MatAlýza – testíky z postupností a limít

Štandardný disclaimer

Tieto papiere **NEMAJÚ** slúžiť ako náhrada za riešenie príkladov. Príklady si najskôr skúste prerieišiť sami, ak niečo sami vymyslíte, omnoho ľahšie si to zapamätáte. Všetky výsledky sú bez akejkoľvek záruky, som len človek a občas sa mýlim. Ľubovoľné prejavy uznania a vďaky sú vítané.

Tento dokument sa naďalej (aj keď slimačím tempom, ale predsa) vyvíja. Pokiaľ v ňom nájdete chyby, budem vám vďačný, ak mi ich pošlete. Pokiaľ by ste doň chceli dopísať veľa nových vecí, zdrojáky sú vaše, len poprosím nechať v nich do budúcna moje meno. Pokiaľ je to možné, do rôznych online archívov študijných dokumentov neumiestňujte kópiu tohto dokumentu, ale linku naň, aby sa príliš nešírili rôzne staré verzie.

Táto verzia vznikla dňa **14. decembra 2003** (a je explicitne novšia od všetkých verzií, ktoré nemajú uvedený dátum).

1. Mnozina vsetkych iracionalnych cisel tvaru $\sqrt{2}+q$, kde $q \in \mathbb{Q}$, je
☐ prazdna ☐ neprazdna konecna
☐ nekonecna spocitatelna ☐ nespocitatelna
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Jej mohutnosť je zjavne rovná $|\mathbb{Q}|$, preto je nekonečná spočítateľná.

2. Ak pre funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f(x) = 0$ pre $x \notin \mathbb{Q}$ a $f(x) = x$ pre $x \in \mathbb{Q}$, tak jej limita v 0
☐ je 0 ☐ je konecna a nenulova
☐ je nevlastna ☐ neexistuje
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Jej limita v nule je 0, keď si povieme ľubovoľné ε, tak $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\,; |f(x)| < \varepsilon$.

3. Ak $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohranicena funkcia a jej supremum je cislo a, tak funkcia $g(x) = f(2x)$
☐ ma supremum $2a$ ☐ ma supremum a
☐ ma supremum $a/2$ ☐ je ohranicena, ale jej supremum moze byt rozne od $a, 2a, a/2$
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Keby sme si nakreslili grafy, vidíme, že $g(x)$ je vlastne $2\times$ zhustená $f(x)$, ale obor hodnôt a teda ani hodnota supréma sa nezmení.

4. Nech $f(x) = 2 - 3x$ pre $x \in \langle 0, 2\rangle$ a $f(x) = 1 + x$ pre $x \notin \langle 0, 2\rangle$. Pre ktore $x \in \mathbb{R}$ plati $f(f(x)) = 3 - 3x$?
☐ $x \in \langle 2/3, 2\rangle$ ☐ $x \in (2/3, 2)$
☐ $x \in \langle -1, 0\rangle$ ☐ $x \in \langle -1, 0)$
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Stačí porátať hodnoty v koncových bodoch intervalov uvedených v možnostiach. Dostaneme: $f(f(2/3)) = f(0) = 2 \neq 3 - 3(2/3)$, $f(f(2)) = f(-4) = -3 = 3 - 3.2$ a ďalej rátať ani nemusíme. Totiž interval neobsahujúci 2/3 a obsahujúci 2 v možnostiach nemáme. Koho by zaujímalo presné riešenie, môže si dorátať priebeh fcie na celom $\mathbb{R}$, vyjde interval $(2/3, 2\rangle$.

5. Nech pre funkcie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Potom nerovnost $f(x) > g(x)$ plati

☐ v bode 0, ale nemusi platit v ziadnom jeho okoli
☐ v niektorom okoli bodu 0
☐ v niektorom prstencovom okoli bodu 0, ale nemusi platit v bode
☐ nanajvys v konecnom pocte bodov
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Zoberme fcie $f(x) = x + 2$ a $g(x) = x$ pre $x \neq 0$, $g(0) = 47$. Tieto fcie spĺňajú podmienky zo zadania, pričom vylučujú prvú, druhú aj štvrtú možnosť. Tretia možnosť je správna – z definície limity existuje prstencové okolie F nuly, na ktorom je $|f(x) - 2| < 1$, takisto existuje prst. okolie G nuly, na ktorom $|g(x)| < 1$, na ich prieniku je $f(x) > g(x)$.

6. Inverzna funkcia k zuzeniu funkcie $y = 2 + \cos x$ na intervale $\langle -\pi, 0\rangle$ je

☐ 2-arccos x ☐ arccos(x+2)
☐ arccos(x-2) ☐ -arccos(x-2)
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Správna možnosť je štvrtá. Buď si nakreslíme obrázok, alebo upravujeme: Inverzná funkcia má predpis $x = 2 + \cos y$, pri použití arccos treba správne určiť znamienko.

7. Ak A je nutna podmienka pre B a sucasne postacujuca podmienka pre negaciu vyroku C, tak plati

☐ $C \Rightarrow B$ ☐ $B \Rightarrow C$
☐ $C \Rightarrow \neg B$ ☐ $\neg B \Rightarrow C$
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Zo zadania máme $B \Rightarrow A$ a $A \Rightarrow \neg C$, odtiaľ $B \Rightarrow \neg C$ alebo ináč zapísané $C \Rightarrow \neg B$.

8. Nech g je inverzna funkcia k funkcii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ak graf funkcie h je sumerny s grafom funkcie f podla priamky $y = x + 1$, tak $h(x) =$

☐ $g(x-1)+1$ ☐ $g(x-1)-1$
☐ $g(x+1)-1$ ☐ $g(x+1)+1$
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Funkcie $\widehat{h}(x) = h(x) - 1$ a $\widehat{f}(x) = f(x) - 1$ sú súmerné podľa osi $y = x$. (A teda $\widehat{f}$ je inverzná k $\widehat{h}$.) Nech $[x, y] \in h$. Potom postupne: $[x, y-1] \in \widehat{h}$, $[y-1, x] \in \widehat{f}$, $[y-1, x+1] \in f$, $[x+1, y-1] \in g$. Teda ak $h(x) = y$, tak $g(x+1) = y - 1$. Z druhej rovnice vyjadríme y, dosadíme do prvej, dostaneme $h(x) = g(x+1) + 1$.
Na teste stačí povedzme zobrať $h(x) = 2x$, dorátať f a g a spoľahnúť sa na intuíciu, že pre všetky h to vyjde rovnako. BTW zadanie je o tom, že zoberieme graf h a dvakrát ho zobrazíme v osovej súmernosti podľa dvoch rovnobežných osí. Zložením dvoch takýchto osových súmerností je posunutie (v smere kolmom na ne o dvojnásobok ich vzdialenosti).

9. Negaciou vyroku „rydza monotonnost funkcie f je nutna podmienka pre jej prostost" je vyrok

☐ rydza monotonnost funkcie f je postacujuca podmienka pre jej prostost
☐ prostost funkcie f je postacujuca podmienka pre jej rydzu monotonnost
☐ prostost funkcie f je nutna podmienka pre jej rydzu monotonnost

☐ existuje rydzomonotonna funkcia, ktora nie je prosta
☐ existuje prosta funkcia, ktora nie je rydzomonotonna
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Ekvivalentne preformulujme výrok zo zadania na „Každá prostá fcia musí byť rýdzomonotónna.“ Odtiaľ už ľahko vidíme, že správna odpoveď je piata.

10. Zapiste predpis funkcie $\sin(2\arccos x)$ bez pouzitia gonio- a cyklometrickych funkcii a svoj postup zdovodnite!

Riešenie.
Použitím vzorca pre $\sin 2x$ a iných známych vzťahov dostávame:

$$\sin(2\arccos(x)) = 2\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x)) =$$

$$2x\sin(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

platí na intervale $\langle 0, \pi/2\rangle$

11. Dokazte nerovnost: $\forall n \in N, n \geq 3; n^{n+1} > (n+1)^n$

Riešenie.
Vydelíme obe strany n^n, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $n > (1+(1/n))^n$, no a zaspomíname na prednášky. Výraz na pravej strane je s rastúcim n rastúci a má limitu e.
(Jedna možnosť formálneho dôkazu: Pre $n = 3, 4$ nerovnosť platí. Nech $a_n = (1+(1/n))^n$, $b_n = (1+(1/n))^{n+1}$. Potom $\{a_n\}$ je rastúca, $\{b_n\}$ klesajúca, to sa dokáže tak, že spočítame podiel dvoch po sebe idúcich členov a porovnáme ho s 1. Navyše zjavne $\forall n; a_n < b_n$. Potom ale $\forall n; b_1 > a_1 \geq a_n$. Výraz na pravej strane našej nerovnosti je teda určite menší ako $b_1 = 4$ a vyhrali sme.)

12. Ak funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splna podmienku $\forall \varepsilon > 0;\ \exists n \in N;\ \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\};\ f(x) > n$, tak
☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
☐ $\lim_{x\to 0} f(x)$ existuje, ale nemusi byt nevlastna
☐ f je zdola ohranicena, ale $\lim_{x\to 0} f(x)$ nemusi existovat
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Správna odpoveď je možno prekvapivo tretia. Ľubovoľná fcia f, pre ktorú $\forall x; f(x) > 1$ spĺňa podmienky zadania. ($\forall\varepsilon;\ \exists n = 1\ldots$) Na druhej strane, keby pre nejaké $x \neq 0$ bolo $f(x) \leq 1$ (alebo 0, podľa toho, či je aj 0 prir. číslo), pre $\varepsilon > |x|$ by žiadne n neexistovalo $\Rightarrow$ f by nespĺňala podmienky zo zadania. Takže f je zdola ohraničená napr. hodnotou $\min(0, f(0))$.

13. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ a postupnost $\{b_n - a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastuca, tak $\lim_{n\to\infty} b_n$ je
☐ ∞ ☐ $-\infty$ ☐ neexistuje alebo je konecna
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
$b_n = (b_n - a_n) + a_n \geq \underbrace{(b_0 - a_0)}_{\text{konšt.}} + a_n$, preto aj $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

14. Nech f, g, h su funkcie definovane na $\mathbb{R}$, pricom $f(x) < h(x) < g(x)$ pre vsetky $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x\to 0}(g(x) - f(x)) = 0$ a $\lim_{x\to 0} g(x)$ neexistuje. Potom $\lim_{x\to 0} h(x)$
☐ neexistuje ☐ $= 0$ ☐ existuje, ale moze byt $\neq 0$
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Intuitívne z „vety o dvoch policajtoch“: Dvaja policajti f, g vedú zločinca h, keďže idú obaja tam isto, tak ho tam dovedú a musí ísť tade ako oni. Teda dosť blízko pri 0 vyzerajú f, g, h skoro rovnako, preto ani h nemá limitu.
Formálne: $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(g(x) - h(x)) + h(x)$. Keďže je $\forall x; 0 < g(x) - h(x) < g(x) - f(x)$, je $\lim_{x\to 0}(g(x) - h(x)) = 0$. Teda ak by existovala $\lim_{x\to 0} h(x)$, existovala by aj $\lim_{x\to 0} g(x)$ a rovnali by sa. Preto $\lim_{x\to 0} h(x)$ neexistuje.

15. Ak postupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rozdielom dvoch rastucich postupnosti, z ktorych aspon jedna je ohranicena, tak $\lim_{n\to\infty} a_n$
☐ existuje, ale nemusi byt vlastna
☐ je vzdy vlastna
☐ neexistuje, alebo je nevlastna
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Ak sú ohraničené obe, tak limita je vlastná a je ňou rozdiel ich suprém. Ak je ohraničená len 1, tak tá ohraničená má konečnú limitu, tá neohraničená má limitu ∞, ich rozdiel má teda limitu $\pm\infty$. Preto správna odpoveď je prvá.

16. Nech $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ su kladne funkcie, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Potom $\lim_{x\to 0} \frac{g^2(x)}{f(x)-g(x)}$
☐ $= 0$ ☐ $= -\infty$ ☐ $= \infty$
☐ $= 1$ ☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Intuitívne f je blízko pri 0 zanedbateľné v porovnaní s g, limita sa zvrhne na $\lim_{x\to 0} \frac{g^2(x)}{-g(x)} = \lim_{x\to 0} -g(x) = -\infty$.

17. Ak v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podpostupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ rastuca a podpostupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ klesajuca, pricom $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, tak
☐ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje
☐ $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ aj $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguju, ale $\lim_{n\to\infty} a_n$ nemusi existovat
☐ existuje najviac 1 z limit $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$
☐ existuju prave 2 z limit $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Platí $\forall n; a_{2n} < a_{2n+1}$. Sporom, keby nie, zoberme druhé najmenšie k, pre ktoré to neplatí, je $a_{2k} > a_{2k+1}$, potom $\forall k' > k$; $a_{2k'} > a_{2k} > a_{2k+1} > a_{2k'+1}$, a teda $\forall k' > k$; $a_{2k'} - a_{2k'+1} > \underbrace{a_{2k} - a_{2k+1}}_{\text{konšt.}}$. To je spor s $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.
Je teda $\forall n$; $a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1} < \ldots < a_1$, preto postupnosť $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená hodnotou a_1, podobne druhá je zdola ohraničená hodnotou a_0. Preto obe majú limity. Keďže $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, tieto limity sa rovnajú a zjavne je ich spoločná hodnota aj hodnotou $\lim_{n\to\infty} a_n$.

18. Ak pre fciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v kazdom bode $a \in \mathbb{R}$ plati $\lim_{x\to a-} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a+} f(x)$, tak
☐ f je rastuca ☐ f je neklesajuca, ale nemusi byt rastuca
☐ f je klesajuca ☐ f je nerastuca, ale nemusi byt klesajuca
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Všetky spojité funkcie spĺňajú podmienku zo zadania, dokonca tam nastane rovnosť. Takže žiadna z predchádzajúcich.

19. Ak $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ su funkcie s limitou ∞ v bode 0, pricom $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$, tak $\lim_{x\to 0}(f(x) - g(x))$

☐ $= 2$	☐ $= 1/2$	☐ $= -2$
☐ $= -1/2$	☐ $= \infty$	☐ $= -\infty$

☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Zo zadania $\lim_{x\to 0}(f(x) - 2g(x)) = 0$, potom $\lim_{x\to 0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to 0}\Big((f(x) - 2g(x)) + g(x)\Big) = \infty$.

20. Ak $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ nenadobuda nulove hodnoty, $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)}$ existuje, tak

☐ $\lim_{x\to 0} f(x)$ je nevlastna ☐ $\lim_{x\to 0} |f(x)|$ je nevlastna, ale $\lim_{x\to 0} f(x)$ nemusi existovat
☐ ziadna z predchadzajucich odpovedi nie je spravna

Riešenie.
Takto sa to zachovalo. Nemôžem za to, že tá otázka nedáva zmysel.

21. Vypocitajte: $\lim_{x\to 1} \frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}$

Riešenie.
neni

22. Vypocitajte: $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{7} - 1\right)$

Riešenie.
neni