Priklady

1. Kolko roznych vektorov obsahuje podpriestor dany dvoma vektormi $[1,2,1]$ a $[2,1,1]$ v Z_3.

2. Dokazte: Ak $S \cap T = S \cap T'$, $S + T = S + T'$, $T \subseteq T'$, tak $T = T'$

3. Nech
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
Nech
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
Najdite aspon jednu maticu X tak, aby platilo $A \cdot X = B$.

4. Dane je zobrazenie $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$, kde
$$A_\varphi = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
Najdite jeho jadro a obraz.

5. Nech $(G, \circ)$ je konecna grupa, ktora ma parny pocet prvkov. Dokazte, ze v G existuje prvok g, ktory je rozny od neutralneho prvku e tejto grupy s vlastnostou $g \circ g = e$

6. Zistite, ci su dane podmnoziny vektoroveho priestoru podpriestormi $V_3(R)$, pripadne $R^{<0,1>}$:
   (a) $A_1 = \{(a,b,c); a+b+c=0\}$
   (b) $A_2 = \{(a,b,c); |a| = |b|\}$
   (c) $A_3 = \{f; f \in R^{<0,1>}; |f(x)| \geq 1\}$

7. Nech vektory $\alpha, \beta, \gamma \in V(F)$ a nech
$$c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \beta + c_3 \cdot \gamma = 0$$
, pricom $c_1, c_2, c_3 \in F$ su take, ze $c_1 \cdot c_3 \neq 0$. Dokazte, ze $[\alpha, \beta] = [\beta, \gamma]$.

8. Nech
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
je matica nad Z_5. Zistite, pre kolko vektorov $\gamma \in V_3(Z_5)$ rovnica $(x,y,z) \cdot A^T = \gamma$ nema ziadne riesenie.

9. Nech φ je linearne zobrazenie $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$, pricom
$$(1,2,3,1)\varphi = (2,0,1,0)$$
$$(0,2,3,1)\varphi = (1,2,0,3)$$
$$(1,0,3,4)\varphi = (3,2,1,0)$$
$$(4,1,3,2)\varphi = (2,3,1,1)$$
Ak existuje, najdite maticu linearneho zobrazenia φ^{-1}.

10. Nech

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je matica nad polom $(R, +, \cdot)$ ukazte

(a) ze existuje nekonecne vela $\gamma \in V_3(R)$ takych, ze rovnica $(x, y, z) \cdot A^T = \gamma$ nema riesenie

(b) ze existuje nekonecne vela $\gamma \in V_3(R)$ takych, ze rovnica $(x, y, z) \cdot A^T = \gamma$ ma riesenie

11. Nech S, T su podpriestory konecnorozmerneho priestoru $V(F)$. Dokazte, ze existuju podpriestory $A, B, C \subseteq V(F)$ take, ze

$$S = A \oplus B$$
$$T = A \oplus C$$
$$B \cap C = \emptyset$$

12. Nech su vektrory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V(F)$ linearne nezavisle a nech $\beta \neq \vec{0}$. Dokazte, ze z vektorov $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (v tomto poradi) mozno najviac jeden pisat ako linearnu kombinaciu predchadzajucich.

13. Kolko je roznych linearnych zobrazeni $\varphi : V_3(Z_5) \to V_7(Z_5)$ Kolko je vsetkych zobrazeni $\varphi : V_3(Z_5) \to V_7(Z_5)$

14. Nech $\alpha = (1, 3, 7), \beta = (2, 1, 2), \gamma = (1, 3, 1), \delta = (4, 3, 2)$. Najdite skalary $a, b, c, d \in R$ tak, aby neboli vsetky nulove a aby $a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + d \cdot \delta = \vec{0}$.

15. Najdite bazu obrazu a jadra linearneho zobrazenia daneho maticou A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$.

16. Najdite inverznu maticu k matici A nad polom Z_5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Nech $T = [(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 4, 0)]$ je podpriestorom $V_3(Z_5)$. Ak existuju, najdite 2 rozne podpriesotory S_1, S_2 take, ze $T \oplus S_1 = V_3(Z_5)$ a $T \oplus S_2 = V_3(Z_5)$.

18. Zistite, ci vektory $(1, 3, 1, 4), (3, 2, 4, 3), (2, 3, 1, 1)$ mozno doplnit do bazy $V_4(Z_5)$. Ak ano, urobte to. Kolkymi sposobmi sa to da urobit?

19. Zistite, ci nasledujuce matice tvoria bazu vektoroveho priestoru vsetkych matic typu 2×2 nad polom R:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

20. Moze byt mnozina vsetkych vektorov tvaru $(a + 3b - 1, 3a + 4b + 5, 4b + 1, -a - 3) \in V_4(R)$, kde $a, b \in R$ mnozinou vsetkych rieseni nejakeho systemu linearnych rovnic? Ak ano, najdite ho.

21. Moze byt mnozina vsetkych vektrorov tvaru

$$(2a + 3b + 1, a + 2, b - 1, 3a - b + 7) \in V_4(R)$$

, kde $a, b \in R$, mnozinou vsetkych rieseni nejakeho homogenneho systemu linearnych rovnic? Ak ano, najdite ho.

22. Nech A je matica $n \times n$ nad polom F. Dokazte, ze $\exists m \in N$ a koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_m \in F, c_m \neq 0$ tak, ze

$$c_0 \cdot I + c_1 \cdot A + c_2 \cdot A^2 + \ldots + c_m \cdot A^m = \vec{0}$$

23. Nech $\varphi : V_3(R) \to V_2(R)$ je take linearne zobrazenie, ze

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in R : (x_1, x_2, x_3)\varphi = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

Nech zobrazenie $\psi : V_2(R) \to V_3(R)$ je dane predpisom

$$(1, 2)\psi = (1, -1, 1)$$

Je zobrazenie $\varphi \circ \psi$ alebo $\psi \circ \varphi$ bijektivne?

Skuska:

1. Definicie

   - Baza
   - Dimenzia priestoru
   - Jadro, obraz zobrazenia
   - Elementarne riadkove operacie
   - Grupa, pole
   - Sucet a priamy sucet podpriestorov
   - Hodnost matice
   - Linearne zobrazenie
   - Inverzna matica k matici
   - Riadkovo ekvivalentne matice

2. Dokazy

   - Steinitzova veta
   - Nech A, B, I su matice $n \times n$. Ak $A \cdot B = I$, tak existuje A^-1 a $A^-1 = B$.
   - Ak S je podpriestor $V_n(F)$, tak existuje homogenny system linearnych rovnic, ktoreho je S mnozinou vsetkych rieseni.
   - Ak e_1, e_2 su obojstranne neutralne prvky v grupe, tak $e_1 = e_2$.
   - Ak G je neprazdna mnozina a $\circ$ je asociativna binarna operacia a platia oba zakony o krateni, tak $(G, \circ)$ je grupa.
   - Dokazte, ze ak S, T su podpriestory $V(F)$, tak aj $S + T$ je podpriestor $V(F)$.
   - Nech A je matica $n \times n$. Dokazte, ze $h(A) = h(A^T)$
   - Nech $\circ$ je asociativna binarna operacia na mnozine $G \neq \emptyset$. Potom $(G, \circ)$ je grupa $\Leftrightarrow \forall a, b \in G$ ma rovnica $a \circ x = b$ riesenie a $\forall a, b \in G$ ma rovnica $y \circ a = b$ riesenie.
   - Nech $\varphi : V(F) \to V(F)$ je linearne zobrazenie, kde $V(F)$ je konecnorozmerny vektorovy priestor. Dokazte, ze φ je injektivne $\Leftrightarrow \varphi$ je surjektivne.

- Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je baza vektoroveho priestoru $V(F)$ a nech $\varphi : V(F) \to W(F)$ je linearne zobrazenie. Potom
  (a) φ je injekcia prave vtedy, ked $\alpha_1\varphi, \ldots, \alpha_n\varphi$ su linearne nezavisle.
  (b) φ je surjekcia prave vtedy, ked $[alfa_1\varphi, \ldots, \alpha_n\varphi] = W(F)$.
- Nech S, T su podpriestory. Comu sa rovna $d(S + T)$ a dokazte.
- Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je baza a $\beta_1, \ldots, \beta_k$ je baza $V(F)$. Dokazte, ze $n = k$.