MatAlýza – testíky z derivácií

Štandardný disclaimer

Tieto papiere **NEMAJÚ** slúžiť ako náhrada za riešenie príkladov. Príklady si najskôr skúste prerieišiť sami, ak niečo sami vymyslíte, omnoho ľahšie si to zapamätáte. Všetky výsledky sú bez akejkoľvek záruky, som len človek a občas sa mýlim. Ľubovoľné prejavy uznania a vďaky sú vítané.

Tento dokument sa naďalej (aj keď slimačím tempom, ale predsa) vyvíja. Pokiaľ v ňom nájdete chyby, budem vám vďačný, ak mi ich pošlete. Pokiaľ by ste doň chceli dopísať veľa nových vecí, zdrojáky sú vaše, len poprosím nechať v nich do budúcna moje meno. Pokiaľ je to možné, do rôznych online archívov študijných dokumentov neumiestňujte kópiu tohto dokumentu, ale linku naň, aby sa príliš nešírili rôzne staré verzie.

Táto verzia vznikla dňa **14. decembra 2003** (a je explicitne novšia od všetkých verzií, ktoré nemajú uvedený dátum).

1. Derivácia fcie $\operatorname{sgn}^3 x$ v 0 je:
☐ vlastná ☐ nevlastná ☐ neexistuje

Riešenie.
Je:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\operatorname{sgn}^3 x - \operatorname{sgn}^3 0}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{1-0}{x} = \infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\left(\frac{\operatorname{sgn}^3 x - \operatorname{sgn}^3 0}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0-}\frac{-1-0}{x} = \infty$$

teda $f'_-(0) = f'_+(0)$, preto existuje $f'(0)$ a je $f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = \infty$.

2. Má fcia $f(x) = \left\{ {x^{1/2} \leftarrow x\notin\mathbb{Q} \atop x^{3/2} \leftarrow x\in\mathbb{Q}} \right.$ v 0 vlastnú alebo nevlastnú deriváciu?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Nie, lebo príslušná limita neexistuje. Dôkaz: pre $x \in \mathbb{Q}_+$ je $\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}) = \lim_{x\to 0}\frac{x^{3/2}}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$ a pre $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ je $\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}) = \lim_{x\to 0}\frac{x^{1/2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$. Keby hľadaná limita existovala, obe limity pre tieto zúženia by sa jej rovnali. Keďže sú ale rôzne, limita neex., q.e.d.

3. Nech $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ je neohraničená diferencovateľná fcia. Je potom f' neohraničená?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Zjavne sú len dve možnosti, ako môže vyzerať f, keď je neohraničená, diferencovateľná a má def. obor $(0,1)$ – buď $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$, alebo naopak. BUNV nech je to takto. Ukážeme, že f' nie je zhora ohraničená, zdola sa ukáže rovnako.
Sporom. Nech je h horné ohraničenie f', zoberme ľubovoľné $x \in (0,1)$, nech $f(x) = y$. Určite existuje dosť malé x' také, že $f(x') > y + h$. Ale podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $c \in (x', x)$ také, že $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} > \frac{h}{x'-x} > h$, čo je spor.

4. Tvrdenie: "Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neohraničená diferencovateľná fcia taká, že $\forall x \in \mathbb{R}; f''(x) > 0$ a $f'(0) = f(0) = 1$. Potom $\forall x \neq 0; f(x) > x + 1$" je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Z druhej derivácie vidíme, že f je rýdzo konvexná a podmienka $f(x) > x+1$ je ekvivalentná s tým, že graf f leží celý nad dotyčnicou v bode 0. Táto skutočnosť ale z rýdzej konvexnosti a diferencovateľnosti f vyplýva pre všetky dotyčnice, teda aj pre dotyčnicu v 0, preto tvrdenie platí.

5. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 3x diferencovateľná fcia taká, že $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ a $\forall x; f^{(4)}(x) < 0$. Potom:
☐ f' má v 0 lokálne maximum ☐ f' má v 0 lokálne minimum
☐ f' rastie ☐ f' klesá
☐ f' je rýdzokonvexná ☐ f' je rýdzokonkávna
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
$\forall x; f^{(4)}(x) < 0 \Rightarrow f^{(3)}(x)$ klesá $\Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(f^{(3)}(x)) \Rightarrow$ na $(-\infty, 0)$ f'' rastie, na $(0, \infty)$ klesá $\Rightarrow \forall x \neq 0; f''(x) < 0 \Rightarrow f'$ klesá.

6. Nech 2x diferencovateľná fcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má lokálne maximum v bode 0, pričom $\forall x \in \mathbb{R}; f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ Potom :
☐ $f(0) \geq 0$ ☐ $f(0) \leq 0$
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Keďže je tam maximum, je $f'(x) = 0$, $f''(x) \leq 0$, preto $f(x) \geq 0$.

7. Nájdite 127. deriváciu funkcie $\frac{x^2+3x-4}{2x+1}$ a jej hodnotu v 0.

Riešenie.
Použijeme Leibnitzov vzorec, treba len tri sčítance tej sumy a vedieť vzorec pre deriváciu podielu. S tým si už ľahko odvodíme vzorce postupne $\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)} = 2^n.n! \cdot (\frac{1}{2x+1})^{n+1}$ (uhádneme z prvých 3 derivácii a dokážeme indukciou) a následne $f^{(100)} = \frac{2^{99}.98!}{(2x+1)^{101}} \cdot (20200x^2 + 60196x - 78902)$.

8. Nájdite všetky lokálne extrémy fcie $(x+1)^{10}e^{-x}$.

Riešenie.
Lokálny extrém môže byť len v bodoch, kde je prvá derivácia nulová a kde neexistuje. Prvá derivácia fcie zo zadania je $e^{-x}(x+1)^9(9-x)$, tá je všade definovaná a nulová je pre $x = -1$ a $x = 9$. Čo je kde? Spravíme druhú deriváciu, tá je $e^{-x}(x+1)^8(71 - 18x + x^2)$, pre $x = -1$ je teda kladná, pre $x = 9$ záporná. Preto má daná fcia v 1 lok. minimum a v 9 lok. maximum.

9. Do voľného priestoru nakreslite graf fcie $\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$.

Riešenie.
Treba spraviť prvé dve derivácie, z prvej vidíme rastúcosť, z druhej konvexnosť, a navyše zrátať body, v ktorých pretína osi.

10. Nájdite 27. deriváciu funkcie $x^2 \ln x$ a jej hodnotu v 1.

Riešenie.
To isté ako o pár uloh skôr, len (podľa môjho skromného názoru) ľahšie.

11. Nájdite vzorec pre $(f^{-1})''$.

Riešenie.
Postupnými úpravami dostávame:

$$(f^{-1})'' = \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)' = \frac{(f'(f^{-1}(x)))'}{(f'(f^{-1}(x)))^2} =$$

$$= \frac{f''(f^{-1}(x)).(f^{-1}(x))'}{(f'(f^{-1}(x)))^2} = \frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}$$

12. Má fcia $f(x) = \begin{cases} x^{5/3} \leftarrow x \notin \mathbb{Q} \\ x^{7/3} \leftarrow x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ v 0 vlastnú alebo nevlastnú deriváciu?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Podobne ako už bolo, s tým rozdielom, že v tomto prípade príslušná limita existuje, je rovná 0, teda f má vlastnú deriváciu a odpoveď znie áno.

13. Nech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná fcia. Existuje $\max_{x \in [a,b]} f(x)$?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Toto je priamo veta z prednášky. Existuje.

14. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dif. fcia, nech $f'_+(0) = \infty$, $f'_-(0) = -\infty$. Má f v 0 lokálne maximum?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Ktorú odpoveď dať???
Keď $f'_+(0) = \infty$ a $f'_-(0) = -\infty$, znamená to, že neexistuje $f'(0)$, čo je ale spor s tým, že f je diferenc., preto taká fcia vôbec neexistuje.

15. Nech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú dif. konkávne fcie, f je klesajúca, g je rastúca, potom $g \circ f$, t.j. $g(f(x))$ je:
☐ klesajúca konkávna ☐ klesajúca konvexná
☐ rastúca konkávna ☐ rastúca konvexná
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Zo zadania máme $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y :$
(v1) $f(x) > f(y)$
(v2) $g(x) < g(y)$
(v3) $0 \geq f'(x) \geq f'(y)$ (z klesania a z konkávnosti)
(v4) $g'(x) \geq g'(y) \geq 0$ (z konkávnosti a rastu)
odtiaľ dostávame:

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow g(f(x)) > g(f(y))$$

Teda $g(f(x))$ je klesajúca, chceme ešte zistiť, či je $g \circ f$ konvexná, prípadne konkávna. To je ekvivalentné s tým, či je jej derivácia neklesajúca, resp. nerastúca.
Je $(g(f(x)))' = g'(f(x)).f'(x)$. Majme $x < y$. Z (v1) $\Rightarrow f(x) > f(y)$ a následne z (v4) $\Rightarrow g'(f(y)) \geq g'(f(x)) \geq 0$. Z (v3) máme $0 \geq f'(x) \geq f'(y)$.
Nuž a dokopy to dáva:

$$g'(f(y)) \geq g'(f(x)) \wedge f'(y) \leq 0 \Rightarrow g'(f(y)).f'(y) \leq g'(f(x)).f'(y)$$
$$f'(y) \leq f'(x) \wedge g'(f(x)) \geq 0 \Rightarrow g'(f(x)).f'(y) \leq g'(f(x)).f'(x)$$

no a z oboch dokopy dostávame:
$x < y \Rightarrow g'(f(y)).f'(y) \leq g'(f(x)).f'(x) \Rightarrow$ derivácia je nerastúca, teda $g \circ f$ je konkávna.

16. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rýdzokonvexná 2x dif. fcia, nech $f'(0) = f''(0) = 0$. Potom f:
☐ f' má v 0 lokálne maximum ☐ f' má v 0 lokálne minimum
☐ f' rastie ☐ f' klesá
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Z toho, že je rýdzokonvexná, vyplýva, že $\forall x \in \mathbb{R}; f''(x) \geq 0$ a zároveň že f' je rastúca. Keďže $f'(0) = 0$, je pre $x > 0$ $f'(x) > 0$ a pre $x < 0$ $f'(x) < 0$. Preto f na $(-\infty, 0\rangle$ klesá, na $\langle 0, \infty)$ rastie a teda má globálne minimum, či chce, či nechce.

17. Tvrdenie: "Ak fcie $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sú diferenc. na $(0, \infty)$, pričom $f(0) > g(0)$ a $\forall x \in (0, \infty); f'(x) > g'(x)$, tak $\forall x \in (0, \infty); f(x) > g(x)$." je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Protipríklad:

$$f(x) = 2x, g(x) = \begin{cases} -100 & \leftarrow x = 0 \\ x + 10 & \leftarrow x \neq 0 \end{cases}$$

18. Existuje prostá dif. fcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že jej inverzná fcia nie je diferencovateľná?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Ako vraví veta, ľubovoľná, ktorá má v nejakom bode deriváciu = 0, triviálny príklad (už to vyzerá ako Kubáčkove skriptá :) je x^3.

19. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2x spojite dif. fcia, pričom $f'(0) = 0$ a f'' má ostré lokálne maximum v 0. Potom:
☐ f má ostrý lokálny extrém v bode 0
☐ f' ma ostrý lok. extrém v bode 0
☐ f je rýdzomonotónna na niektorom okolí bodu 0
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
f'' je podľa zadania spojitá, t.j. existuje také ε, že na $(-\varepsilon, \varepsilon)$ má f'' všade rovnaké znamienko. To ale znamená, že f' na tomto intervale buď rastie, alebo klesá. V každom prípade ale z $f'(0) = 0$ vieme, že na jednej strane od 0 je kladná a na druhej záporná. Na jednej strane teda f rastie, ne druhej klesá, preto tam má lokálny extrém.

20. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dif. a nech $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)f'(x) < 0$, potom:
☐ f má v $+\infty$ vlastnú limitu
☐ f má v $+\infty$ nevlastnú limitu
☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Ak pre nejaké x je $f(x) > 0$, je $\forall x; f(x) > 0$, lebo keby pre nejaké nebolo, z vety o medzihodnote vieme, že existuje c také, že $f(c) = 0$, preň ale potom nie je $f(c).f'(c) < 0$. Analogicky pre záporné. Preto je f buď kladná a klesajúca alebo záporná a rastúca. A keďže nemôže prekročiť nulu a ujsť do nekonečna, vidíme, že limita je vlastná. (tomu sa hovorí formálny dôkaz :)

21. Tvrdenie: "Nech je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klesajúca a konkávna. Potom f má v $+\infty$ limitu $-\infty$." je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Keďže je konkávna, leží celá pod alebo na svojej ľubovoľnej dotyčnici, keďže je klesajúca, existuje bod, v ktorom má zápornú deriváciu. Keď zoberieme funkciu g určenú touto priamkou, tá má limitu $-\infty$ a je $\forall x; f(x) \leq g(x)$, vsio jasno.

22. Nech pre $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a $f'(0) = h'(0) = 1$. Potom:
☐ g nemá v 0 nevlastnú deriváciu
☐ g je diferenc. v 0 a je $g'(0) = 1$
☐ g je rastúca v 0, ale nemusí byť diferenc. v 0
☐ g jr spojitá v 0, ale nemusí byť rastúca ani diferenc.
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Všetko sú blbosti. Nech $f(x) = x + 1, h(x) = x - 1$, g je niekde v tom páse a môže si robiť čo len sa jej zachce. Láskavý čitateľ (opäť inšpirácia skriptami :) si ľahko nájde kontrapríklady.

23. Nech má spojitá $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v 0 globálne maximum. Musí potom existovať také ε, že f je rastúca na $(-\varepsilon, 0)$ a klesajúca na $(0, \varepsilon)$?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Tentokrát niečo zo skrípt. Zoberme fciu

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \leftarrow x \neq 0 \\ 0 & \leftarrow x = 0 \end{cases}$$

Tá je diferencovateľná, lebo

$$f'(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} - 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \leftarrow x \neq 0 \\ \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x. \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)\right) = 0 & \leftarrow x = 0 \end{cases}$$

a teda f je spojitá a ľahko sa presvedčíme, že také ε nenájdeme – ľubovoľne blízko k 0 vieme nájsť bod, v ktorom je derivácia kladná aj v ktorom je záporná. (Napríklad v $x = \frac{1}{2n\pi}$ je kladná, v $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ záporná.)

24. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dif. fcia taká, že $\forall x \in \mathbb{R}; (f'(x))^2 < 1$. Existuje potom $c \in \mathbb{R}$ také, že $\forall x \in \mathbb{R}; |f(x)| < |x| + c$?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Položme $c = |f(0)| + 1$. Zoberme funkciu $x + c$ na $< 0, \infty$, ukážme, že f leží pod ňou, ostatné tri kvadranty analogicky. Označme $g(x) = f(x) - x - c$, z $f'(x) < 1, (x + c)' = 1 \Rightarrow g'(x) < 0$, teda g je klesajúca, a keďže je záporná v 0, je záporná všade, q.e.d.

25. Nech dif. fcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v každom bode nenulovú deriváciu. Musí byť potom f rýdzomonotónna?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Keď nie je rýdzomonotónna, existujú $a, b, a \neq b$ také, že $f(a) = f(b)$, z Rolleho vety existuje $c \in (a, b); f(c) = 0$. Takže musí.

26. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemá v 0 limitu sprava ani zľava, pričom $\forall \varepsilon \in (0, 1); f(-\varepsilon) + 1 < f(0) < f(\varepsilon) - 1$. Potom $f'(0)$:
☐ neexistuje ☐ je nevlastná ☐ je vlastná
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Nevlastná, konkrétne ∞, ako pre $\operatorname{sgn} x$.

27. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 3x dif. fcia, pričom $f'(0) = f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$. Potom:
☐ f má v 0 lok. maximum ☐ f má v 0 lok. minimum
☐ f je v 0 rastúca ☐ f je v 0 klesajúca
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
f'' je v 0 klesajúca, preto je napravo od 0 záporná, naľavo kladná, preto f' napravo klesá, naľavo rastie a keďže v 0 je 0, je mimo nuly záporná, preto f klesá.

28. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dif. fcia, nech spojitá fcia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie je diferencovateľná. Môže byť potom fcia $f + g$ diferencovateľná?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Keby v bode, kde g nie je diferencovateľná, bola diferencovateľná $f+g$, je tam diferencovateľná aj $(f + g) + (-f) = g$, spor.

29. Tvrdenie: "Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 0 \leftarrow x \notin \mathbb{Q} \\ 1 \leftarrow x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ má nevlastnú deriváciu v aspoň jednom bode $x \in \mathbb{R}$." je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Nepravdivé, Dirichletova fcia nemá nikde deriváciu.
Dôkaz: ukážeme, že neexistuje $\lim_{y \to x+} \chi(y)$ pre žiadne x. Ak totiž zoberieme zúženia na $Q_x = \{y; y \in \mathbb{Q} \wedge y > x\}$ a na $I_x = \{y; y \notin \mathbb{Q} \wedge y > x\}$, pre $x \in \mathbb{Q}$ nám vyjde 0, resp. ∞ (podľa toho, či $x \in \mathbb{Q}$), pre $x \notin \mathbb{Q}$ vyjde $-\infty$, resp. 0, čiže rôzne hodnoty. Keby tá limita existovala, limity pre obe zúženia by sa jej rovnali.

30. Nech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je dif. fcia, potom f je ohraničená.
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Priamo z prednášky. Platí.

31. Nech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú dif. fcie také, že $f(0) = f'(0) = 0$, $g(0) = 0$ a $g'(0) > 0$. Potom existuje okolie O bodu 0 také, že:
☐ $\forall x \in O; f(x) \neq g(x)$
☐ $\forall x \in O; x \neq 0; |f(x)| < |g(x)|$
☐ $\forall x \in O; f(x) \leq g(x)$
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Intuitívne: f môže pokojne byť niečo škaredo oscilujúce, nemá prečo byť ohraničená g na nejakom intervale. Asi by som to ale nechal nezaškrtnuté :)

32. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2x dif. a nech má f'' záporné maximum. Vyplýva z existencie konečnej $lim_{x\to\infty} f(x)$ existencia konečnej $lim_{x\to\infty} f'(x)$?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Keďže f'' je záporná, f' je klesajúca. Vieme, že f je rastúca, lebo keby nebola, môže byť buď klesajúca, vtedy ale z konkávnosti má v ∞ limitu $-\infty$, alebo nie je prostá, vtedy existujú $a < b$ také, že $f(a) = f(b)$, teda z Rollovej vety existuje c, v ktorom $f'(c) = 0$, od neho ďalej je z konkávnosti klesajúca a sme, kde sme boli. No a keď je f rastúca, konkávna a má konečnú limitu, má f' zjavne limitu 0. Presný dôkaz nechávam na čitateľa, vyplýva to z faktov, že f' klesá, je kladná a vieme sa dostať ľubovoľne blízko k 0.

33. Nech 2x dif. fcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nezáporná na $R - \{0\}$ a nech $f(0) = 0$. Potom:
☐ $f'(0) = 0 \wedge f''(0) \geq 0$ ☐ $f'(0) = 0 \wedge f''(0) \leq 0$
☐ $f'(0) < 0 \wedge f''(0) \geq 0$ ☐ $f'(0) < 0 \wedge f''(0) \leq 0$
☐ $f'(0) > 0 \wedge f''(0) \geq 0$ ☐ $f'(0) > 0 \wedge f''(0) \leq 0$
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Keďže f je dif., je spojitá, keďže je nezáporná na $R - \{0\}$, je $f'(0) = 0$ (limita sprava je limita výrazu, ktorý je určite nezáporný, zľava nekladný, preto $f'_+(0) \geq 0 \wedge f'_-(0) \leq 0$, keďže derivácia existuje, musí byť nulová).
Keby bola $f''(0) < 0$, bola by f' na nejakom intervale $(0, \varepsilon)$ záporná – potom by ale na tomto intervale bola záporná aj f, čo je spor. Preto $f''(0) \geq 0$.

34. Nech diferenc. fcia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ má ohraničenú f'. Vyplýva z toho, že f je ohraničená?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Áno. Dôkaz: Zoberieme hodnotu $c = f\left(\frac{1}{2}\right)$, položíme $d = \sup f', e = \inf f'$, ukážeme, že celý graf napravo leží pod $d(x - \frac{1}{2}) + c$, nad $e(x - \frac{1}{2}) + c$, naľavo pod $e(x - \frac{1}{2}) + c$, nad $d(x - \frac{1}{2}) + c$.
Že časť napravo leží pod $d(x-\frac{1}{2})+c$: Zoberme funkciu $g(x) = d(x-\frac{1}{2})+c-f(x)$, tá má v každom bode z $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$ deriváciu nekladnú, teda je nerastúca, v $\frac{1}{2}$ je 0, preto je na $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$ nekladná. Ostatné analogicky.
Potom ale vidíme, že funkčné hodnoty sú zhora ohraničené $\max(\frac{d}{2} + c, -\frac{e}{2} + c)$ a zdola $\min(-\frac{d}{2} + c, \frac{e}{2} + c)$.

35. Prvá derivácia funkcie $x^2(\operatorname{sgn} x)^3$ v bode 0:
☐ je vlastná ☐ je nevlastná ☐ neexistuje

Riešenie.
Intuitívne je to 0. Kto neverí, nech si nakreslí, kto stále neverí, nech si zráta.

36. Existuje spojitá $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá má v každom bode z $\mathbb{R}$ nevlastnú deriváciu?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Neexistuje. Zoberme ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Z Lagrangeovej vety existuje c také, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, takže derivácia v c je vlastná.

37. Tvrdenie: "Ak $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 3x diferenc. fcia, $\forall x \in \mathbb{R}; f^{(3)}(x) < 0$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 2$, tak $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}; f(x) \leq x^2 + 2x + 2$." je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Zoberme funkciu $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 2$, je $f'(x) = -3x^2 + 2x + 2, f''(x) = -6x + 2, f^{(3)}(x) = -6$, takže $f(0) = f'(0) = f''(0) = 2$ a $\forall x; f^{(3)}(x) < 0$, teda f spĺňa podmienky zo zadania. Je ale $f(-1) = 2 > 1 = (-1)^2 + 2.(-1) + 2$, preto tvrdenie neplatí. Pozn.: keby bolo v zadaní o deriváciu viac, tak by to platilo.

38. Nech $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ je dif. fcia taká, že $f'(0) = 0$ a $\forall x \in (-1, 1) - \{0\}; f'(x) < 0$. Potom:
☐ f je klesajúca v bode 0
☐ f nie je klesajúca v bode 0
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Existuje okolie 0, na ktorom f klesá, a teda f je klesajúca v 0.

39. Existuje spojitá fcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá má v bode svojho lokálneho extrému nevlastné jednostranné limity opačných znamienok?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Napríklad $f(x) = \sqrt{|x|}$.

40. Nájdite vzorec pre $(g^3)''$, kde $g = f^{-1}$, pomocou derivácii f.

Riešenie.
Nech existuje nenulová $f'(f^{-1}(x))$. Potom:

$$\left((f^{-1}(x))^3\right)^{(3)} = \left(3(f^{-1}(x))^2 \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)' =$$

$$= 3 \cdot \left(2f^{-1}(x) \cdot \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)^2 + (f^{-1}(x))^2 \cdot \frac{(f'(f^{-1}(x)))'}{(f'(f^{-1}(x)))^2}\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(2f^{-1}(x) \cdot \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)^2 + (f^{-1}(x))^2 . f''(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{(f'(f^{-1}(x)))^3}\right) =$$

$$= \frac{3f^{-1}(x)}{(f'(f^{-1}(x)))^2} \cdot \left(2 + \frac{f^{-1}(x) . f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))}\right)$$

Prípad, keď je $f'(f^{-1}(x)) = 0$, si láskavý čitateľ (keďže nemá na výber) doplní sám.