{n}{3k+2}$$

Riešenie: $A(z) = (1 + z)^n$ a $B(z) = (A(z) + A(z\varphi_1)\varphi_1 + A(z\varphi_2)\varphi_2)/3$, kde $\varphi_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Potom už len stačí dosadiť $z = 1$ do $B(z)$.

4.
$$\sum_{k=0}^{\lambda n} \binom{n}{k}^2 \quad \text{(asymptoticky odhadnúť)}, \lambda < \frac{1}{2}$$

Riešenie: Podobný príklad sa robil na hodine.

$$\binom{n}{\lambda n - k} = \binom{n}{\lambda n} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k \frac{(1 - k/\lambda n) \ldots (1 - 1/\lambda n)}{(1 + k/(n - \lambda n)) \ldots (1 + 1/(n - \lambda n))}$$

.

$$\sum_{k=0}^{\lambda n} \binom{n}{k}^2 \sim \binom{n}{\lambda n} \sum_{k=0}^{\lambda n} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^{2k} \sim \binom{n}{\lambda n} \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2}$$

5.

$$\sqrt[3]{n^3+4n-1} - \sqrt[2]{n^2-n+1} \quad O(n^{-2})$$

6.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \quad O(n^{-3})$$

Riešenie: Použijeme Euler-Maclaurina. $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$. Mne to vyšlo $\frac{1}{4\pi n} + \frac{1}{4n^2} + \frac{3}{24n^4} + O(n^{-5})$.