Riešenia Tomanovych papierov z 2. semestra

Štandardný disclaimer

Tieto papiere **NEMAJÚ** slúžiť ako náhrada za riešenie príkladov. Príklady si najskôr skúste prerieŠiť sami, ak niečo sami vymyslíte, omnoho ľahšie si to zapamätáte. Všetky výsledky sú bez akejkoľvek záruky, som len človek a občas sa mýlim. Ľubovoľné prejavy uznania a vďaky sú vítané.

Tento dokument sa naďalej (aj keď slimačím tempom, ale predsa) vyvíja. Pokiaľ v ňom nájdete chyby, budem vám vďačný, ak mi ich pošlete. Pokiaľ by ste doň chceli dopísať veľa nových vecí, zdrojáky sú vaše, len poprosím nechať v nich do budúcna moje meno. Pokiaľ je to možné, do rôznych online archívov študijných dokumentov neumiestňujte kópiu tohto dokumentu, ale linku naň, aby sa príliš nešírili rôzne staré verzie.

Táto verzia vznikla dňa **14. decembra 2003** (a je explicitne novšia od všetkých verzií, ktoré nemajú uvedený dátum).

Dirichletov princíp (DP)

1. Možných súčtov je 11 (od 2 po 12), preto treba hodiť aspoň 12-krát.

2. Možných súčtov je 16 (od 3 po 18), preto treba hodiť aspoň $(3.16 + 1) = 49$-krát.

3. a) Rozlíšené kocky : rôznych dvojíc je $6.6 = 36$, treba aspoň $2.36 + 1 = 73$ hodov.
   b) Nerozlíšené kocky : rôznych dvojíc je 21, treba aspoň $2.21 + 1 = 43$ hodov.

4. a) Sporom. Ak sú všetky menšie ako $\frac{b}{n}$, súčet je menší ako $n.\frac{b}{n} = b$. Spor.
   bcd) Až na ostré/neostré/obrátené nerovnosti to isté ako a).

5. Z Eulerovej vety $\Rightarrow$, že mnohosten má 21 hrán, teda súčet stupňov vrcholov je 42. Keďže $42 \geq 37 = 9.4 + 1$, z DP $\Rightarrow$, že z niektorého vrcholu vychádza aspoň 5 hrán, q.e.d.

6. Hrán je 11, súčet počtov hrán v stenách 22, stien 7, z DP $\Rightarrow$, že $\exists$ stena s aspoň 4 hranami, ale keďže každá stena má aspoň 3 hrany, majú steny dokopy aspoň 21 hrán, preto jediná možnosť je, že jedna stena má 4 hrany a všetky ostatné po 3 hrany.

7. Záhradu 80×90 rozdeľme na 10×18 obdĺžnikov tvaru 8×5. Máme 365 stromov v 180 obdĺžnikoch, z DP $\Rightarrow$, že v niektorom sú aspoň 3.

8. Obdĺžnik 27×36 rozdeľme na 9×18 obdĺžnikov tvaru 3×2 a každý z nich uhlopriečkou na dva trojuholníky s plochou 3. Máme 1945 bodov v $9.18.2 = 324$ trojuholníkoch, z DP $\Rightarrow$ q.e.d.

9. 13 vysielačov pokryje max. plochu $13.\pi.80^2 = 83200.\pi < 268138$ km^2. Štvorec rozrežeme na 25 štvorčekov so stranou $\frac{1}{5}$. Z DP v niektorom ležia aspoň 3 z 51 bodov. Keďže $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$, celý tento štvorec leží v kruhu so stredom v jeho priesečníku uhlopriečok a polomerom $\frac{1}{7}$. V tomto kruhu ležia teda aspoň 3 body, q.e.d.

14. Označme naše čísla $c_1, \dots, c_{82}$. Ak niektoré z čísel $c_1 - c_2, c_1 - c_3, \dots, c_1 - c_{82}$ dáva po del. 81 zvyšok 0, vyhrali sme. Ak nie, máme 81 čísel, ktoré dávajú nanajvýš 80 zvyškov, podľa DP niektoré dve dávajú rovnaký zvyšok. BUNV nech sú to $c_1 - c_i = 81a + z$, $c_1 - c_j = 81b + z$, pričom $i \neq j$ a $0 \leq z < 81$. Potom ale $c_i - c_j = (c_1 - c_j) - (c_1 - c_i) = (81b + z) - (81a + z) = 81(b - a)$.

15. Dokážeme tvrdenie, z ktorého budú vyplývať tvrdenia 16 a 17. Ku každému n nesúdeliteľnému s 10 existuje číslo tvaru $111\ldots1$, ktoré je ním deliteľné. Dôkaz: Zoberme čísla $1, 11, \ldots, 11...1$, z ktorých posledné má $n+1$ cifier. Z DP niektoré dve dávajú rovnaký zvyšok po delení n. Preto ich rozdiel je deliteľný n. (Tým je dokázané tvrdenie 16, lebo ich rozdiel je tvaru $11\ldots100\ldots0$.) Pre n nesúdeliteľné s 10 z toho dostávame, že keďže n delí $11\ldots100\ldots0 = 11\ldots1.10^k$, delí aj $11\ldots1$.

16. Keďže prvočísla rôzne od 2 a 5 sú nesúdeliteľné s 10, môžme použiť predchádzajúcu vetu.

17. Označme čísla $a_1, \ldots, a_n$. Ďalej označme $b_i = a_1 + \ldots + a_i$. Ak niektoré b_i dáva zvyšok 0 po delení n, hotovo, inak máme n čísel, ktoré dávajú najvac $n-1$ zvyškov. Z DP niektoré 2 dávajú rovnaký zvyšok, preto ich rozdiel $b_j - b_i$ je deliteľný n. Ich rozdiel ale je $a_{i+1} + \ldots + a_j$.

19. Vyplýva z úlohy 20.

20. Zoberme čísla $p, p^2, \ldots, p^{10^{n+1}+1}$. Niektoré dve z nich podľa DP dávajú rovnaký zvyšok po delení 10^{n+1}. Nech sú to p^k a p^l. Potom $10^{n+1} | p^l - p^k = p^k(p^{l-k} - 1)$. Keďže 10 je nesúdeliteľné s p, $\Rightarrow$ z toho, že $10^{n+1} | p^{l-k} - 1$, čiže $p^{l-k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10^{n+1})$. To ale znamená, že p^{l-k} končí skupinou n núl a jednotkou.

21. Sporom. Keby boli najviac 2 ofic. jazyky, tak oficiálnymi jazykmi hovorí dokopy najviac 30 delegátov. Každým z ostatných 9 jazykov hovoria najviac 4 delegáti. To ale znamená, že delegátov je najviac 66 – spor.

Spočítateľné množiny

11. Intervalu (a, b) priraďme dvojicu $a, b \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Zjavne je to injekcia, preto má množina vš. intervalov s rac. koncami mohutnosť nanajvýš rovnú mohutnosti množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, tá je ale spočítateľná.

12. Napr. $X = \mathbb{Q}^n$. Rac. čísla sú hustá podmnožina $\mathbb{R}$, teda $\forall r, \varepsilon \in \mathbb{R};\ \exists q \in \mathbb{Q};\ |r - q| < \varepsilon$. Preto keď máme $a = (a_1, \ldots, a_n)$, stačí nájsť $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}; |a_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Také x_i určite existujú a zároveň je potom $\sum |x_i - a_i| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$, takže $X = Q^n$ naozaj vyhovuje.

13. V každom z nich leží aspoň jedno rac. číslo. Každému intervalu priraďme niektoré rac. číslo z neho. Keďže sú disjunktné, je to injekcia, teda mohutnosť množiny intervalov je nanajvýš rovná mohutnosti $\mathbb{Q}$, teda množina intervalov je spočítateľná.

14. a) Z analýzy vieme, že pre rastúcu funkciu je $\lim_{x \to a+} f(x) = \sup_{x<a} f(x)$.
    b) … nejako cez disjunktné intervaly na osi y.

15. bolo na cvikách

16. Zjavne $T_k(0) = \{(0, 0, \ldots, 0, \ldots)\}$, preto $|T_k(0)| = 1$.

    Keď X obsahuje aspoň 2 prvky (BUNV 0 a 1), môžme prirodzenému číslu n priradiť postupnosť n núl a nekonečne veľa jednotiek, preto je určite $|T_k(X)| \succeq \aleph_0$. Špeciálne $|T_k(0, 1)| \succeq \aleph_0$, $|T_k(\mathbb{N})| \succeq \aleph_0$ a $|T_k(\mathbb{Q})| \succeq \aleph_0$.

    Zobrazme každú postupnosť z $T_k(X)$ na konečnú postupnosť, ktorú z nej dostaneme, keď z konca vynecháme všetky rovnaké členy okrem jedného. (T.j. napr. postupnosť $3, 1, 4, 1, 5, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ na $3, 1, 4, 1, 5, 2$.) Toto je zjavne injekcia, preto mohutnosť $T_k(X)$ je nanajvýš rovná mohutnosti množiny všetkých konečných postupností prvkov X.

    Množina všetkých konečných postupností 0 a 1 má mohutnosť $\aleph_0$, lebo každá z nich zodpovedá nejakému konečnému desatinnému rozvoju reálneho (a teda zároveň racionálneho) čísla. (Teda napr. postupnosti 0,1,0,1,1,1 priradíme číslo $0,010111\mathbf{1}$ – tú jednotku na konci musíme ku každému pridať kvôli postupnostiam, ktoré končia 0.) Množinu kon. postupností prir. čísel zobrazíme do množiny kon. postupností 0 a 1 tak, že číslo n zakódujeme postupnosťou n núl a jednotkou. Množinu kon. postupností rac. čísel zobrazíme do postupnosti prir. čísel tak, že číslu $\frac{p}{q}; p \in Z, q \in N, (p,q) = 1$ priradíme $1, p, q$ ak $p \geq 0$ a $2, -p, q$ ak $p < 0$. Preto aj množina všetkých kon. postupostí prirodzených, resp. racionálnych čísel má mohutnosť $\aleph_0$.

Teda je $|T_k(0,1)| \preceq \aleph_0$, $|T_k(\mathbb{N})| \preceq \aleph_0$, $|T_k(\mathbb{Q})| \preceq \aleph_0$, a teda podľa C-B vety $|T_k(0,1)| = |T_k(\mathbb{N})| = |T_k(\mathbb{Q})| = \aleph_0$.

Zjavne každému reálnemu číslu môžme priradiť nekonečnú postupnosť zloženú zo samých takých čísel, preto $|T_k(\mathbb{R})| \succeq c$. Keby sme dokázali, že mohutnosť množiny všetkých konečných postupností reálnych čísel je c, boli by sme hotoví. Keďže sa mi to už nechce rozpisovať, využijem bez dôkazu, že $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}| = |\,(0,1)\,|$. Každej konečnej postupnosti $a_1, \dots, a_n$ reálnych čísel viem podľa práve uvedenej vety priradiť číslo $x \in (0,1)$. Keď jej priradím číslo $n + x$, dostanem takto injekciu z množiny všetkých kon. postupností reálnych čísel do R, takže naozaj $|T_k(\mathbb{R})| = c$.

17. Keďže P je spoč. množina, môžme jej prvky označiť $P = \{p_1, p_2, \dots\}$. Keď bude druhý hráč ťahať tak, že v n-tom ťahu dá číslicu, ktorú p_n nemá na $2n$-tom mieste, výsledná postupnosť nemôže patriť do P. (Dôkaz ako pri Cantorovej diagonálnej metóde - keď tam patrí, nech je to p_k, ale od p_k sa výsledná postupnosť líši na $2k$-tom mieste.)

18. Pre $P = \{0,1\}^N$ nech druhý hráč ťahá ako chce, výsledok bude patriť do P. Preto druhý hráč nemá vyhrávajúcu stratégiu, čiže P nie je spočítateľná.

19. Množina všetkých podgrúp grupy $(\mathbb{Z}, +)$ je spočítateľná, lebo každá podgrupa je jednoznačne určená svojím najmenším kladným prvkom.

Príklady rôznych typov

3. Určite vieme vybrať $k + 1$ čísel – napr. všetky nepárne. Stačí dokázať, že nevieme viac. Indukciou.

   1° Z 1 čísla vieme vybrať najviac 1.

   2° Majme $2k + 1$ čísel. Ak vyberieme číslo $2k + 1$, zo zvyšných žiadna dvojica nesmie mať súčet $2k + 1$, preto z každej z dvojíc $[1, 2k], [2, 2k - 1], \dots, [k, k + 1]$ môžme vybrať najviac jedno číslo, dokopy najviac $k + 1$ čísel.

   Ak číslo $2k+1$ nevyberieme: Ak vyberieme $2k$, tak už z každej z dvojíc $[1, 2k-1], \dots, [k-1, k+1]$ môžme vybrať najviac jedno a navyše môžme ešte vybrať k. Takže vyberieme najviac $1 + (k - 1) + 1 = k + 1$ čísel. Ak nevyberieme ani $2k$, vyberáme vlastne už len z $2k - 1$ čísel, z nich podľa ind. predp. vieme vybrať najviac k čísel.

   Preto môžme vybrať najviac $k + 1$ čísel.

4. Každý súčet je z množiny $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$. Tá má $2n + 1$ prvkov, riadkov, stĺpcov a diagonál je však dokopy $2n + 2$, preto taká matica neexistuje.

5. Každý má medzi 0 a $n - 1$ známymi. Ak žiadni dvaja nemajú rovnako, znamená to, že jeden má 0 známych, atď., až jeden má $n - 1$ známych. Potom ale ten, čo pozná všetkých, sa pozná aj s tým, ktorý nepozná nikoho, spor.

10. Možné výsledky sú (v tvare [jednotky, dvojky, trojky]) : $[3,0,0]$, $[0,3,0]$, $[0,0,3]$, $[2,1,0]$, $[2,0,1]$, $[1,2,0]$, $[1,0,2]$, $[0,2,1]$, $[0,1,2]$, $[1,1,1]$. Možných výsledkov je teda 10, študentov 41 a z DP $\Rightarrow$ dok. tvrdenie.

11. Predstavme si kompletný graf, ktorého vrcholy sú členovia komisie. Ofarbime hranu medzi A a B, keď sú spolu na zasadnutí. Zo zadania vieme, že každú hranu ofarbíme najviac raz.

Pri jednom zasadaní však ofarbíme $\binom{10}{2} = 45$ hrán, zasadaní bolo 40, teda tento graf musí mať aspoň 1800 hrán. K_n má $\binom{n}{2}$ hrán. Je teda

$$\begin{aligned} 1800 &\leq \binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ n^2 - n - 3600 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zjavne pre $n \leq 60$ je $n^2 - n - 3600 < n^2 - 3600 \leq 60^2 - 3600 = 0$, preto $n > 60$.

12. Podobne. Vrcholy sú ľudia, keď vytvoríme komisiu, všetkých členov pospájame hranami. Zo zadania $\Rightarrow$, že žiadni dvaja ľudia nie sú spolu vo viac ako 1 komisii, preto každú hranu ofarbíme max. raz. Hrán je $\binom{25}{2} = 300$, 1 komisia ofarbí 10 hrán, preto je komisii najviac 30.

13. To isté ako úloha 7, len v svetlomodrej.