MF-0014

Vývoj matematického jazyka

Mišo Forišek

<misof@mfnotes.ksp.sk>
Department of Computer Science
Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics
Comenius University, Bratislava, Slovakia

júl 2009

(poznámky k prednáške na LTT 2009)

1 Je už v matematike všetko vymyslené?

Vo fyzike je jasné, že výskum nikdy neskončí – fyzika skúma reálny svet, vyslovuje o ňom teórie. A o tých nikdy nebude jasné, či sú správne, nevieme ich potvrdiť, len vyvrátiť. Vyrábame lepšie prístroje, vieme presnejšie merať. Len pred 100 rokmi (koncom 19. storočia prvé experimenty, v roku 1900 Max Planck vyslovuje hypotézu ktorá je základom kvantovej mechaniky, 1905 Einstein publikuje špeciálnu teóriu relativity) sa prišlo na to, že Newtonovská mechanika nepopisuje náš svet presne. Dnes napríklad viď CERN. Fyzike stále hrozí, že nové objavy vyvrátia existujúce teórie, nikdy si nemôže dovoliť zaspať na vavrínoch.

Matematika, naproti tomu, skúma všetky možné svety – alebo ekvivalentne jeden ideálny. Zdalo by sa, že tam je všetko jasné: niektoré tvrdenia sú pravdivé, ostatné sú nepravdivé. Prvočísel je nekonečne veľa, vyplýva to priamo z definície prvočísla a dá sa to dokázať. Nech by sa ďalším výskumom zistilo čo len chce, toto bude platiť furt a stále.

A to nás privádza k otázke: Nie je už náhodou v matematike dávno všetko dôležité vymyslené?

Sčasti áno, mnohé oblasti matematiky sú už dnes tak ďaleko, že ich výsledky ani naši praprapravnuci nikdy nevyužijú. Ale zďaleka nie všade je to pravda, a má to dobrý dôvod:

Naše myslenie môže byť len tak silné, ako silný je jazyk v ktorom myslíme.

Ako sa vyvíja matematika, spolu s ňou sa vyvíja aj jej jazyk. Poďme na malú exkurziu.

2 Exkurzia do dejín jazyka matematiky

- **Rozumné čísla.** Koľko je `MCMLXIX` plus `DCCCXVII`? A čo `XCLVI` krát `XXIX`? Viete si predstaviť počítať čokoľvek ešte zložitejšie pomocou rímskych čísel?
  A samotná zložitosť popisu čísel nie je jediný problém. Kým čísla značíme písmenkami, nedá sa prísť na koncept premennej! Vo vete „Cézar mal X otrokov“ je X premenná alebo číslo 10?
  Arabi a Indovia už majú niečo použiteľné okolo roku 1000, ku nám sa to dostáva v 1202 zásluhou Fibonacciho knihy Liber Abaci, ale ešte okolo 1400 sa bežne používajú rímske čísla.

Tu sa ešte oplatí poznamenať, že ani súčasná situácia nie je dokonalá. Napr. naše názvy pre mocniny desiatky (desať, sto, tisíc, milión, miliarda) nijak neodrážajú vzťahy medzi týmito hodnotami. (Takisto je zaujímavý rozpor medzi našim biliónom a americkým billion.)

- **Operátory.** Máme čísla, ale príliš nám nepomôžu, ak by sme každú operáciu s nimi museli slovne rozpisovať.
  Prvé použitie $+$ a $-$ v dnešnej podobe sa datuje do roku 1489 (v účtovníckej knihe ako dal a má dať), v 1514 ich Giel Vander Hoecke pravdepodobne prvýkrát používa ako operátory. Teda len 500 rokov máme to pohodlie, že môžeme písať $4+7$.
  (Na násobenie sme si ešte museli počkať, prvý zachovaný výskyt $\times$ je z roku 1618, bodku (aby sa to neplietlo s x) presadzuje Leibniz v 1698. Prvé $=$ je z roku 1557.)
- **Pár iných značení.**
  – odmocnina: 1525 Rudolff bez vodorovnej paličky, 1637 Descartes s ňou
  – suma ($\sum$): 1755 Euler
  – súčin ($\prod$): 1812 Gauss, ale možno už Descartes
  – matice: 1841 Cayley
- **Moderný príklad.**
  QWERTY klávesnica 1874. Nie je optimalizovaná pre rýchlosť písania, ale pre písacie stroje – tam sa občas zasekávali susediace klávesy, ak boli stlačené zhruba naraz, tak bolo treba vhodne rozmiestniť písmená, aby to nenastávalo príliš často.

No nevyvíjali sa len symboly, vyvíjali sa aj samotné koncepty.

- **Analytická geometria.**
  1637 Descartes v dodatku k svojej knihe Diskusia o metóde prináša nový pohľad, ktorý spája dve dovtedy nesúvisiace oblasti matematiky. A zrazu sa na geometriu dalo dívať aj inak ako cez axiómy z Euklidovych Základov.
  Tento prínos neskôr viedol k vybudovaniu aparátu potrebného na dôkaz neriešiteľnosti troch známych geometrických úloh z antického Grécka: kvadratúry kruhu, zdvojenia kocky a trisekcie uhla. Dôkazy sa podarilo nájsť až vyše 2000 rokov po tom, ako boli tieto úlohy prvýkrát sformulované.
- **Infinitezimálny počet.**
  Nekonečne malé veličiny, derivácie, integrály. Nezávisle na sebe v rokoch 1660-1670 ich zavádzajú Newton a Leibniz. Najdôležitejší význam: Prvýkrát vôbec dokáže matematika popisovať pohyb a iné spojité deje.
  Nasledovali morálne zábrany s nekonečnom, mnohí matematici odmietali veriť výsledkom dosiahnutým pomocou nekonečne malých veličín. Až Cauchy (1823) a Weierstrass dokázali všetko potrebné sformulovať konečným spôsobom. (Dnes už klasická $\varepsilon - \delta$ formulácia limity.)
- **Pravdepodobnosť.**
  Cardano v 16. storočí, Fermat a Pascal v 17. storočí, Huygens 1657.
- **Teória grafov.**
  Euler (1736) pri riešení problému s mostami v Königsbergu (dnes Kaliningrad).
- **Komplexné čísla.**

Cardano 1545 keď rieši kubickú rovnicu. Ešte 1831 de Morgan proti ich používaniu protestuje.

- **Vypočítateľnosť.**
  Niekto vymyslel počítače, vznikla otázka, čo vlastne vedia. Teda, otázka vlastne vznikla skôr ako počítače. Viac o tom o chvíľu.
- **Diferenciálne rovnice.**
  Jedným z najkrajších okamihov vysokoškolskej matematiky pre mňa bolo riešenie sústav lineárnych diferenciálnych rovníc, kde sa stretli dovtedy nesúvisiace oblasti analýzy a algebry.

3 Vypočítateľnosť

Mechanické počítacie stroje, čím ďalej, tým šikovnejšie, sú tu už celé stáročia. A s nimi aj otázka, ako vyrobiť „mašinku, ktorá bude vedieť všetko“.

Leibniz: *The only way to rectify our reasonings is to make them as tangible as those of the Mathematicians, so that we can find our error at a glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: Let us calculate, without further ado, to see who is right.*

Leibniz definuje pojmy „characteristica universalis“ – univerzálny systém, ktorý vie popisovať matematické, vedecké a metafyzické koncepty – a „calculus ratiocinator“ – univerzálny systém výpočtov v tomto jazyku. V podstate ide o predzvesť matematickej logiky (tá vzniká až neskôr, 1879 Frege), ale Leibniz zároveň sníva o mechanickom zostrojení „machina ratiocinatrix“.

1874 prichádza Georg Cantor s dôležitým objavom – reálnych čísel je viac ako prirodzených. (Dôsledok pre nás: skoro žiadny problém nie je algoritmicky riešiteľný.)

1900 Hilbert na medzinárodnom kongrese prezentuje zoznam 23 „problémov pre 20. storočie“. Zaujímavý pre nás: 10. Find an algorithm to determine whether a given polynomial Diophantine equation with integer coefficients has an integer solution.

1920 Hilbertov program na „ozdravenie matematiky“:

- A formalization of all mathematics; in other words all mathematical statements should be written in a precise formal language, and manipulated according to well defined rules.
- Completeness: a proof that all true mathematical statements can be proved in the formalism.
- Consistency: a proof that no contradiction can be obtained in the formalism of mathematics. This consistency proof should preferably use only “finitistic” reasoning about finite mathematical objects.
- Conservation: a proof that any result about “real objects” obtained using reasoning about “ideal objects” (such as uncountable sets) can be proved without using ideal objects.
- Decidability: there should be an algorithm for deciding the truth or falsity of any mathematical statement.

1931 Gödel’s incompleteness theorems – založené práve na myšlienke kódovania tvrdení do čísel.

1936 Turing: “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”

1936 Tarski veta o nedefinovateľnosti pravdy – v rámci aritmetiky prvého rádu sa nedá definovať formula, ktorá bude true práve pre kódy pravdivých tvrdení.

Všetky tieto výsledky súvisia s tým istým pozorovaním – akonáhle mám dostatočne silnú teóriu, viem v nej formulovať tvrdenia o tvrdeniach, a následne aj zostrojiť tvrdenie, ktoré vypovedá aj samé o sebe.

Z podobného dôvodu napríklad platí, že v ľubovoľnom dostatočne silnom programovacom jazyku vieme napísať program, ktorý si v nejakej premennej vytvorí svoj vlastný zdrojový kód – a následne ho napríklad vypíše. (Programu, ktorý vypíše „samého seba“, sa hovorí quine.)

4 Komplexné čísla a rovinná geometria

Jedným z významných myšlienkových krokov v histórii matematiky bolo spojenie dvoch zdanlivo úplne nesúvisiacich oblastí. Prvou boli komplexné čísla, ktoré vznikli pri riešení polynomických rovníc, a druhou rovinná geometria.

To, čo zrazu dostávame do rúk, je neuveriteľne silný nástroj na počítanie takmer čohokoľvek. Komplexné číslo v klasickom tvare $a + bi$ je vlastne to isté ako vektor (a, b). Navyše zadarmo dostávame aj operácie s uhlami, stačí sa na komplexné čísla pozerať v polárnom tvare.

Ale veď poďme pekne za radom.

- Klasický a polárny tvar, prevádzanie medzi nimi.
- Eulerov vzorec $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
  Dôkaz pre reálne φ cez to, že derivácia funkcie $f(\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)e^{-i\varphi}$ je všade 0 a že $f(0) = 1$.
- Zovšeobecnená de Moivrova veta: keď násobíme komplexné čísla, násobia sa veľkosti a sčituje sa uhol.
  Dôkaz triviálne použitím Eulerovho vzorca.
- Odbočka: Teraz vidíme geometrickú interpretáciu súčinu: ak $c = ab$, tak c je taký bod, pre ktorý sú trojuholníky $01a$ a $0bc$ podobné.
- Z de Moivrovej vety dostávame zadarmo súčtové vzorce, nikdy viac si nebudeme musieť potrebovať pamätať znamienka!
  Na jednej strane, keď násobíme podľa súradníc, máme:

  $$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

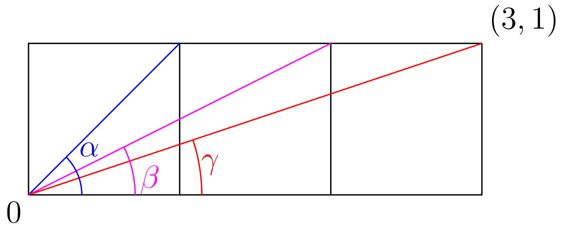
  Na druhej strane, keďže vieme, že pri násobení sa sčitujú uhly, dostávame:

  $$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

  Porovnaním reálnej časti oboch rovností dostávame vzorec pre $\cos(\alpha + \beta)$, porovnaním imaginárnych častí vzorec pre $\sin(\alpha + \beta)$.
  Vzorce pre $\cos(\alpha - \beta)$ a $\sin(\alpha - \beta)$ dostaneme dosadením $-\beta$ za β do súčtových vzorcov a využitím párnosti cos a nepárnosti sin.
- Takisto z de Moivrovej vety vidíme, že každé číslo iné ako 0 má n-tých komplexných odmocnín práve n.

Jeden príklad

Ukážeme si jednu úlohu, ktorú použitie komplexných čísel výrazne zjednoduší.



Na obrázku sú tri štvorce. Zistite súčet veľkostí vyznačených uhlov.

Bez komplexných čísel nepoznám stručné a elegantné riešenie, s nimi ide o úlohu na jeden riadok. Stačí si uvedomiť, že farebné čiary zodpovedajú v komplexnej rovine číslam $1+i$, $2+i$ a $3+i$. Ich vynásobením dostaneme nové číslo, ktorého uhol bude súčtom troch vyznačených uhlov.

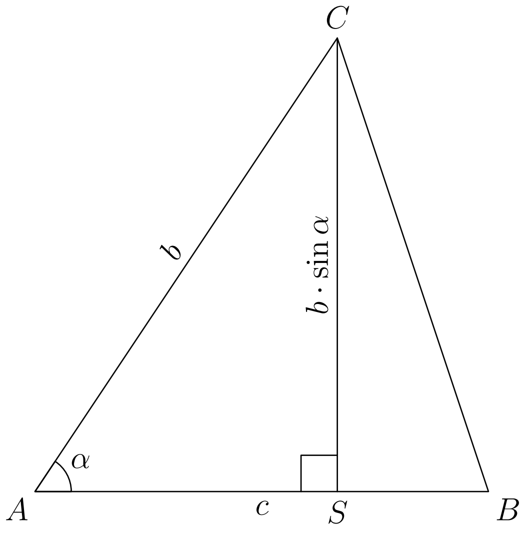
$$(1+i)(2+i)(3+i) = (1+3i)(3+i) = 10i$$

To je čisto imaginárne číslo, a teda súčet troch vyznačených uhlov je presne $90°$.

Rozdiel uhlov, vektorový súčin a obsah trojuholníka

Súvis sínusu a obsahu trojuholníka

Začneme známym vzťahom: keď v trojuholníku poznáme dĺžky dvoch strán b, c a veľkosť uhla α medzi nimi, vieme jeho obsah spočítať ako $(b \cdot c \cdot \sin\alpha)/2$.

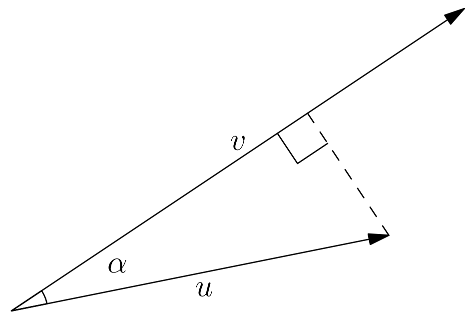


Prečo? Stačí si všimnúť, že $b \sin\alpha$ je dĺžka výšky na stranu c. (Na obrázku má v pravouhlom trojuholníku ASC prepona dĺžku b, a SC je odvesna protiľahlá k uhlu α.) A potom už je to zrazu len starý známy vzorec „strana krát výška deleno dva“.

Súvis kosínusu a kolmého premietania

Majme dva vektory u a v. Aký veľký je kolmý priemet u do smeru v?

Pozrime sa na to na obrázku. Ak si uhol, ktorý zvierajú u a v, označíme α, tak hľadaná veľkosť je zjavne $|u|\cos\alpha$, keďže priemet je priľahlou odvesnou v trojuholníku, ktorého preponou je u.



Rozdiel uhlov a komplexné čísla

Namiesto sčitovania dvoch uhlov sa teraz pozrime na ich rozdiel. Ak máme uhly φ a ψ, tieto vieme reprezentovať ako komplexné čísla $\cos\varphi + i\sin\varphi$ a $\cos\psi + i\sin\psi$.

No a keďže $\cos(-x) = \cos x$ a $\sin(-x) = -\sin x$, uhlu $-\varphi$ zodpovedá komplexné číslo $\cos\varphi - i\sin\varphi$. (Číslo $a - bi$ sa volá komplexne združené, alebo tiež konjugované, číslo k číslu $a + bi$. Všimnite si, že v geometrickej interpretácii je komplexne združené číslo zrkadlovým obrazom pôvodného podľa osi x.)

Komplexné číslo zodpovedajúce rozdielu $\psi-\varphi$ teraz vyrobíme ľahko: stačí vynásobiť komplexné čísla pre ψ a $-\varphi$.

Komplexné číslo, ktoré takto dostaneme, bude teda rovné $\cos(\psi - \varphi) + i\sin(\psi - \varphi)$.

Nič prevratné sa nezmení ani keď vezmeme dve všeobecné komplexné čísla $a + bi$ a $c + di$.

Keď tie prevedieme do polárneho tvaru, dostaneme $r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a $r_2(\cos\psi + i\sin\psi)$, kde $r_1, r_2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{c^2 + d^2}$.

Súčin $(a-bi)(c+di)$ bude teda vo všeobecnom prípade rovný $r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\psi-\varphi) + i\sin(\psi-\varphi))$. Teda veľkosť výsledku je súčinom pôvodných veľkostí a uhol výsledku je rozdielom pôvodných uhlov.

Vektorový súčin

V tejto časti si ukážeme, ako zo súradníc vrcholov triviálne spočítať obsah trojuholníka.

Začneme tým, že trojuholník ABC posunieme tak, aby vrchol A ležal na bode $(0, 0)$. Nech sú teraz zvyšné dva vrcholy $B = (b_x, b_y)$ a $C = (c_x, c_y)$.

Uvažujme komplexné čísla $b = b_x + ib_y$ a $c = c_x + ic_y$, ktoré zodpovedajú bodom B a C.

Všimnite si, že veľkosti b a c sú dĺžky strán AB a AC, a že rozdiel uhlov b a c je rovný uhlu α v trojuholníku ABC.

Platí teda rovnosť $(b_x - ib_y) \cdot (c_x + ic_y) = |AB| \cdot |AC| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Všimnime si imaginárnu časť tejto rovnosti. Pravá strana sa rovná $|AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$. Toto je zjavne dvojnásobok plochy trojuholníka ABC. No a ľavá strana sa rovná $b_x c_y - b_y c_x$.

Dostávame teda záver: hodnota $b_x c_y - b_y c_x$ je dvojnásobkom plochy trojuholníka ABC.

Túto hodnotu poznáme pod menom *vektorový súčin*.

(Presnejšie, vektorový súčin je operácia, ktorá z dvoch 3D vektorov spraví tretí, ktorý je na oba kolmý, a ktorého veľkosť je rovná ploche rovnobežníka určeného prvými dvoma vektormi. Ak ale máme vektory (b_x, b_y) a (c_x, c_y) v rovine, môžeme sa na ne dívať ako na 3D vektory $(b_x, b_y, 0)$ a $(c_x, c_y, 0)$. Vektorový súčin týchto dvoch vektorov je potom $(0, 0, b_x c_y - b_y c_x)$.)

Ešte poznámka: všimnite si, že záleží na poradí vektorov b a c. Keby sme ich vymenili, bude mať uhol α opačné znamienko, a teda aj $\sin\alpha$ bude mať opačné znamienko. Náš vzorec teda počíta *orientovanú* plochu. Výsledok je kladný práve vtedy, ak je c naľavo od b. (Teda ak je od smeru b k smeru c bližšie proti smeru ručičiek ako v smere.)

Skalárny súčin

Zostaňme ešte pri rovnosti $(b_x - ib_y) \cdot (c_x + ic_y) = |AB| \cdot |AC| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Tentoraz sa však pozrime na reálnu zložku oboch strán. Na pravej strane máme $|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\alpha$, a na ľavej $b_x c_x + b_y c_y$.

Výraz na ľavej strane poznáme pod menom *skalárny súčin*.

(Presnejšie, skalárny súčin sa dá analogicky definovať pre ľubovoľne veľa rozmerné vektory. Skalárnym súčinom $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ a $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ je číslo $\sum_i b_i c_i$. Aj vo viac rozmeroch platí, že veľkosť skalárneho súčinu je súčinom veľkostí vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú.)

Ako sme už spomínali vyššie, skalárny súčin je veľmi užitočná operácia pri kolmých priemetoch.

Príklad: Vzdialenosť bodu $A = (a_x, a_y)$ od priamky $p : dx + ey + f = 0$.

Zvoľme na priamke p bod $B = (b_x, b_y)$. Vzdialenosť A od p je rovná dĺžke priemetu AB do smeru kolmého na p. Vektor $n = (d, e)$ je zjavne kolmý na p. Skalárny súčin tohto vektora s vektorom $s = \overrightarrow{BA} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$ je rovný $|n| \cdot |s| \cdot \cos\alpha$, kde α je uhol, ktorý zvierajú n a s. Hodnota $|s| \cdot \cos\alpha$ je zjavne hľadaná vzdialenosť A od p.

Máme teda $d(a_x - b_x) + e(a_y - b_y) = |n| \cdot |s| \cdot \cos\alpha$, a preto $|s| \cdot \cos\alpha = \dfrac{d(a_x - b_x) + e(a_y - b_y)}{|n|} = \dfrac{d(a_x - b_x) + e(a_y - b_y)}{\sqrt{d^2 + e^2}}$.

Tým sme úspešne vyjadrili vzdialenosť A a p len pomocou rovnice p a súradníc bodov A a B.

5 Axióma výberu

Na začiatku sme hovorili niečo o tom, že matematika skúma jeden ideálny svet. Toto nie je úplne presná formulácia. Keď Zermelo a Fraenkel navrhujú svoju axiomatickú teóriu množín, narážajú na problém. Tým je axióma výberu (`http://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_choice`). Detaily sa sem už nezmestia, ale pointa je že matematika nie je len jedna, matematík je veľa, a je na nás, ktorú si vyberieme.