MatAlýza – zo zimnej skúšky

©MišoF. 1999/00

1. Dokážte nerovnosť: $\forall x \in (1,2);\ x - 1 < \log_2(x)$

Riešenie.
Stačí si uvedomiť, že graf funkcie $f_1(x) = x - 1$ je priamka, ktorá pretína graf funkcie $f_2(x) = \log_2 x$ v bodoch 1 a 2 a že funkcia f_2 je na tom intervale konkávna. A teraz ešte raz a poriadne.
Zoberme fciu $f(x) = \log_2(x) - x + 1$ definovanú na $\langle 1,2\rangle$, dokážme, že na $(1,2)$ je kladná. Je $f'(x) = \frac{1}{x.\ln 2} - 1$. Zjavne pre $x_0 = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e \in (1,2)$ je $f'(x) = 0$, pre $x > x_0$ je $f'(x) < 0$ a pre $x < x_0$ je $f'(x) > 0$. Preto f je na $\langle 1, \log_2 e\rangle$ rastúca a na $\langle \log_2 e, 2\rangle$ klesajúca, a keďže je $f(1) = f(2) = 0$, je $\forall x \in (1,2); f(x) > 0$, q.e.d.

2. Dokážte:

$$\forall x \in \langle 0, a\rangle\ ;\ x^m(a-x)^n \leq \frac{m^n n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$$

Riešenie.
Označme $f(x) = x^m(a-x)^n$. Potom jej derivácia je

$$f'(x) = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}\big(m(a-x) - nx\big)$$

Vidíme, že $f'(x) = 0$ pre $x_1 = 0$, $x_2 = a$ a $x_3 = \frac{am}{m+n}$, to sú kandidáti na lokálne extrémy. Všimnime si, že $x_3 \in \langle 0, a\rangle$. Spočítajme teraz druhú deriváciu.

$$f''(x) = x^{m-2}(a-x)^{n-2}\Big((m-1)(a-x)\big(am - (m+n)x\big) -$$
$$- (n-1)x\big(am - (m+n)x\big) - (m+n)x(a-x)\Big)$$

Ako ľahko zistíme dosadením, pre x_1 a x_2 je tento výraz kladný, pre x_3 je záporný. Preto má f v x_3 lokálne maximum, v x_1 a x_2 lokálne minimá. Opäť ľahko nahliadneme, že $\forall x \in (0,a);\ f(x) \leq f(x_3)$. Spočítajme teda $f(x_3)$.

$$f(x_3) = \left(\frac{am}{m+n}\right)^m \cdot \left(a - \frac{am}{m+n}\right)^n = \frac{a^m m^m}{(m+n)^m} \cdot \frac{a^n n^n}{(m+n)^n} = \frac{m^n n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$$

A to sa už podobá zadaniu ako vajce valcu.